Universidade Estadual de Maringá - Departamento de Matemática

Cálculo Diferencial e Integral: um KIT de Sobrevivência

Introdução a Topologia Geral

Prof. Doherty Andrade
Prof. Nélson Martins Garcia

Introdução

Nestas notas apresentamos uma introdução a Topologia. É uma introdução mesmo, iniciamos com conceitos de lógica, relações e funções, espaços topológicos, funções contínuas e terminamos com alguns teoremas de ponto fixo. Esperamos que este material ajude aos iniciantes em Matemática.

Sumário

Capítulo 1

Elementos de Lógica

1.1 Introdução

Um Modelo matemático é uma caracterização de um processo ou um fenômeno. Esta definição é necessariamente imprecisa, mas algumas ilustrações estabelecem a noção. Um modelo matemático tem três partes essenciais:

- um processo ou fenômeno a ser modelado,
- uma estrutura matemática capaz de expressar as propriedades importantes do objeto a ser modelado, e
- uma correspondência explícita entre os dois.

A primeira componente de um modelo é um *fenômeno ou processo*, que podem ser processos físicos tais como movimentos planetários ou fluxo de fluidos, processos econômicos, modelos de aprendizagem e assim por diante.

A segunda componente de um modelo é uma *estrutura matemática* abstrata. O conjunto dos inteiros com as operações de adição e multiplicação é exemplo de uma tal estrutura. Sozinha, esta estrutura é abstrata e não tem nenhuma relação intrínseca com o mundo real. Entretanto, por causa da sua abstração, a estrutura pode ser usada como um modelo em diferentes fenômenos. Toda estrutura matemática tem uma linguagem associada que permite fazer afirmações. Na Álgebra, as afirmações

$$5 + 8 \leq 10 \text{ e } 7x + 2y = 18$$

podem ambas serem feitas, embora uma delas seja incorreta.

Se um modelo matemático é adequado, a linguagem de sua estrutura matemática associada pode ser usada para fazer afirmações sobre o objeto a ser modelado.

A terceira componente de um modelo é a correspondência que existe entre o mundo real e a estrutura matemática. Parâmetros, relações e ocorrências no mundo real serão associados com coisas como variáveis, equações e operações na estrutura matemática. Esta correspondência torna possível usar a estrutura matemática para descrever fatos do mundo real que são de interesse.

Em muitas aplicações diretas, modelos são usados para apresentar informação de forma mais facilmente assimilável. Por exemplo, "grafos"podem ser usados para apresentar a malha rodoviária num país. Um segundo uso de modelos é dar um método conveniente para executar certos cálculos. Exemplos familiares incluem métodos de otimização. Finalmente, modelos são usados para investigação e predição. A simulação com modelos físicos e computacionais, é um bom exemplo.

Veremos a seguir um modelo para o raciocínio matemático.

1.2 O raciocínio Matemático

Matemática é o estudo de propriedades de estruturas matemáticas. Nesta secção falaremos do raciocínio matemático que é o processo usado para verificar estas propriedades.

Uma estrutura matemática é definida por um conjunto de axiomas. Um axioma é uma afirmação considerada verdadeira. Outras afirmações verdadeiras que podem ser inferidas da veracidade dos axiomas são chamados teoremas. Uma prova de um teorema é um argumento que estabelece que o teorema é verdadeiro para uma estrutura matemática particular. Uma prova é em geral apresentada como uma sequência de afirmações tal que cada afirmação ou é um axioma da estrutura matemática, um teorema anterior, ou uma dedução lógica dos passos anteriores da prova. Portanto, para provar teoremas, devemos ser capazes de fazer afirmações sobre a estrutura matemática e determinar quando uma afirmação segue de outras. Para estabelecer que uma afirmação segue de uma outra, devemos, usar apenas princípios de raciocínio que são aceitos como válidos; estes princípios são chamados *regras de inferência*.

Nesta secção estudaremos como fazer afirmações sobre estruturas matemáticas bem como combinar essas afirmações e deduzir conclusões delas. Por causa da importância deste tópico trataremos dele cuidadosamente.

O material desta secção é um modelo matemático do processo de raciocínio. Ele serve também como uma breve introdução para alguns dos conceitos e notações da lógica matemática.

Uma afirmação é uma oração afirmativa ou uma declaração. Uma proposição é uma afirmação que é ou verdadeira ou falsa, mas não ambas [1]. A lógica matemática adota como regras fundamentais os dois seguintes princípios:

Princípio da não contradição: uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo.

Princípio do terceiro excluído: Toda proposição é apenas verdadeira ou apenas falsa; não há uma terceira possibilidade.

Se uma proposição é verdadeira, nós dizemos que ela tem valor verdade **V**; se uma proposição é falsa, seu valor verdade é **F**.

[1] Estamos estudando lógica bivalente

• **Exemplo 1.2.1** a)A lua é feita de queijo.
b) 4 é um número primo.
c) $3 + 3 = 6$.
d) 2 é número inteiro par e 3 não é.
e) Nevou no Brasil no dia 22 de abril de 1500.

As afirmações a) e b) são proposições falsas, c) e d) são proposições verdadeiras. A proposição e) pode ou não ser verdadeira, embora não temos como determinar seu valor verdade.

As seguintes afiramações não são proposições:
a) $x + y > 4$.
b) $x = 3$.
c) Você está bem ?

O primeiro exemplo é uma declaração mas não é uma proposição porque seu valor verdade depende dos valores de x e y. Do mesmo modo, o valor verdade da segunda afirmação, depende do valor de x. O terceiro não é uma afirmação ou uma declaração e portanto não é uma proposição.

Uma forma proposicional é uma declaração que contém pelo menos uma proposição. Podemos combinar proposições para obter formas proposicionais usando as palavras "e", "ou"e "não". Uma variável proposicional denota uma proposição arbitrária. Usamos as letras $P, Q, R, S, \ldots.$ para representação de proposições. As variáveis como as proposições podem ser combinadas para construírmos formas proposicionais.

Representaremos: "e"por $\wedge$ "ou"por $\vee$ "não"por $\neg$.

Nas formas $P \wedge Q, P \vee Q, \neg P,\ P, Q$ são chamados operandos e $\vee, \wedge, \neg$ são chamados operadores lógicos.

Operadores lógicos ou conectivos lógicos são operações sobre proposições do mesmo modo que adição e multiplicação são operações sobre números. Quando um operador lógico é usado para construir uma nova proposição usando outras dadas, o valor verdade desta nova proposição depende do operador lógico e do valor verdade das proposições originalmente dadas. Descutiremos agora como os operadores lógicos "e" "ou" e "não" afetam o valor verdade das proposições. Veremos que o significado dos operadores lógicos nem sempre coincide com aquele usado em português.

1.3 Tabela Verdade

Apresentaremos a seguir as tabelas verdade de alguns conectivos lógicos aceitas tacitamente.
a) O operador $\neg$, negação.

P	$\neg P$
V	F
F	V

b) O operador $\wedge$, conjunção.

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

c) O operador $\vee$, disjunção.

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

d) O operador $\Rightarrow$ implica.

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Enquanto a negação muda uma proposição em outra, os outros operadores lógicos combinam duas proposições para formar uma terceira. Se P e Q são duas proposições então $P \wedge Q$ é uma proposição cujo valor verdade depende do valor verdade das proposições P e Q.

A proposição $P \Longrightarrow Q$ pode ser lida dos seguintes modos:

Se P, então Q.

P apenas se Q.

P é suficiente para Q.

Q é necessário para P.

Q se P.

Q segue de P.

Q desde que P.

Q é consequência de P.

Se P e Q têm o mesmo valor verdade, então nós dizemos que são logicamente equivalentes. O operador chamado "equivalência" é denotado por $\Longleftrightarrow$ produz uma proposição verdadeira se as proposições operandos são logicamente equivalentes. Faça sua tabela.

Em $P \Longleftrightarrow Q$ lê-se P se e, somente se Q, ou P e Q são equivalentes. Note que $P \Longleftrightarrow Q$ significa que $P \Longrightarrow Q$ e $Q \Longrightarrow P$.

A recíproca de $P \Longrightarrow Q$ é a proposição $Q \Longrightarrow P$, e contra positiva é a proposição $\neg Q \Longrightarrow \neg P$. Se $P \Longrightarrow Q$ é verdadeira, então dizemos que P é mais forte que Q. Assim, "x é um inteiro positivo" é uma afirmação mais forte que "x é um inteiro".

Em português o uso da implicação estabelece uma relação de causa ou relação de "herança" entre a premissa e a conclusão. Assim, "se eu caio no lago, então eu ficarei molhado" relaciona uma causa a seu efeito. E "se eu sou homem, então eu sou mortal" caracteriza uma propriedade dos homens. Entretanto, na linguagem das proposições, a premissa de uma implicação não precisa estar relacionada à conclusão. Isto pode causar algumas confusões.

Se P representa "Laranjas são pretas" e Q representa "A Terra não é plana", então $P \Longrightarrow Q$ representa " Se as laranjas são pretas, então a Terra não é plana". Embora nenhuma causa ou relação entre a cor das laranjas e a forma da Terra valha, a implicação é verdadeira.

Chama-se *tautologia* toda forma proposicional cujo valor verdade é **V**. É claro que uma forma proposicional depende dos valores verdades das proposições que a compõem; mas numa tautologia o seu valor é sempre **V** independente das proposições envolvidas. Por exemplo, a forma proposicional $\neg P \vee P$ é claramente uma tautologia.

Existem outros operadores lógicos não tão comuns. O operador lógico "Nand" é dado por $(|)$, $\neg\wedge$. O operador lógico "Nor" é dado por $(\downarrow)$, $\neg\vee$. O operador "ou exclusivo" denotado por $\oplus$, é usado em proposições do tipo "Mário é alagoano ou paranaense". Em "João é médico ou professor" o ou é inclusivo. Construir a tabela verdade de $\oplus$.

Valem as seguintes identidades lógicas.

Proposição	Equivalência	Denominação
1. P	$(P \vee P)$	idemp. de $\vee$
2. P	$(P \wedge P)$	idemp. de $\wedge$
3. $(P \vee Q)$	$(Q \vee P)$	comut. de $\vee$
4. $(P \wedge Q)$	$(Q \wedge P)$	comut. de $\wedge$
5. $[(P \vee Q) \vee R]$	$[P \vee (Q \vee R)]$	assoc. de $\vee$
6. $[(P \wedge Q) \wedge R]$	$[(P \wedge (Q \wedge R)]$	assoc. de $\wedge$
7. $\neg(P \wedge Q)$	$(\neg P \vee \neg Q)$	De Morgan
8. $\neg(P \vee Q)$	$(\neg P \wedge \neg Q)$	De Morgan
9. $[P \wedge (Q \vee R)$	$[(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)]$	dist. de $\wedge$ em $\vee$
10. $[P \vee (Q \wedge R)]$	$[(P \vee Q) \wedge (P \vee R)]$	dist. de $\vee$ em $\wedge$
11. P	$\neg(\neg P)$	dupla neg.
12. $(P \Longrightarrow Q)$	$(\neg P \vee Q)$	implicação
13. $(P \Longleftrightarrow Q)$	$(P \Longrightarrow Q) \wedge (Q \Longrightarrow P)$	equiv.
14. $[(P \wedge Q) \Longrightarrow R]$	$[P \Longrightarrow (Q \Longrightarrow R)]$	exportação
15. $[(P \Longrightarrow Q) \wedge (P \Longrightarrow \neg Q)]$	$\neg P$	absurdo
16. $(P \Longrightarrow Q)$	$\neg Q \Longrightarrow \neg P$	contra-positiva

As identidades acima podem ser usadas para simplificar uma forma proposicional dada.

Observação 1.3.1 As formas proposicionais devem ser cuidadosamente escritas; caso contrário podem aparecer ambiguidades em suas interpretações. Parênteses, colchetes e chaves são usados para delimitar com exatidão o alcance dos conectivos. Note que $P \Longrightarrow Q \Longrightarrow R$ e $P \Longrightarrow (Q \Longrightarrow R)$ não são equivalentes. Mesma observação vale para predicados e quantificadores que veremos mais adiante.

Veremos a seguir uma pequena lista de tautologias que são regras de inferência que usaremos mais adiante.

Proposição	Denominação
1. $P \Longrightarrow (P \vee Q)$	adição
2. $(P \wedge Q) \Longrightarrow P$	simplific.
3. $[P \wedge (P \Longrightarrow Q)] \Longrightarrow Q$	modus ponens
4. $[(P \Longrightarrow Q) \wedge \neg Q] \Longrightarrow \neg P$	modus tollens
5. $[\neg P \wedge (P \vee Q)] \Longrightarrow Q$	silg. disj.
6. $[(P \Longrightarrow Q) \wedge (Q \Longrightarrow R)] \Longrightarrow (P \Longrightarrow R)$	.
7. $(P \Longrightarrow Q) \Longrightarrow [(Q \Longrightarrow R) \Longrightarrow (P \Longrightarrow R)]$	.
8. $[(P \Longrightarrow Q) \wedge (R \Longrightarrow S)] \Longrightarrow [(P \wedge R) \Longrightarrow (Q \wedge S)]$	.
9. $[(P \Longleftrightarrow Q) \wedge (Q \Longleftrightarrow R)] \Longrightarrow (P \Longleftrightarrow R)$	.

1.4 Predicados e Quantificadores

A linguagem das proposições não permite fazer todas as afirmações necessárias em Matemática. Precisamos fazer afirmações do tipo

$$x > 3 \ , x + y = 20, \ \ x \geq y.$$

Tais afirmações não são proposições. Este tipo de afirmação ocorre também em português: "Alguém vive na cidade"pode ser formulada como

$$x \text{ vive em } y.$$

x e y são variáveis e "vive em"é um predicado.

Alguns predicados são suficientemente importantes para merecerem sinais especiais, como por exemplo $=$, $>$, $<$, $\leq$, $\geq$.

Um modo de tornar tais afirmações proposições é quantificar e as formas mais comuns de quantificadores são os quantificadores *existencial* e *universal*, denotados por $\exists$ e $\forall$, respectivamente. Assim, se $P(x)$ é um predicado com variável x como argumento, então a afirmação

"Para todo $x, P(x)$"

que é interpretado como

Para todo valor de x, a afirmação $P(x)$ é verdadeira

é uma afirmação na qual a variável x foi quantificada universalmente. Usando símbolos podemos escrever

$$\forall x P(x).$$

Assim, se o universo do discurso for $\mathcal{U}$, então o predicado $P(x)$ é verdadeiro para todo x em $\mathcal{U}$. Caso contrário, $\forall x P(x)$ será falso.

Note que dizer que $\forall x P(x)$ é falso no universo $\mathcal{U}$, significa dizer que para algum $x_0 \in \mathcal{U}$ $P(x_0)$ é falso.

A variável x em "para algum $x, P(x)$,"ou equivalentemente

"Existe um valor de x para o qual a afirmação $P(x)$ é verdadeira"

foi quantificada existencialmente. A frase acima pode ser escrita em símbolos

$$\exists x P(x).$$

Outra forma de quantificação é " existe um e apenas um "elemento do universo do discurso que torna o predicado verdadeiro. Este quantificador é representado por $\exists!$.

• **Exemplo 1.4.1** Se o universo é o conjunto dos inteiros, então
a) $\forall x[x < x + 2]$ é verdadeiro.
b) $\forall x[x = 3]$ é falso.
c) $\forall x \forall y[x + y > x]$ é falso.
d) $\exists x[x < x + 1]$ é verdadeiro.
e) $\exists x[x = 3]$ é verdadeiro.
f) $\exists x[x = x + 1]$ é falso.

Observação 1.4.2 As negações dos quantificadores são :

1i) $\neg \forall x P(x) \iff \exists x \neg P(x)$.

2i) $\neg \exists x P(x) \iff \forall \neg P(x)$.

Exemplos a)

$$\begin{aligned} \neg \exists x \forall y \forall z P(x,y,z) &\iff \forall x \neg \forall y \ \forall z P(x,yz) \\ &\iff \forall x \exists y \neg \forall z P(x,y,z) \\ &\iff \forall x \exists y \exists z \neg P(x,y,z). \end{aligned}$$

b)Negar $\forall x \forall y \exists z [x + z = y]$.

•• **Exercício 1.4.3** 1. Se $S(x,y,z)$ denota o predicado " $x + y = z$", $P(x,y,z)$ denota "$x.y = z$,"e L(x,y) denota "$x < y$,"e o universo de discurso é o conjunto dos números naturais, expresse as seguintes afirmações. A frase "existe um x"não implica que x seja único.

a) Para todo x e y, existe um z tal que $x + y = z$.

b) Nenhum x é menor do que zero.

c) Para todo $x, x + 0 = 0$.

d) Para todo $x, x.y = y$ para todo y.

e) Existe um x tal que $x.y = y$ para todo y.

2. Determine quais das seguintes proposições são verdadeiras se o conjunto universo é o conjunto dos inteiros.

a) $\forall x \exists y [x.y = 0]$

b) $\forall x \exists y [x.y = 1]$

c) $\exists y \forall x [x.y = 1]$

d) $\exists y \forall x [x.y = x]$.

3. Seja o universo de discurso o conjunto dos inteiros. Para cada uma das seguintes afirmações, encontre um predicado P que faz a implicação falsa.

a) $\forall x \exists ! y P(x,y) \Longrightarrow \exists ! y \forall x P(x,y)$

b) $\exists ! y \forall x P(x,y) \Longrightarrow \forall x \exists ! y P(x,y)$

4. Mostre que a afirmação não é válida:

$$\exists x[P(x) \Longrightarrow Q(x)] \Longleftrightarrow [\exists x P(x) \Longrightarrow \exists x Q(x)].$$

1.5 Inferência Lógica

Um teorema é uma afirmação que pode ser mostrada verdadeira. Uma prova é um argumento que estabelece a veracidade do teorema. Isto é, é uma sequência finita de afirmações que representam o argumento que o teorema é verdadeiro. Algumas das afirmações que ocorrem na prova podem ser conhecidas como verdade a priori, estas incluem axiomas ou teoremas previamente demonstrados. Outras afirmações podem ser hipóteses do teorema, assumidas ser verdade na argumentação. Finalmente, algumas afirmações podem ser deduzidas de outras afirmações que ocorreram anteriormente na prova. Assim, para construir provas, nós precisamos tirar conclusões ou deduzir novas afirmações das afirmações antigas. Isto é feito usando regras de inferência. As regras de inferência nos dizem que conclusões podemos obter usando afirmações conhecidas ou assumidas como verdade. Um matemático criterioso não aceita uma afirmação como verdadeira a menos que ele seja convencido por uma rigorosa demonstração.

Talvez as mais fundamentais regras de inferência são aquelas que nos permitem substituições. Assim, em geral somos permitidos substituir qualquer expressão por um outra expressão equivalente a ela.

Definição 1.5.1 Um argumento é uma sequência finita

$$A_1, A_2, \ldots, A_n, \ \ (n \geq 1)$$

de fórmulas proposicionais ou proposições, onde os A_i são as premissas e a última a conclusão.

Indica-se o argumento por:

$$A_1, A_2, ..., A_{n-1} : A_n$$

e lê-se $A_1, A_2, ..., A_{n-1}$ acarretam A_n.

Um argumento é válido se e somente se,

$$A_1 \wedge A_2, \wedge \ldots, \wedge A_{n-1} \Longrightarrow A_n \text{ é tautologia .}$$

Podemos também escrever o argumento como

$$\begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_{n-1} \\ \hline A_n \end{array}$$

• **Exemplo 1.5.2** Verificar se o argumento é válido:

$$\begin{array}{c} A_1 : (P \wedge Q) \vee (P \Longrightarrow Q) \\ A_2 : \neg(P \wedge Q) \\ A_3 : P \Longrightarrow Q \end{array} .$$

•• **Exercício 1.5.3** Verificar se são válidos os seguintes argumentos:

1. Se eu fosse artista, seria inteligente; não sou artista, logo não sou inteligente.

2. Não é verdade que eu gosto de açúcar e de pimenta; eu gosto de açúcar e pimenta ou não estudo ou se gosto de açúcar não gosto de pimenta. Segue-se que eu estudo ou se gosto de açúcar, então, gosto de pimenta.

3. Se Paulo é competente, então, se o serviço é bem feito, ele será aceito. O serviço não é aceito. Segue-se que se o serviço é bem feito, então Paulo não é competente.

• **Exemplo 1.5.4** Suponha que nós sabemos que “Sansão é forte ”e “Se Sansão é forte, então ele salvará do perigo a mulher”. Nós podemos concluir que “Ele salvará a mulher do perigo”.

Esta regra de inferência é chamada *Modus Ponens*, em geral é posta na seguinte forma:

$$\begin{array}{c} P \\ P \Longrightarrow Q \\ \hline Q \end{array}$$

• **Exemplo 1.5.5** Escreva na forma de argumento as seguintes tautologias:
1. $P \Longrightarrow (P \vee Q)$ (adição)
2. $(P \wedge Q) \Longrightarrow P$ (simplificação)
3. $[P \wedge (P \Longrightarrow Q)] \Longrightarrow Q$ (modus ponens)
4. $[\neg Q \wedge (P \Longrightarrow Q)] \Longrightarrow \neg P$ (modus tollens)
5. $(P \vee Q) \wedge \neg P] \Longrightarrow Q$ (silogismo disjuntivo)
6. $[(P \Longrightarrow Q) \wedge (Q \Longrightarrow R)] \Longrightarrow [P \Longrightarrow R]$ (silog. hipot.)
7. $[(P \Longrightarrow Q) \wedge (R \Longrightarrow S) \wedge (P \vee R)] \Longrightarrow [Q \vee S]$ (dil. constr.)
8. $[(P \Longrightarrow Q) \wedge (R \Longrightarrow S) \wedge (\neg Q \vee \neg S)] \Longrightarrow [\neg P \vee \neg R]$ (dil. destrut.)

• **Exemplo 1.5.6** Falácias são argumentos que resultam de inferências incorretas. Veja o exemplo abaixo.

Se o réu é culpado, ele ficará nervoso quando interrogado.
O réu estava muito nervoso quando foi interrogado.
Portanto, o réu é culpado.

Este argumento pode ser apresentado na forma:

$$\begin{array}{c} P \Longrightarrow Q \\ Q \\ \hline P \end{array}$$

O argumento não é correto porque a conclusão P pode ser falsa embora $P \Longrightarrow Q$ e Q sejam verdadeiros. Isto é,

$$[(P \Longrightarrow Q) \wedge Q] \Longrightarrow P$$

não é tautologia.

Vejamos outro exemplo.

• **Exemplo 1.5.7** Se o réu tinha as mãos cobertas de sangue, então ele é o assassino.
O réu estava impecável.
Então, o réu é inocente.

Verifique que este argumento não é válido.

• **Exemplo 1.5.8** Considere o seguinte argumento.
Se duendes existem ou os pássaros são mamíferos, então a vaca é ave símbolo nacional.
Se a vaca é ave símbolo nacional, então giló é bom no lanche.
Mas giló é horrível no lanche.
Portanto, os pássaros não são mamíferos.

O argumento pode ser representado como se segue:

$$\begin{array}{c} (P \vee Q) \Longrightarrow R \\ R \Longrightarrow S \\ \neg S \\ \hline \neg Q \end{array}$$

Usaremos as regras de inferência para reduzir o argumento na conclusão. Organizaremos numa tabela para facilitar.

Afirmação	Justificativas
1.$(P \lor Q) \Longrightarrow R$	Hipotese 1
2.$R \Longrightarrow S$	Hipotese 2
3.$(P \lor Q) \Longrightarrow S$	Passos 1 e 2 e silog.
4. $\neg S$	Hipotóse 3.
5.$\neg(P \lor Q)$	Passos 3 e 4 e M. Tollens
6.$\neg P \land \neg Q$	Passo 5 e Lei de Morgan
7.$\neg Q$	Passo 6 e simplificação

Cada afirmação da prova é considerada verdadeira, ou porque é hipótese ou porque é sabido ser logicamente equivalente a afirmação anterior da prova, ou ainda porque é obtida aplicando uma regra de inferência.

Regras adicionais de inferência, que estão fora do nosso objetivo, são necessárias para provar afirmações envolvendo predicados e quantificadores. Veremos alguns casos simples:

Se $P(x)$ representa "x é mortal"com x no universo dos humanos, então se pudermos estabelecer $\forall x P(x)$, isto é, "todo homem é mortal", então podemos concluir que "Sócrates é mortal". Esta é regra de exemplificação universal, que pode ser resumida no seguinte

$$\frac{\forall x P(x)}{\therefore P(c).}$$

A segunda regra de inferência, é conhecida como generalização universal, pois permite a quantificação de uma afirmação. Se mostramos que $P(c)$ vale para todo c do universo de discurso, então podemos concluir que $\forall x P(x)$. Assim podemos resumir

$$\frac{P(x)}{\therefore \forall x P(x).}$$

Analogamente, temos a terceira regra de inferência chamada de exemplificação existencial

$$\frac{\exists x P(x)}{\therefore P(c).}$$

A generalização existencial é mais uma regra de inferência. Pode ser representada por

$$\frac{P(c)}{\therefore \exists x P(x),}$$

isto é, a regra dis que se c é um elemento do universo de discurso e $P(c)$ é verdade então a afirmação $\exists x P(x)$ é verdade.

• **Exemplo 1.5.9** Consideremos a seguinte situação:

Todo homem tem dois olhos.

João é um homem.

Portanto, João tem dois olhos.

Se $H(x)$ denota "x é um homem"e $O(x)$ denota "x tem dois olhos"e J representa João, temos

1. $\forall x[H(x) \Longrightarrow O(x)]$ (hipótese)
2. $M(J)$ (hipótese)
3. $H(J) \Longrightarrow O(J)$ (exemplif. univers.)
4. $\therefore L(J)$ (2+3 + modus ponens)

1.6 Métodos de Prova

Na secção anterior, descrevemos como usar as regras de inferência para inferir a validade de um argumento. As regras de inferência nos possibilitam decidir se um determinado argumento é uma prova. Nesta secção vamos estudar a estrutura de uma prova ou demonstração bem como a estratégia de sua construção. Embora não seja possível considerar todas as técnicas de prova, vamos descrever algumas das mais comuns.

A forma mais elementar de teorema é a tautologia. Uma tautologia é um teorema por causa da sua estrutura sentencial, isto é, é verdadeiro independente da interpretação ou significado de qualquer das proposições envolvidas. Por esta razão, tautologias são facilmente provadas: basta apenas construir a sua tabela verdade.

Muitos teoremas tomam uma das duas formas: $P \Longrightarrow Q$ ou $P \Longleftrightarrow Q$. a segunda delas realmente consiste em dois teoremas e é usualmente provado em duas partes: mostra-se que $P \Longrightarrow Q$ e seguida que $Q \Longrightarrow P$. Para mostrar que $P \Longrightarrow Q$ normalmente usamos uma das cinco mais comuns técnicas de demonstração abaixo:

1. Prova por vacuidade de $P \Longrightarrow Q$.

O valor verdade de $P \Longrightarrow Q$ é **V** se P tem valor **F**. Consequentemente, se estabelecemos que P tem valor **F**, então a implicação tem valor **V**. Logo, a prova por vacuidade é construída estabelecendo que P tem valor **F**.

2. Prova trivial de $P \Longrightarrow Q$.

Se é possível estabelecer que Q tem valor **V**, então qualquer que seja o valor de P, pela tabela de $\Longrightarrow$ vemos que $P \Longrightarrow Q$ tem valor **V**. Assim se constrói uma prova trivial de $P \Longrightarrow Q$.

3. Prova direta de $P \Longrightarrow Q$.

Uma prova direta de $P \Longrightarrow Q$ mostra que a verdade de Q segue logicamente de P, isto é, a prova começa assumindo P verdade. Então, usando informações convenientemente, tais como teoremas provados anteriormente, é mostrado que Q deve ser verdade.

4. Prova Indireta de $P \Longrightarrow Q$ ou prova da contrapositiva.

A implicação $P \Longrightarrow Q$ é logicamente equivalente a

$$\neg Q \Longrightarrow \neg P.$$

Logo, estabelecer que $P \Longrightarrow Q$ é verdadeiro é a mesma coisa que provar que $\neg Q \Longrightarrow \neg P$ é verdadeiro.

5.Outra forma de provar que a implicação $P \Longrightarrow Q$ é verdadeira é por absurdo ou por contradição. Neste caso assumimos que P e $\neg Q$ são verdadeiros e contruímos uma contradição.

O último tipo de demonstração pode ser usado para provar que uma proposição P é verdadeira; neste caso imaginamos que P é falso e deduzimos uma contradição.

• **Exemplo 1.6.1** Provar por absurdo que:
Teorema: Não existe um maior primo.
Prova(Euclides): Suponha que existe um maior primo que vamos chamá-lo p. Como todos os primos são maiores do que 1 e nenhum é maior do que p, então devemos ter um número finito deles. Seja r o número

$$r = 1.2.3.5.7.\cdots.p$$

Afirmamos que $r+1$ é primo. De fato, ele não divisível por nenhum dos primos $2, 3, \cdots, p$. Mas, então $r+1 > p$, o que é um absurdo, pois estamos supondo que p é o maior primo. Logo, não existe um maior primo.

•• **Exercício 1.6.2** Provar que:
1. x é par se, se somente se, x^2 é par.
2. $\sqrt{2}$ é irracional.
3. se n^2 é par, então n é par.
4. Dar três provas diferentes para a seguinte fato: se $x^2 - 3x + 2 < 0$, então $x > 0$.

Capítulo 2

Relações e funções

Uma operação binária sobre conjuntos combina os elementos de dois conjuntos dados para produzir um elemento do terceiro conjunto. Trataremos aqui apenas de operações binárias.

2.1 Introdução

Definição 2.1.1 *Uma operação definida em $E \times F$ e assumindo valores em G é qualquer aplicação*

$$* : E \times F \to G.$$

Quando $E = F = G$, a operação $*$ é dita uma operação em E, ou uma lei de composição interna sobre E.

Definição 2.1.2 *Uma lei de composição externa sobre E é qualquer aplicação*

$$K \times E \to E,$$

os elementos de K são chamados escalares.

• **Exemplo 2.1.3** *a) A operação multiplicação em* $\mathbf{R}$. *Associa a cada par* (a,b) *de reais um único número* $a.b$
b) A operação de soma de naturais.
c) Seja A *um conjunto não vazio e* $E = \{f; f : A \to A \text{ é função}\}$. *Vamos definir uma operação sobre* E, *a composição usual de funções:*

$$* : E \times E \to E,$$

dada por $*(f,g) = f \circ g$.
d) Seja $\mathcal{F} = \{P, P \text{ é proposição }\}$. *Os conectivos* $\wedge$ *e* $\vee$ *sào operações sobre* $\mathcal{F}$.
e) A união e a intersecção de dois conjuntos do universo $\mathcal{U}$ *também são operações sobre* $\mathcal{U}$.

Definição 2.1.4 *Dizemos que a operação* $\Box$ *em* E *é:*
comutativa *se, e somente se,* $x\Box y = y\Box x$, $\forall x, \forall y$, *onde* $x, y \in E$.
associativa *se, e somente se,*

$$x\Box(y\Box z) = (x\Box y)\Box z, \forall x, \forall y, \forall z.$$

Definição 2.1.5 *Dizemos que a operação* $\Box$ *sobre* E *tem um elemento neutro e se,*

$$x\Box e = e\Box x = x, \forall x \in E.$$

• **Exemplo 2.1.6** *a) A operação composição de funções é associativa, não comutativa. O elemento neutro é a função identidade.*
b) A união e a intersecção são associativas e comutaivas.
c) Os operadores $\wedge$ *e* $\vee$ *são associativos e comutativos.*

Teorema 2.1.7 *Se a operação sobre* E *tem um elemento neutro, então ele é único.*

A prova do teorema acima fica como exercício.

Definição 2.1.8 *Seja E um conjunto e $\square$ uma operação sobre E e seja e o seu elemento neutro. Dizemos que $a \in E$ é simetrizável (possui um simétrico) para a operação $\square$ se existe $a' \in E$ tal que*

$$a \square a' = a' \square a = e.$$

Neste caso, dizemos que a', também denotado por a^{-1}, é o simétrico de a.

Teorema 2.1.9 *Seja E um conjunto com uma operação $\square$ associativa sobre E e e o elemento neutro de E. Se $a \in E$ é simetrizável, então seu simétrico é único.*

Definição 2.1.10 *Sejam $*$ e $\square$ duas operações binárias sobre E. Então, dizemos que $*$ é distributiva em relação a operação $\square$ se:*

$$x * (y \square z) = (x * y) \square (x * z), \forall x, y, z \in E \ esq.$$

$$(y \square z) * x = (y * x) \square (z * x), \forall x, y, z \in E \ dir.$$

• **Exemplo 2.1.11** *a) A multiplicação e a adição nos reais se distribuem.*
b) A união e intersecção de conjuntos se distribuem.

•• **Exercício 2.1.12** .

1. Dizemos que o conjunto A está contido em B, e representamos por $A \subset B$, se todo elemento de A também é elemento de B. Isto é,

$$A \subset B \Longleftrightarrow \forall x [x \in A \Longrightarrow x \in B]$$

Dizemos A é subconjunto próprio de B se $A \subset B$ com $A \neq B$.
Prove que $A = B$ se, e somente se, $A \subset B$ e $B \subset A$. Seugestão: prova direta.
2. Prove que para todo conjunto A, tem-se $A \subset A$.

3. Se A, B, C são conjuntos tais que $A \subset B$ e $B \subset C$, então $A \subset C$.
4. Mostre que o conjunto vazio está contido em qualquer conjunto.
5. Mostre que existe um unico conjunto vazio.
6. Vamos rever algumas definições.

união : A uniao de A e B é: $A \cup B = \{x|x \in A \vee x \in B\}$
interseção : $A \cap B = \{x|x \in A \wedge x \in B\}$
diferença : $A - B = \{x|x \in A \wedge x \notin B\}$.
Prove que as operações de conjuntos união e intersecção são associativas e comutativas.

Teorema 2.1.13 a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
c) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
d) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

A demonstração é um exercicio fácil.

2.2 Conjuntos definidos por Indução

Podemos definir um conjunto explicitamente enumerando seus elementos (quando possível) ou implicitamente usando um predicado. Mas predicados nem sempre dão um meio conveniente de caracterizar um conjunto infinito. Uma definição indutiva de um conjunto consiste de três partes:

- A cláusula básica: estabelece que certos elementos estão no conjunto.
- A cláusula indutiva: estabelece a maneira com que estes elementos são combinados para obter um novo elemento.
- A cláusula extremal : afirma que todo elemento do conjunto é obtido por meio da aplicação finita das duas cláusulas anteriores.

• **Exemplo 2.2.1** O conjunto dos números naturais.
1) (Base) $0 \in \mathbf{N}$.
2) (Indução) Se $n \in \mathbf{N}$, então $(n+1) \in \mathbf{N}$.
3) (Extremal) Se $S \subseteq \mathbf{N}$ e satisfaz 1) e 2), então $S = \mathbf{N}$.

• **Exemplo 2.2.2** A sequência de Fibonacci.
1) $a_0 = 0$ e $a_1 = 1$.
2) $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \quad \forall n \in \mathbf{N}$
3) Todo elemento da Sequência de Fibonacci é construído usando um número finito dos passos 1) e 2).

Determine a_5 e a_7.

2.3 Provas Indutivas

Definições por indução não só dão um método para definir conjuntos infinitos,, mas também forma a base de uma poderosa técnica para provar teoremas.

Se o conjunto é finito, a afirmação da forma

$$\forall x P(x)$$

pode ser estabelecida por meio de uma prova exaustiva por casos. Mas para conjutos infinitos outro processo deve ser usado. Provas por indução são provas de afirmações universalmente quantificadas onde o universo de discurso é um conjunto definido indutivamente.

Suponha que desejamos estabelecer que todos os elementos de um conjunto definido indutivamente S tem a propriedade P. Uma prova por indução consiste comumente de duas partes correspondendo às cláusulas básicas e e de indução da definição de S :

1. O passo básico consiste em estabelecer que $P(x)$ é verdade para todo

elemento $x \in S$ especificados na cláusula básica da definição de S.
2. O passo de indução estabelece que cada elemento construído usando a cláusula de indução da definição de S tem a propriedade P se todos os elementos usados na sua construção tem a propriedade P.

Não existe um passo na prova indutiva que corresponda a condição extremal da definição de S, mas uma prova indutiva estabelece que todo elemento construido segundo a definição tem propriedade P e pela condição extremal o conjunto destes elementos deve coincidir com S.

• **Exemplo 2.3.1** Para todo natural n

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Defina

$$P(n) : \sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2},$$

devemos provar que:
1. (passo básico) $P(0)$ é verdadeiro.
2. (passo indutivo) provar que $\forall n[P(n) \Longrightarrow P(n+1)]$.

Fazer os detalhes como exercício.

Veremos agora os dois princípios de indução que são muito usados em demonstrações de propriedades de conjuntos definidos por indução.

Teorema 2.3.2 (Princípio da indução) *Consideremos a proposição nos inteiros $\forall n\, P(n)$. Suponha que*

1) existe $n_0 \in \mathbf{Z}$ tal que $P(n_0)$ é verdadeira,

2) para todo $n \geq n_0$, se $P(n)$ é verdadeira, então $P(n+1)$ é verdadeira. Então, $P(n)$ é verdadeira para todo inteiro $n \geq n_0$.

Demonstração: Seja $S = \{n \in \mathbf{Z}; n \geq n_0$ e $P(n)$ é falso $\}$. Queremos provar que S é vazio. Suponha $S \neq \emptyset$, como S é limitado inferiormente, existe um menor elemento $a \in S$. Logo, $a \geq n_0$ e por 1) $n_0 \notin S$ e assim $a \neq n_0$. Segue que $a > n_0$ e portanto $(a-1) \geq n_0$. Logo, $(a-1) \notin S$ e portanto $P(a-1)$ é verdadeira. De 2) segue que $P(a)$ é verdadeira, o que é uma contradição. $\square$

Veremos a seguir uma generalização deste resultado.

Teorema 2.3.3 (Segundo princípio de indução) *Seja m um inteiro e $P(n)$ uma proposição para cada $m \leq n \in \mathbf{Z}$. Suponhamos que*
1) $P(m)$ é verdadeira,
2) para todo inteiro $n \geq m$, se $P(r)$ é verdadeira para qualquer que seja r tal que $m \leq r < n$, então $P(n)$ é verdadeira.
Então, a proposição é verdadeira para todo $n \geq m$.

Demonstração: Seja

$$S = \{n \in \mathbf{Z}, n \geq m; P(n) \text{ é falsa } \}.$$

Queremos provar que S é vazio. Suponha que S não é vazio e seja n_0 o seu menor elemento. Segue que $P(n_0)$ é falso. Por 1) $n_0 > m$ e portanto a afirmação é verdadeira para todo r satisfazendo $m \leq r < n_0$. Por 2) concluímos que $P(n_0)$ é verdadeira, uma contradição.$\square$

•• Exercício 2.3.4 .

1.Provar por indução.
a) $\sum_{i=0}^{n} r^i = \begin{cases} (n+1), & \text{se } r = 1, \\ \frac{r^{n+1}-1}{r-1}, & \text{se } r \neq 17 \end{cases}$
b) Se um conjunto S tem n elementos então S tem 2^n subconjuntos.
c) $\sum_0^n (2i+1) = (n+1)^2$.

2.4 Relações

Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ conjuntos. O produto cartesiano entre os conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, denotado por

$$A \times A_2 \times A_3 \times \ldots \times A_n \text{ ou } \prod_1^n A_i$$

é o conjunto de todas as n-uplas $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, onde cada $a_i \in A_i$. Isto é,

$$X_i^n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n), a_i \in A_i\}.$$

Note que a ordem é importante.

• **Exemplo 2.4.1** Sejam $A = \{1, 2\}$, $B = \{m, n\}$ e $C = \emptyset$. Então:
$A \times B = \{(1, m), (1, n), (2, m), (2, n)\}$
$A \times C = \emptyset$.

Teorema 2.4.2 Sejam A, B e C conjuntos, então:
a) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.
b) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.
c) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.
d) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$.

A demonstração fica como exercício.

Definição 2.4.3 Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ conjuntos. Uma relação n-aria R em $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ é qualquer subconjunto deste produto cartesino.

Se $R = \emptyset$ então a relação é vazia. Se R coincide com o produto, então R é chamada relação universal.

Se $A_i = A, \forall i = 1, 2, \ldots, n$, então R é chamada relação n-aria em A. Se $n = 1, 2, 3$, R é dita unária, binária e ternária.

Definição 2.4.4 Sejam R_1 e R_2 relações em $\prod_1^n A_i$ e em $\prod_1^m B_i$, respectivamente. Dizemos que $R_1 = R_2$ se e, somente se, $n = m$, $A_i = B_i$ para todo $1 \leq i \leq n$ e R_1 e R_2 são iguais como conjuntos.

Seja R uma relação binária em $A \times B$. O conjunto A é chamado domínio e B chamado codomínio. Se o par $(a, b) \in R$ usaremos a notação aRb, e se $(a, b) \notin R$ denotaremos isto por $a \not R b$.

Definição 2.4.5 Seja R uma relação binária sobre A.
a) R é reflexiva se xRx para todo $x \in A$.
b) R é irreflexiva se $(x, x) \notin R$ para todo $x \in A$.
c) R é simétrica se xRy implicar que yRx para todo $x, y \in A$.
d) R é anti-simétrica se xRy e yRx juntos implicar que $x = y$, para todo $x, y \in A$.
e) R é transitiva se xRy e yRz juntos implicarem que xRz, para todo $x, y, z \in A$.

• **Exemplo 2.4.6** a) A relação de igualdade é reflexiva sobre qualquer conjunto. Também é simétrica e anti-simétrica.
b) A relação "menor ou igual"sobre os inteiros é reflexiva e não irreflexiva. Também é anti-simétrica e não é simétrica.
c) A relação "menor que"sobre os inteiros é irreflexiva. Também é anti-simétrica.Certifique-se de que entendeu este exemplo.
d) As relações $<$ e $\leq$ sobre os inteiros são transitivas.

•• **Exercício 2.4.7** *1. Se R é a relação é vazia, classifique-a.*
2.Representar graficamente a relação

$$R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (1, 3), (3, 1)\}.$$

2.5 Composição de Relações

Sejam R_1 uma relação em $A \times B$ ou de A em B e R_2 uma relação em $B \times C$ ou de B em C. Definimos uma nova relação em $A \times C$ chamada de composta de R_2 e R_1, denotada por $R_2 \circ R_1$ ou R_2R_1 (olha a ordem!) por:

$$R_2R_1 = \{(a,c) \in A \times C; \exists b, b \in B; aR_1b \text{ e } bR_2c\}$$

Faça um gráfico para ilustar.

• **Exemplo 2.5.1** a) Sejam R_1e R_2 relações em $\mathbf{R}^+$ dadas por:

$$xR_1y \Longleftrightarrow y = x^2 \text{ e } aR_2b \Longleftrightarrow b = \sqrt{a}$$

Então:

$$R_2R_1 = \{(a,c) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+; \exists b \in \mathbf{R}^+ \text{ com } b = a^2 \text{ e } c = \sqrt{b}\}$$

$$R_2R_1 = \{(a,a) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+\}.$$

b) Sejam $aR_1b \Longleftrightarrow b = 2a$ e $xR_2y \Longleftrightarrow y = 3x$, com a, b, x, y inteiros.

$$R_2R_1 = \{(a,c) \in Z \times Z, \exists b \in Z; aR_1b \text{ e } bR_2c\}$$

$$R_2R_1 = \{(a,6a) \in Z \times Z, a \in Z\}.$$

Definição 2.5.2 Seja R uma relação em $A \times B$, o conjunto

$$R^{-1} = \{(b,a) \in B \times A; aRb\}$$

é claramente uma relação binária em $B \times A$. Esta relação é chamada **inversa** de R ou a recíproca de R.

Lema 2.5.3 Prove que se R_1, R_2, R_3 são relações de $A \times B$, de $B \times C$ e de $C \times D$, respectivamente, prove que $(R_3R_2)R_1 = R_3(R_2R_1)$.

Demonstração: Devemos mostraremos que

a) $(R_3R_2)R_1 \subseteq R_3(R_2R_1)$

b) $R_3(R_2R_1) \subseteq (R_3R_2)R_1$.

Faremos apenas a parte a), pois a parte b) é análoga.
Seja $(a, d) \in (R_3R_2)R_1$. Então, existe $b \in B$ tal que $(a, b) \in R_1$ e $(b, d) \in (R_3R_2)$. Logo, como $(b, d) \in R_3R_2$, existe $c \in C$ tal que $(b, c) \in R_2$ e $(c, d) \in R_3$. Portanto, $(a, b) \in R_1$ e $(b, c) \in R_2$ e assim $(a, c) \in (R_2R_1)$. Segue que $(a, c) \in (R_2R_1)$ e $(c, d) \in R_3$. Logo, $(a, d) \in R_3(R_2R_1)$.

Definição 2.5.4 Seja R uma relação binária em A. Dizemos que R é uma relação de ordem parcial se:

1i) R é reflexiva,

2i) R é anti-simétrica,

3i) R é transitiva.

Se R é uma relação de ordem parcial em A dizemos que A é parcialmente ordenado por R.

São exemplos:
a) A relação $\leq$ sobre os inteiros,
b) Sobre as partes de um conjunto não vazio A, defina XRY se e, somente se, $X \subseteq Y$. R é uma relação de ordem parcial sobre as partes.

Definição 2.5.5 Dizemos que uma relação de ordem parcial R sobre o conjunto A é uma relação de ordem total sobre A se:

$$aRb \text{ ou } bRa, \text{ para todo } a, b \in A.$$

A relação $\leq$ é uma relação de ordem total sobre os inteiros, sobre os racionais e sobre os reais. A relação $XRY \iff X \subseteq Y$ não é uma relação de ordem total sobre as partes de um conjunto A se A tem mais de um elemento.

Definição 2.5.6 Seja A um conjunto parcialmente ordenado pela relação R e $B \subseteq A$.
1i) um elemento $b \in B$ é um maior elemento de B se para todo $b' \in B$, tem-se $b'Rb$.
2i) um elemento $b \in B$ é um menor elemento de B se para todo $b' \in B$, tem-se bRb'.

• **Exemplo 2.5.7** a) Seja $A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ e R a relação $XRY \iff X \subseteq Y$.
Se $B = \{\{a\}\}$, então $\{a\}$ é um menor elemento.
Também $\{a\}$ é um maior elemento. Se $B = \{\{a\}, \{b\}\}$, então B não tem um maior elemento e nem um menor elemento.
Se $B = \{\emptyset, \{a\}\}$, então $\{a\}$ é um maior elemento e $\emptyset$ é um menor elemento.
b) Seja A o conjunto dos inteiros, R a relação dada por $aRb \iff a \leq b$, e $B = \mathbf{N}$. Então B tem um menor elemento o zero, mas não tem um maior elemento.

Definição 2.5.8 Uma relação de ordem R sobre A é uma boa ordem se:
a) R é uma relação de ordem total.
b) Todo subconjunto não vazio de A tem um menor elemento.

Se R é uma boa ordem sobre o conjunto A então o conjunto é dito bem ordenado.

• **Exemplo 2.5.9** a) O conjunto dos naturais munido da relação de ordem $\leq$ é um conjunto bem ordenado.

De fato, suponha que exista $S \subseteq \mathbf{N}$, que não tem um menor elemento. Concluiremos que $S = \emptyset$. Devemos provar que todo elemento de S é pelo menos tão grande quanto qualquer natural, isto é,

$$\forall n \forall x [x \in S \Longrightarrow n \leq x].$$

Como nenhum natural é maior ou igual que todo natural, segue que $x \in S$ é falso, isto é, $S = \emptyset$. Para provarmos isto vamos usar a indução sobre n. 1i) (Basica)$\forall x[x \in S \Longrightarrow 0 \leq x]$ é verdade pois $S \subseteq \mathbf{N}$.
2i) (Hip. indução) Suponha que $\forall x[x \in S \Longrightarrow n \leq x]$ é verdade para um natural arbitrário n. Não pode acontecer que $n \in S$, pois isto violaria a hipótese de que S não tem um menor elemento. Portanto, segue

$$\forall x[x \in S \Longrightarrow n < x]$$

é verdade. Concluimos que

$$\forall x[x \in S \Longrightarrow (n+1) \leq x]$$

é verdade. Isto estabelece o passo indutivo e portanto que se S não tem um menor elemento, então $S = \emptyset$.
2i) Os inteiros com a ordem $\leq$ não é bem ordenado.

Definição 2.5.10 Uma relação binária R sobre A é uma relação de equivalência se:

1i) R é reflexiva,

2i) R é simétrica,

3i) R é transitiva.

• **Exemplo 2.5.11** a) Toda relação universal sobre um conjunto A é de equivalência.
b) Seja k um inteiro positivo e a, b inteiros quaisquer. A relação R definida por :

$$aRb \Longleftrightarrow a - b = kn, \text{ para algum } n \text{ inteiro },$$

é relação de equivalência sobre os inteiros. Denotamos aRb por

$$a \equiv b (\mod k)$$

e le$\hat{}$se "a é equivalente a b modulo k. Denotamos por $[a]_R = \{x \in A; xRa\}$ ou por $\overline{a}$ a classe de equivalência do elemento $a \in A$.

Se tomarmos $k = 2$ neste exemplo teremos a seguinte relação

$$aRb \Longleftrightarrow a - b \text{ é par}$$

de equivalência em $\mathbb{Z}$. Note que se a e b são pares, então aRb. Se a e b são ímpares, então $a-b$ é par e portanto aRb. Se a é par e b é ímpar, então $a-b$ é ímpar e não estão relacionados. Veja que esta relação "separa"o conjunto $\mathbb{Z}$ em dois subconjuntos: os inteiros pares e os inteiros ímpares.

Uma das maneiras mais poderosas de compreender os objetos ou elementos de um conjunto é classificando-os. Como classificar? Pode-se procurar características comuns entre os elementos ou simplesmente relacionar livremente um com outro. Em todas as áreas do conhecimento existe uma busca insessante por semelhanças entre os objetos.

O que existe em comum entre um rato e uma borboleta? São seres vivos. Oba!, já temos algo de semelhante. Ser vivo ainda é uma classe muito ampla. Como ficam as algas marinhas? A Zoologia se ocupa de estudar as classes dos seres vivos. Por outro lado, entre um rato e um ser humano existe algo em comum: sào ambos mamíferos. Tente definir o que é ser mamífero.

Existem muitos exemplos onde a necessidade de classificar é exigida. A própria noção de família com seus graus de parentescos é uma busca pelas classificação. Na Matemática, como não poderia deixar de ser diferente, quase todos os problemas se resumem em é tentar classificar objetos.

Dentre as relações em Matemática, uma das mais importantes é a relação de equivalência. Dado um conjunto A e uma relação de equivalência R se pudermos identificar graficamente R dentro de $A \times A$ teremos que a forma de R deve ser simétrica com relação a diagonal e deve evidentemente conter a diagonal. Veja a figura abaixo.

•• **Exercício 2.5.12** Encontre todos os inteiros a tais que $a \equiv 3 \mod 5$.

Agora provaremos que uma relação de equivalência sobre um conjunto A particiona A em subconjuntos não vazios e dois a dois disjuntos.

Teorema 2.5.13 Seja R uma relação de equivalência sobre A. Então:
a) $[a] = [b]$ ou $[a] \cap [b] = \emptyset$.
b) $\cup_{x \in A}[x] = A$.

Prova:
a) Suponhamos A não vazio e que $[a] \cap [b] \neq \emptyset$. Seja $c \in [a] \cap [b]$. Então, $c \in [a]$ e $c \in [b]$, assim cRa e cRb. Como R é simétrica, segue que aRc, como R é transitiva segue que aRb.
Agora considere um elemento $x \in [a]$. Então xRa e pela transitividade de R tem-se

$$xRa \text{ e } aRb \Longrightarrow xRb, \text{ logo } x \in [b].$$

Portanto, $[a] \subseteq [b]$. Analogamente, provamos que $[b] \subseteq [a]$. Concluimos assim que $[a] = [b]$ ou $[a] \cap [b] = \emptyset$.
b) É claro que a união das classes está contido em A. Basta provar que $A \subseteq \cup_{x \in A}[x]$. Seja $c \in A$, então $c \in [c] \subset \cup_{x \in A}[x]$. Logo, $A \subset \cup_{x \in A}[x]$. Isto conlui a prova.

•• **Exercício 2.5.14** A intersecção de duas relações de equivalência sobre um conjunto A é ainda uma relação de equivalência.

Definição 2.5.15 Uma partição Π de um conjunto não vazio A é uma coleção de subconjuntos não vazios de A tais que:
1i) $\forall S \in \Pi$ e $\forall T \in \Pi, S = T$ ou $S \cap T = \emptyset$.
2i) $A = \cup_{S \in \Pi} S$. Em outras palavras, uma partição Π é uma coleção não vazia de subconjuntos não vazios dois a dois disjuntos.

• **Exemplo 2.5.16** a) Se A é o conjunto dos inteiros e $\Pi = \{P_1, P_2\}$, onde

$$P_1 = \{x; x \text{é inteiro e par }\}$$

$$P_2 = \{x; x \text{ é inteiro e impar }\}$$

b) Seja A um conjunto não vazio e R uma relação de equivalência sobre A. O conjunto $\Pi = \{[a]; a \in A\}$ é uma partição de A.
c) Seja A o conjunto dos inteiros e R a relação $aRb \Longleftrightarrow a \equiv b \mod 3$. Seja $\Pi = \{[0].[1], [2]\}$, então Π é uma partição.

Vimos que dada uma relação de equivalência em um conjunto A, a relação induz uma partição sobre A. Agora vamos observar que dada uma partição Π de um conjunto A não vazio, esta partição induz uma relação de equivalência sobre A. De fato, dado $a \in A$, existe um único $X_a, a \in X_a \subset A$, defina R por:

$$aRb \Longleftrightarrow X_a = X_b.$$

Esta relação é chamada relação induzida pela partição Π.

•• **Exercício 2.5.17** Fazer os detalhes da observação acima.

Definição 2.5.18 Seja R uma relação de equivalência sobre $A \neq \emptyset$. O conjunto quociente, A/R, é a partição $\Pi = \{[a], a \in A\}$.
O conjunto quociente A/R é também chamado "A módulo R"ou partição induzida por R.

• **Exemplo 2.5.19** .

a)Seja $I = [0, 1]$ e $Q = I \times I$. Vamos definir uma relação de equivalência R em Q por:
1i) se $x \neq 0$ e $x' \neq 1$, defina

$$(x, y)R(x', y') \Longleftrightarrow x = x' \text{ e } y = y'.$$

2i)se $x = 0$ e $x' = 1$, defina

$$(0, y)R(1, y') \iff y = y'.$$

O conjunto quociente pode ser identificado ao um cilindro.

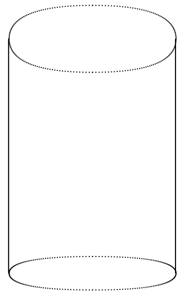


Figura 2.5.1: Cilindro

b)Seja $I = [0, 1]$ e $Q = I \times I$, R a relação de equivalência sobre Q dada por:
1i)$(0, y)R(1, y')$
2i)$(x, 0)R(x', 1)$
3i)$(x, y)R(x', y') \iff x = x'$ e $y = y'$, se $x \neq 0, 1$ e $y \neq 0, 1$.

O conjunto quociente pode ser identificado a um toro.

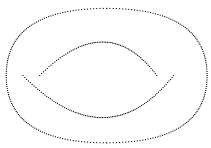


Figura 2.5.2: Toro

c) Seja V um espaço vetorial e S um subespaço de V. Considere a seguinte relação de equivalência em V

$$uRv \iff (u - v) \in S.$$

As classes de equivalência são "retas "de V "paralelas"a S.

•• **Exercício 2.5.20** *1. Mostre que dim*$(\frac{V}{S})$ *=dimV-dimS.*

2.6 Aplicações

Definição 2.6.1 Sejam A e B dois conjuntos. Uma aplicação ou função f de A em B, denotada por $f : A \to B$, é uma relação em $A \times B$ tal que para todo $a \in A$, existe um único $b \in B$ tal que afb. Se afb, é comum escrever $f(a) = b$.

Em outras palavras:
1i) todo elemento de A ocorre como primeira componente de um par ordenado de f.
2i) se $f(a) = b$ e $f(a) = c$, então $b = c$.

Os conjuntos A e B são chamados, respectivamente, domínio e contradomínio. A imagem da função $f : A \to B$ é definida por:

$$Im(f) = \{b \in B; \exists a \in A \text{ onde } afb.\}$$

Isto é, $Im(f) = \{f(a); a \in A\}$.

• **Exemplo 2.6.2** a) Se $A = B = \mathbf{R}$ e $xfy \iff x^2 = y^2$, então f não é função. De fato, se xfy e xfy' então $|y| = |y'|$.
b) Se A é conjunto vazio e B é qualquer, então a relação vazia é uma função de A em B, por vacuidade. Se $A \neq \emptyset$ e B é vazio, então a única relação de A em B é a relação vazia, mas esta relação não é função.

Definição 2.6.3 Duas funções f e g são iguais se, e somente se, seus domínios e contradomínios são iguais e para todo elemento a de seus domínios tem-se $f(a) = g(a)$.

Teorema 2.6.4 Sejam $g : A \to B$ e $f : B \to C$ são funções, então a composta $f \circ g$ é uma função de A em C, e $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, para todo $x \in A$.

Demonstração: É claro que $f \circ g$ é uma relação em $A \times C$. Resta provar que esta relação é função. Para isto devemos provar que dado $a \in A$, existe um único $c \in C$ tal que $(f \circ g)(a) = c$.
Como g é função, para cada $a \in A, \exists!\ b \in B | g(a) = b$. Como f é função, para este $b \in B$ dado existe um único $c \in C$, tal que $f(b) = c$. Logo, tem-se $(a, b) \in g$ e $(b, c) \in f$. Segue que $(a, c) \in f \circ g$. Observe que c é unicamente determinado, assim $c = (f \circ g)a = f(b) = f(g(a))$. Isto termina a prova.

Definição 2.6.5 Considere o diagrama abaixo.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "g"'] & & C \arrow[dl, "f"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

Dizemos que o diagrama comuta se $h(x) = f \circ g(x), \forall x$.

O teorema acima diz que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f \circ g"] \arrow[dr, "g"'] & & C \arrow[dl, "f"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

Já vimos que a composta de funções é uma função e que a composta de relações é associativa. Logo, a composição de funções é associativa. Podemos também ver este fato através do diagrama.

Teorema 2.6.6 A composição de funções é associativa, isto e, $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

Para a prova considere o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h"] & B \arrow[d, "g"] \\ D & C \arrow[l, "f"] \end{tikzcd}$$

Definição 2.6.7 *Uma função $f : A \to B$ é injetora se $f(a) = f(b)$ implicar $a = b$. Ou equivalentemente, se $a \neq a'$ implicar que $f(a) \neq f(a')$.*

A função f é sobrejetora se para cada $binB$ existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Isto é, $f(A) = B$.

Uma função que é injetora e sobrejetora é denominada bijetora.

Teorema 2.6.8 *Sejam $g : A \to B$ e $f : B \to C$ duas funções.*
a) Se f e g são injetoras, então $f \circ g$ é injetora.
b) Se f e g são sobrejetoras, então $f \circ g$ é sobrejetora.
c) Se f e g sào bijetoras, então $f \circ g$ é bijetora.

Demonstração: a) Suponha que $(f \circ g)(a) = (f \circ g)(a')$. Isto é, $f(g(a)) = f(g(a'))$. Logo, como f é injetora, temos que $g(a) = g(a')$. Novamente como g é injetora temos que $a = a'$.
b) Seja $c \in C$. Como f é sobrejetora existe $b \in B$ tal que $f(b) = c$ e como g é sobrejetora existe $a \in A$ tal que $g(a) = b$. Logo, dado $c \in C$ existe $a \in A$ tal que $(f \circ g)(a) = c$.
c) Decorre imediatamene de a) e de b).$\square$

Teorema 2.6.9 *Sejam $g : A \to B$ e $f : B \to C$ duas funções.*
a) Se $(f \circ g)$ é sobrejetora, então f é sobre.
b) Se $(f \circ g)$ é injetora, então g é injetora.
c) Se $(f \circ g)$ é bijetora, então f é sobrejetora e g é injetora.

Demonstração: Admita que $(f \circ g)$ seja sobrejetora. Então dado $c \in C$ existe $a \in a$ tal que $(f \circ g)(a) = c$. Isto é, existe $b = g(x)$ tal que $f(b) = c$, mostrando que f é sobrejetora.
Para provar a segunda parte, suponha que $a \neq a'$. Então, como $(f \circ g)$ é injetora segue que $(f \circ g)(a) \neq (f \circ g)(a')$. Se $g(a) = g(a')$, então como f é função teríamos $(f \circ g)(a) = (f \circ g)(a')$ o que contraria fato da composta ser injetora. Logo, $g(a) \neq g(a')$, mostrando que g é injetora. A última parte é consequência imediata de a) e b). $\square$

Definição 2.6.10 *Se $f : A \to B$ é função bijetora, a função inversa de f, denotada por f^{-1}, é a relação recíproca de f.*

Teorema 2.6.11 *Se $f : A \to B$ é função bijetora, então f^{-1} é função bijetora.*

Demonstração: Como f é sobrejetora, cada $b \in B$ aparece num par $(a, b) \in f$ e portanto $(b, a) \inf^{-1}$. Como f é injetora, para cada $b \in B$ existe um único $a \in A$ tal que $(a, b) \in f$. Logo, existe um úncio $a \in A$ tal que $(b, a) \in f^{-1}$. Isto mostra que f^{-1} é função. Para provar que f^{-1} é bijetora observamos que $f^{-1} \circ f$ é sobrejetora e $f \circ f^{-1}$é injetora e portanto segue que f^{-1} é sobrejetora e injetora.$\square$

•• **Exercício 2.6.12** *1. Seja $f : A \to B$ e $X, Y \subseteq A$. Prove que:*

a) $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$

b) $X \subseteq Y \Longrightarrow f(X) \subseteq f(Y)$,

c) $f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cap f(Y)$

d) $f(X) - f(Y) \subseteq f(X - Y)$.

2. Prove que se $f : A \to B$ e $X, Y \subseteq B$, então:

a) $X \subseteq Y \Longrightarrow f^{-1}(X) \subseteq f^{-1}(Y)$

b) $f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$

c) $f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$

d) $f^{-1}(X - Y) = f^{-1}(X) - f^{-1}(Y)$.

3.Provar por indução:

a) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i^3 = [\frac{1}{2}n(n+1)]^2$

b) $\displaystyle\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$ $,n \geq 1$.

c) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$.

d) $\displaystyle\sum_{0}^{n} i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

7. **(A torre de Hanoi)** *Tem-se* n *discos de diâmetros decrescentes em volta de uma haste* A*, dispõe-se de outras duas hastes* B *e* C*. Veja a figura 2.6.12.*

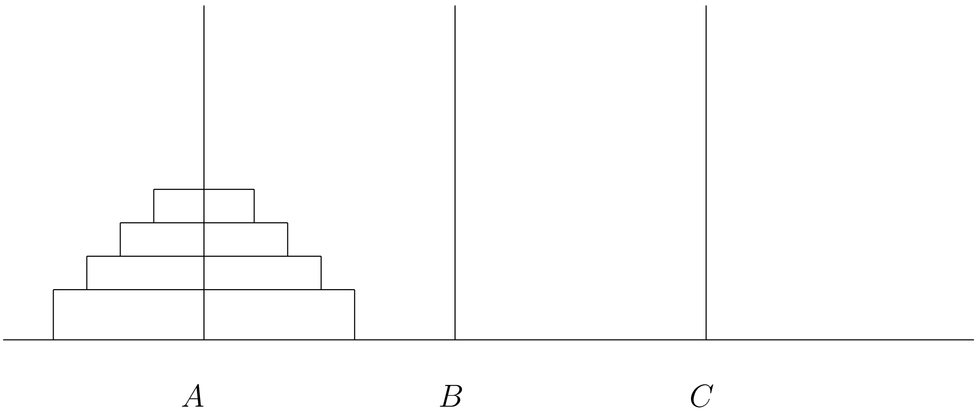


Figura 2.6.3: Situação Inicial

O problema consiste em transferir toda a pilha de discos para uma das hastes, deslocando um disco de cada vez para qualquer haste, de modo que nenhum disco seja colocado sobre o outro de diâmetro menor.

Algumas perguntas surgem imediatamente:

a) O jogo tem solução? Como resolver?

b) O jogo admite solução para todo n?

c) Qual o número mínimo de movimentos para se conseguir a solução?

A resposta para a primeira pergunta é afirmativa: o jogo admite solução para todo n*. Vamos provar por indução.*

Seja $P(n)$*: o jogo com* n *discos tem solução. Seja* S *o conjunto dos números naturais que tornam* $P(n)$ *verdadeira. Claramente* $P(0)$ *é verdadeiro. Supondo que* $P(n)$ *é verdadeira, vamos supor que temos um jogo com* $(n+1)$ *discos. Veja figura 2.6.12.*

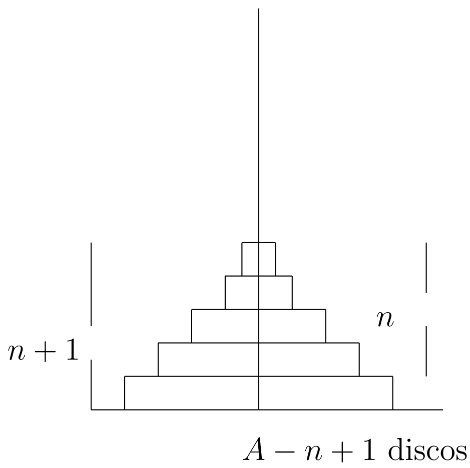


Figura 2.6.4: Problema com $n+1$ discos

Resolve-se o problema com os n *discos superiores. Obtém-se a seguinte situação dada pela figura 2.6.12:*

A seguir põe-se em C *o que está em* A*, veja figura 2.6.12.*

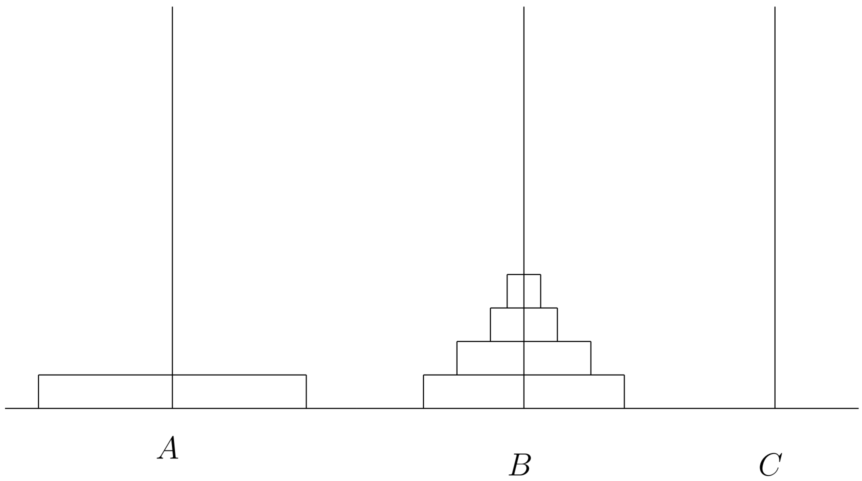


Figura 2.6.5: O problema foi resolvido com n discos

Finalmente resolve-se novamente o problema com n discos para colocar a pilha da haste B para a haste C e o problema dos $(n+1)$ está resolvido. Fica provado assim a possibilidade de solução do jogo para um número qualquer de discos. Segue que $S = N$.

Para resolver o problema com $(n+1)$ discos tivemos que resolver o problema com n discos duas vezes. Se J_n é o menor número de movimentos para resolver o problema com n discos, então $J_{n+1} = 2J_n + 1$, pois movemos uma peça a mais na última jogada.

AFIRMAÇÃO: $J_n = 2^n - 1$.
Por inspeção: $J_1 = 1$, $J_2 = 3 = 2^2 - 1$ e $J_3 = 7 = 2^3 - 1$. A demonstração é por indução, é um exercicio.

Conta a lenda deste jogo, que há muitos séculos num templo oriental teriam sido erguidas duas colunas de prata e uma de ouro. Ao redor de uma das colunas de prata haviam 100 discos perfurados, com raios decrescentes, colocados uns sobre os outros de modo que o maior disco fique sob o disco de

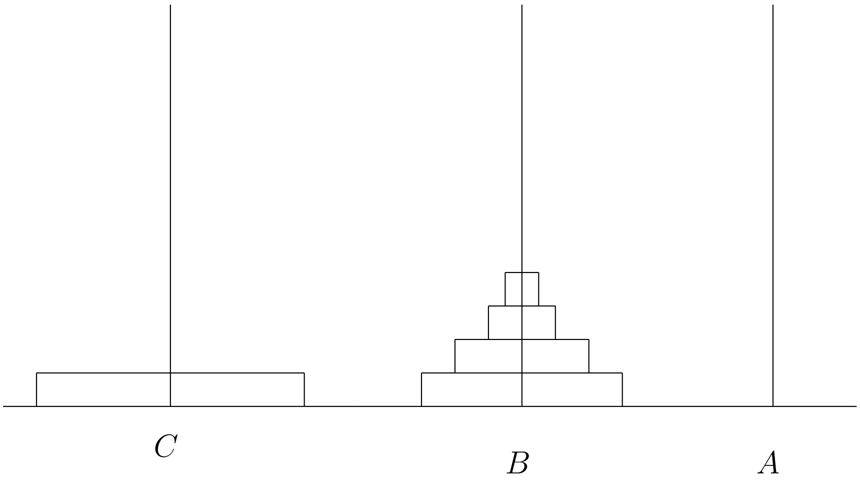


Figura 2.6.6: Resolve-se novamente o problema com n discos

menor raio. Cada devoto que visitasse o templo deveria mover um disco de uma coluna para a outra respeitando as regras do jogo. Quando todos os 100 discos estivessem sido transferidos para a coluna de ouro o mundo acabaria.

Se cada segundo um devoto movesse um disco, o tempo mínimo para que ocorresse a tragédia seria $2^{100} - 1$ *segundos o que dá aproximadamente 300* $\times\ 10^{18}$ *séculos.*

Capítulo 3

Idéias topológicas elementares

3.1 O Espaço $\mathbb{R}^n$

Os elementos do $\mathbb{R}^n$ são $n-$uplas

$$(x_1, \ldots, x_n)$$

onde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são números reais. Usualmente usamos o símbolo $\mathbf{x}$ para a $n-$upla e escrevemos

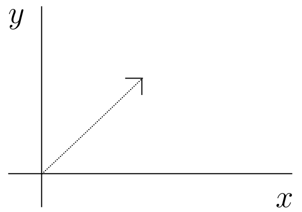
$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n).$$

Os números reais $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são chamados de coordenadas ou componentes de $\mathbf{x}$.

É conveniente referir-se a $\mathbf{x}$ como vetor $\mathbf{x}$. Podemos definir a soma e a multiplicação por escalar real. Quando $a \in \mathbb{R}$ e $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ são vetores, definimos

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) &= (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)\\ a(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= (ax_1, ax_2, \ldots, ax_n).\end{aligned}$$

Estas definições têm uma interpretação geométrica simples que vamos ilustrar no caso $n = 2$. Um vetor $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ pode ser pensado como um ponto no plano. Alternativamente, podemos pensar **x** como uma flecha com ponta no ponto (x_1, x_2) e extremidade na origem do sistema de eixos.



O vetor adição e o vetor multiplicação por escalar podem ser visualizados como abaixo.

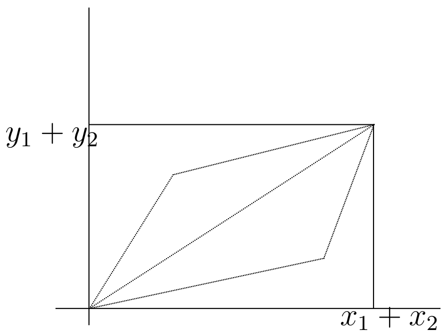


Figura 3.1.1: Adição

Por razões obvias a regra para somar vetores é chamada de regra do paralelograma. A regra do paralelograma aparece comumente em navegação. Suponha que um barco está em O e o navegador deseja chegar ao ponto P. Assumindo a existência de corrente marítima o navegador deve ajustar a sua direção de modo que soma dos vetores velocidades do barco e da corrente dê um vetor resultante com extremidade em P. Veja o desenho.

Defina a diferença de dois vetores e faça um desenho para ilustrar.

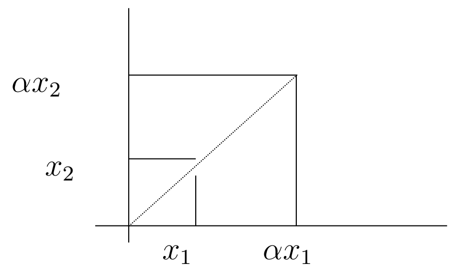


Figura 3.1.2: Multiplicação por escalar

É de verificação imediata que $\mathbb{R}^n$ com a adição usual de vetores é um grupo abeliano. É natural perguntar sobre a possibilidade de multiplicar vetores, isto é, é possível definir o produto de dois vetores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ como sendo um outro vetor $\mathbf{z}$? Quando $n = 1$ não há problema pois podemos identificar $\mathbb{R}^1$ com $\mathbb{R}$. Quando $n = 2$ também não há problema pois podemos identificar $\mathbb{R}^2$ com $\mathbb{C}$. Se $n \geq 3$ não existe uma maneira inteiramene satisfatória. De fato, existe uma multiplicação de vetores para $n = 1, 3$ ou 7. No $\mathbb{R}^3$ introduzimos o produto exterior ou o produto vetorial de dois vetores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, denotado por $\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}$ ou $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$, como sendo o vetor perpendicular a estes dois vetores.

No produto por escalar multiplicamos um escalar por um vetor: se $k \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ então

$$k\mathbf{x} = k(x_1, \ldots, x_n) = (kx_1, \ldots, kx_n).$$

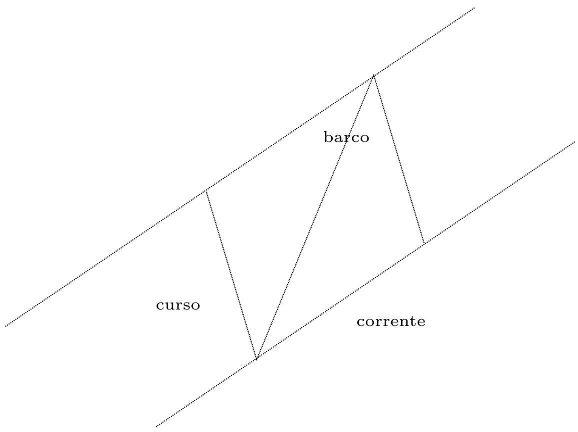


Figura 3.1.3: Barco: lutando contra a correnteza

Definimos agora o produto interno ou produto escalar, se $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ e $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ são vetores do $\mathbb{R}^n$ definimos o produto interno de $\mathbf{x}$ por $\mathbf{y}$ como sendo o número

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i-1}^{n} x_i y_i.$$

A norma euclidiana de um vetor $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ é definida por

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Imaginamos que $\|\mathbf{x}\|$ é o comprimento do vetor $\mathbf{x}$, pois no plano $\mathbb{R}^2$ ou no espaço esta interpretação é correta pelo teorema de Pitágoras. Veja a figura.

O produto interno tem as seguintes propriedades cujas verificações são deixadas como exercício.

a) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \|\mathbf{x}\|^2$,

b) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$,

c) $\langle a\mathbf{x} + b\mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = a\langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + b\langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$.

O significado do produto interno pode ser discutido usando a regra dos cossenos, isto é, num triângulo qualquer, como na figura,

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma).$$

Reescrevendo a regra dos cossenos em termos de vetores, obtemos

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - 2\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|\cos(\gamma).$$

Mas

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 &= \langle \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y}\rangle \\ &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} - \mathbf{y}\rangle - \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y}\rangle \\ &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle - 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y}\rangle \\ &= \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle.\end{aligned}$$

Segue que

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|\cos(\gamma).$$

Assim no plano o ângulo entre os vetores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ é determinado por

$$\frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle}{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|}.$$

Usamos esta igualdade para definir também o ângulo entre dois vetores quaisquer do $\mathbb{R}^n$.

3.2 Algumas desigualdades importantes

Teorema 3.2.1 (Cauchy-Schwarz) *Se* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ *então*

$$|\langle x, \mathbf{y}\rangle| \leq \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|.$$

Demonstração: Seja $t \in \mathbb{R}$, então

$$0 \leq \|\mathbf{x} - t\mathbf{y}\|^2 = \|x\|^2 + t^2\|\mathbf{y}\|^2 - 2t\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle.$$

Logo, a equação quadrática tem no máximo uma raiz real e portanto

$$4\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle^2 - 4\|\mathbf{x}\|^2\|\mathbf{y}\|^2 \leq 0.$$

Teorema 3.2.2 (Desig. triangular) *Se* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ *então*

$$\|x + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|.$$

Demonstração: Como

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle,$$

usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz temos

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|.$$

Portanto,

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2.$$

Corolário 3.2.3 *se* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ *então*

$$\|x - \mathbf{y}\| \geq \|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\|.$$

Demonstração: Segue da desigualdade triangular que

$$\|\mathbf{x}\| = \|(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|.$$

Observação 3.2.4 *O módulo* $|x|$ *de um número real* x *coincide com a norma euclidiana de* x *como vetor em* $\mathbb{R}^1$.

Definição 3.2.5 *(***Distância***) a distância entre dois vetores* $\mathbf{x}$ *e* $\mathbf{y}$ *do* $\mathbb{R}^n$ *é definida por*

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|.$$

Para a interpretação geométrica desta idéia em $\mathbb{R}^n$, é melhor pensar que $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ são pontos na extremidade das flechas. Veja a figura.

Já definimos comprimento e ângulo de vetores do $\mathbb{R}^n$ via norma e produto interno. Dois vetores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ são ortogonais se, e somente se,

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0.$$

Teorema 3.2.6 (**Teorema de Pitágoras**) *Sejam* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. *Então* $\mathbf{x}$ *e* $\mathbf{y}$ *são ortogonais se, e somente se,*

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2.$$

Demonstração: Temos que

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$$

e portanto,

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2$$

se, e somente se, $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$.

O círculo em $\mathbb{R}^2$ com centro em $\mathbf{x}_0$ e raio $r > 0$ é o conjunto da forma

$$S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2; \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| = r\}.$$

Em $\mathbb{R}^3$ o conjunto S representa uma esfera e em $\mathbb{R}^n$ chamamos de hiperesfera.

O interior da esfera, isto é, o conjunto

$$B = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < r\}$$

é chamado uma bola aberta.

No $\mathbb{R}^2$ bolas são discos e no $\mathbb{R}^1$ uma bola é um intervalo aberto limitado $(\mathbf{x} - r, \mathbf{x} + r)$.

Um conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto convexo se e somente se, para quaisquer $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S$ tem-se $\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} \in S$, desde que $\alpha, \beta \geq 0$ e $\alpha + \beta = 1$. Geometricamente, isto significa que dados dois elementos quaisquer de S o segmento de reta que os une está inteiramente contido em S.

3.3 Espaços vetoriais normados

O espaço $\mathbb{R}^n$ é exemplo de um espaço normado.

Para construirmos um espaço vetorial primeiramente precisamos de um conjunto não vazio e em seguida definimos uma operação entre os seus elementos que o torna um grupo abeliano. Esta é a adição de vetores que é claramente uma operação interna indicada por " + ".

Em seguida precisamos de um corpo algébrico para forncer os escalares. Definimos então uma multiplicação por escalares, ou seja, uma operação externa indicada por " $\cdot$ ", de tal maneira que as seguintes propriedades sejam satisfeitas:

a) $\alpha \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha \cdot \mathbf{x} + \alpha \cdot \mathbf{y}$,

b) $(\alpha + \beta) \cdot \mathbf{x} = \alpha \cdot \mathbf{x} + \beta \cdot \mathbf{x}$,

c) $(\alpha\beta) \cdot \mathbf{x} = \alpha \cdot (\beta \cdot \mathbf{x})$,

d) $0 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$,

e) $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$.

Para um espaço normado V, exigimos que o corpo de escalares K deve ser $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Uma *norma* é uma função $n : V \to K$, satisfazendo, onde $n(\mathbf{x})$ é denotado por $\|\mathbf{x}\|$:

a) $\|\mathbf{x}\| \geq 0$,

b) $\|\mathbf{x}\| = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$,

c) $\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha|\|\mathbf{x}\|$,

d) $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$, (desig. triangular),

para todos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ e todos os escalares.

Um espaço normado é um espaço vetorial munido de uma norma.

Neste ponto é interessante certificar-se de que o $\mathbb{R}^n$ é um espaço normado.

3.4 Espaços métricos

Um espaço métrico é um par (M, d), onde M é um conjunto não vazio e d uma função $d : M \times M \to \mathbb{R}$ que para todos os pontos $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ de M satisfaz:

a) $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$. (positiva)

b) $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$, (não degenerada)

c) $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$, (simétrica)

d) $d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + d(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ (desig. triangular)

A função d é chamada uma *métrica* e $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ significa a distância entre $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.

O espaço métrico que temos de imediato e mais interessante é o $\mathbb{R}^n$, cuja métrica $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é dada por $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$. Esta é, por razões óbvias, chamada métrica euclidiana.

Em geral, num espaço vetorial normado X, definimos $d : X \times X \to \mathbb{R}$ por

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

temos que (X, d) é um espaço métrico.

Sejam (M, d) um espaço métrico, S um subconjunto não vazio de M e $\mathbf{x}_0 \in M$. Definimos a distância entre $\mathbf{x}_0$ e S por

$$d(\mathbf{x}_0, S) = \inf_{\mathbf{x} \in S} d(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}).$$

É claro que $d(\mathbf{x}_0, S)$ é sempre não-negativo, pois $\{d(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}), \mathbf{x} \in S\}$ é limitado inferiormente por 0.

Teorema 3.4.1 *Sejam* (M, d) *um espaço métrico,* S *um subconjunto não vazio de* M *e* $\mathbf{x}_0 \in M$. *Então,* $d(\mathbf{x}, S) = 0$ *se, e somente se, para cada* $\epsilon > 0$ *dado existe um* $\mathbf{x} \in S$ *tal que*

$$d(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) < \epsilon.$$

Demonstração: Seja $D = \{d(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}); \mathbf{x} \in S\}$. Como $d(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) \geq 0$ para todo $\mathbf{x} \in S$, então 0 é um limite inferior para D. Logo, $d(\mathbf{x}_0, S) = 0$ é equivalente a:

nenhum $\epsilon > 0$ é limite inferior para D, isto é,

$$\nexists \epsilon \forall \mathbf{x}[\epsilon > 0, \mathbf{x} \in S \Longrightarrow d(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) \geq \epsilon].$$

Mas isto é equivalente a

$$\forall \epsilon \exists \mathbf{x}[\epsilon > 0, \mathbf{x} \in S \Longrightarrow d(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) < \epsilon]$$

como afirmado. □

Observe que o teorema **não** afirma que $d(\mathbf{x}_0, S) = 0$ implica que $\mathbf{x}_0 \in S$. Veja os exemplos.

a) Tome em $\mathbb{R}^1$ o subconjunto $S = (0, 1)$ e $\mathbf{x}_0 = 1$. Para cada $\epsilon > 0$ podemos encontrar $x \in S$ tal que $x > 1 - \epsilon$. Como $1 - \epsilon < 1, d(1, \mathbf{x}) < \epsilon$. Segue do teorema que $d(1, S) = 0$, mas $1 = \mathbf{x} \notin S$.

b) Considere o ponto $x_0 = 0$ e

$$S = \{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}.$$

Dado $\epsilon > 0$ podemos encontrar $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > \frac{1}{\epsilon}$, pois $\mathbb{N}$ não é limitado superiormente. Segue que

$$d(0, \frac{1}{n}) = \frac{1}{n} < \epsilon$$

e portanto temos que $d(0, S) = 0$.

Capítulo 4

Conjuntos especiais de um espaço métrico

Neste capítulo provaremos alguns resultados sobre propriedades de conjuntos em espaços métricos.

4.1 Fronteira de um conjunto

Seja S um conjunto num espaço métrico (M, d). Um ponto da fronteira do conjunto S é um ponto $x_0 \in M$ tal que:
1i) $d(x_0, S) = 0$,
2i) $d(x_0, \mathrm{C}S) = 0$.

A fronteira de um conjunto é o conjunto formado pelos seus pontos de fronteira, é denotado por ∂S. Note que um ponto de fronteira de um conjunto S não precisa estar em S. Segue da definição que S e $\mathrm{C}S$, o complementar de S, têm mesma fronteira, isto é, $\partial S = \partial \mathrm{C}S$.

Note que a fronteira do espaço M é sempre vazia.

4.2 Bolas abertas

A bola aberta B com centro x_0 e raio $r > 0$ num espaço métrico (M, d) é definido por

$$B(x_0, r) = \{x \in M; d(x_0, x) < r\}.$$

A "forma" da bola depende evidentmente da métrica.

Teorema 4.2.1 *Seja S um conjunto num espaço métrico (M, d) e x_0 um ponto em M. O ponto $x_0 \in \partial S$ se, e somente se, toda bola de centro x_0 contém pontos de S e de CS.*

Demonstração: Se toda bola de centro x_0 e raio $r > 0$ contém pontos de S e do complementar de S, então para todo $r > 0$ existe $x \in S$ e $y \in \mathrm{C}S$ tal que

$$d(x_0, x) < r \text{ e } d(x_0, y) < r.$$

Usando o teorema 3.4.1 temos que $d(x_0, S) = 0$ e $d(x_0, \mathrm{C}S) = 0$, isto é, x_0 está na fronteira de S e na fronteira de $\mathrm{C}S$. A recíproca é imediata.

•• **Exercício 4.2.2** *1. Determine a fronteira do conjunto $S = \{(x, y)\mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 1\}$.*
2. Determine a fronteira do conjunto $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1\}$.
3. Determine a fronteira do conjunto $S = \{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\}$.

4.3 Conjuntos abertos e fechados

Definição 4.3.1 *Um conjunto S num espaço métrico (M, d) é aberto se ele não contém pontos da sua fronteira, isto é, $\partial S \subset \partial CS$.*

Um conjunto é fechado se ele contém todos os seus pontos de fronteira, isto é, $\partial S \subset S$.

Teorema 4.3.2 *Um conjunto S num espaço métrico (M, d) é aberto se, e somente se, o seu complementar é fechado.*

Demonstração: Se S é aberto, então sua fronteira está contida no complementar de S, isto é, $\mathrm{C}S$ é fechado. Por outro lado, se o complementar é fechado, então ele contém a fronteira de S e pela definição segue que S é aberto.

Teorema 4.3.3 *Um conjunto S num espaço métrico (M, d) é fechado se, e somente se, para cada $x \in M$, $d(x, S) = 0 \Longrightarrow x \in S$.*

Demonstração: Suponha que $d(x, S) = 0 \Longrightarrow x \in S$. Se y é um ponto da fronteira de S, então $d(y, S) = 0$ e $d(y, \mathrm{C}S) =$. Como $d(y, S) = 0$ segue que $y \in S$. Assim S contém seus pontos de fronteira e é fechado.

Suponha que S é fechado. Se $y \notin S$, então $x \in \mathrm{C}S$ e portanto $d(x, \mathrm{C}S) = 0$. Se $d(x, S) = 0$, então $x \in \partial S$ e como S é fechado segue que $x \in S$. isto é uma contradição. Logo, $x \notin S \Longrightarrow d(x, S) \neq 0$, isto é, $d(x, S) = 0 \Longrightarrow x \in S$.□

Teorema 4.3.4 *Um conjunto X num espaço métrico (M, d) é aberto se, e somente se, cada ponto $x \in X$ é centro de uma bola aberta B inteiramente contida em X.*

Demonstração: Se cada $x \in X$ é centro de uma bola aberta B inteiramente contida em X, então x não pode ser ponto de fronteira de X porque B não contém pontos de $\mathrm{C}X$. Segue que X não contém pontos de sua fronteira e portanto é aberto.

Suponha agora que X seja aberto e tome $x \in X$. Toda bola aberta B com centro x contém então um ponto de X. Como x não é um ponto de fronteira de X, segue do teorema 4.2.1 que pelo menos uma bola aberta B com centro x não contém ponto de $\mathrm{C}X$, isto é, $B \subset X$.□

Num espaço métrico, podemos tomar a coleção de todos os conjuntos abertos $\mathcal{A}$. A coleção $\mathcal{A}$ possui uma estrutura, quase independente da métrica do espaço, caracterizada pelo teorema:

Teorema 4.3.5 *Num espaço métrico* (M, d)*:*

1i) os conjuntos $\emptyset$ *e* M *estão em* $\mathcal{A}$*, isto é, são abertos.*

2i) a união S *de qualquer coleção de conjuntos abertos é conjunto aberto.*

3i) a interseção I *de toda coleção finita de conjuntos abertos é aberto.*

Demonstração: 1i) O conjunto $\emptyset$ é aberto porque $\partial\emptyset = \emptyset \subset \complement\emptyset = M$. O conjunto M é aberto porque $\partial M = \emptyset \subset \complement M = \emptyset$.
2i) Seja $m \in S$. Vamos mostrar que S é aberto encontrando uma bola aberta B de centro m tal que $B \subset S$. Como $m \in S$, então m está em algum elemento $\mathcal{U}$ da coleção. Como $\mathcal{U}$ é aberto podemos encontrar uma bola aberta $\mathcal{B}$de centro m inteiramente contida em $\mathcal{U}$. Como $\mathcal{U} \subset S$ segue que $B \subset S$ e assim S é aberto.
3i) Seja $m \in I$ vamos provar que I é aberto exibindo uma bola aberta B de centro m inteiramente contida em I. Seja $(\mathcal{U}_i)$, $i = 1, \ldots, n$ a coleção finita de abertos. Como $m \in \mathcal{U}_i$ para cada i, então podemos encontrar uma bola aberta $B(m, r_i)$ tal que $B(m, r_i) \subset \mathcal{U}_i$. Seja $r = \min\{r_i, i = 1 \ldots, n\}$. Segue que $B(m, r) \subset \mathcal{U}_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$, e assim $B(m, r) \subset I$. Isto mostra que I é aberto. $\Box$

Observação 4.3.6 *O teorema 4.3.5 descreve de certa forma uma estrutura particular no conjunto dos abertos de um espaço métrico. Estra estrutura é a mais importante do assunto que estamos tratando.*

Teorema 4.3.7 *Num espaço métrico* (M, d) *um subconjunto* X *é aberto se, e somente se, é reunião de bolas abertas.*

Demonstração: É claro que qualquer reunião de bolas abertas é um conjunto aberto em virtude do teorema acima. Segue que se $X = \cup B_\lambda$, onde B_λ

é bola aberta, então X é conjunto aberto. Se X é um conjunto aberto, então para cada $x \in X$ existe uma bola aberta B_x centrada em x inteiramente contida em X. Logo, $\{x\} \subset B_x \subset X$. Logo, tomando a reunião temos

$$X = \cup_{x \in X}\{x\} \subset \cup B_x \subset X.$$

Em relação a coleção de todos os subconjuntos fechados temos uma estrutura similar a da coleção dos abertos dada pelo teorema 4.3.5

Teorema 4.3.8 *Num espaço métrico (M, d) valem as seguintes propriedades:*

1i) Os conjuntos $\emptyset$ e M são fechados,

2i) A interseção de qualquer coleção $(F_\alpha), \alpha \in I$ de fechados é um conjunto fechado,

3i) A reunião de qualquer coleção finita $\{F_1, \ldots, F_n\}$ de conjuntos fechados é fechado.

Demonstração: 1i) Os conjuntos $\emptyset$ e M são fechados pois seus complementares são abertos.
2i) O conjunto interseção é fechado porque o seu complementar

$$M - (\cap_\alpha F_\alpha) = \cup_\alpha (M - F_\alpha)$$

é aberto pelo teorema 4.3.5
3i) O conjunto reunião é fechado porque o seu complementar

$$M - (\cup_{i=1}^n F_i) = \cap_{i=1}^n (M - F_i)$$

é aberto pelo teorema 4.3.5.□

4.4 Geometria não Euclidiana

Talvez o mais conhecido dos postulados de Euclides seja o postulado das paralelas. Muito esforço foi feito para deduzi-lo como teorema dos outros axiomas. Pensou-se que esta tarefa fosse impossível. Gauss, Lobachevski e Bolyai independentemente começaram a estudar uma geometria na qual os postulados das paralelas é falso mas as outras hipóteses da geometria euclidiana verdadeiras. Gauss não publicou seu trabalho e Lobachevski o fez antes de Bolyai. Assim o geometria não euclidiana que eles estudaram é chamada de geometria de Lobachevski ou geometria hiperbólica. Mais tarde chamou-se de geometria não euclidiana toda geometria em que o axioma das paralelas fosse obrigatoriamente falso.

Na geometria de Lobachevski existem muitas retas paralelas passando por um ponto fora de uma reta dada. Isto pode ser intuitivamene pouco plausível no mundo real pois estamos treinados a pensar no espaço euclidiano. De fato, Einstein provou que numa vizinhança de um corpo gravitacional, o espaço é definitivamene não euclidiano.

O matemático francês Poincaré apresentou um espaço métrico que é um modelo para a geometria de Lobachevski. Sua existência prova que os axiomas da geometria de Lobachevski são consistentes, pois o postulado das paralelas é verdadeiro no $\mathbb{R}^2$, mas falso no modelo de Poincaré, é independente dos outros axiomas da geometria euclidiana. Em particular, ele não pode ser deduzido dos outros.

O conjunto para o espaço métrico de Poincaré é o conjunto

$$X = \{(x, y); x^2 + y^2 < 1\}$$

em $\mathbb{R}^2$. Mas a métrica usada em X não é a métrica euclidiana.

Sejam P e Q pontos de X. Se P e Q pertencem a um diâmetro do círculo C que é o bordo de X, seja L este diâmentro. Se P e Q não pertencem a um diâmetro, seja L o único círculo que passa por P e Q que é ortogonal a C. Se A e B são como indicados no diagrama, definimos a distância de Poincaré entre P e Q por

$$d(P, Q) = |\log(\frac{QB/QA}{PB/PA})|.$$

pode-se marcar pontos num diagrama indicando as marcas dos passos de um homem que tenta andar do centro de X para sua fronteira. Cada passo é de mesmo tamanho relativo à métrica de Poincaré. Ele nunca alcançará a fronteira; X estende-se indefinidamente em todas as direções.

Poincaré define uma reta em X como sendo uma de nossas curvas L. Isto é razoável, pois o caminho mais curto de P e Q é ao longo de L, relativamente á métrica de Poincaré. Ele define o ângulo entre duas retas L e M como sendo o ângulo ordinário euclidiano entre L e M.

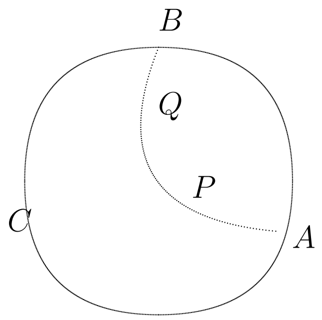


Figura 4.4.1: texto a ser colocado

O diagrama abaixo mostra duas retas M e N passando por P e paralelas a L.

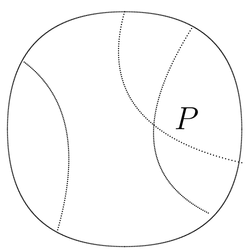


Figura 4.4.2: retas passando por P e paralelas a L.

Capítulo 5

Espaços Topológicos

O conceito de espaço topológico surgiu do estudo da reta $\mathbb{R}$, espaços euclidianos e do estudo das funções contínuas sobre estes espaços.

Neste capítulo definimos o que entendemos por espaços topológicos, apresentamos alguns exemplos e estudamos suas propriedades elementares.

5.1 Espaços Topológicos

No capítulo anterior vimos que a reunião de uma coleção arbitrária de conjuntos abertos num espaço métrico é um conjunto aberto, e que a intersecção de uma coleção finita de abertos num espaço métrico é um conjunto aberto. Isto sugere a seguinte noção.

Definição 5.1.1 *Uma topologia sobre um conjunto X é uma coleção $\mathcal{T}$ de subconjuntos de X tendo as seguintes propriedades:*

1i) $\emptyset$ e X estão em $\mathcal{T}$

2i) a união de elementos de qualquer subcoleção de $\mathcal{T}$ está em $\mathcal{T}$

3i) a intersecção de elementos de qualquer subcoleção finita de $\mathcal{T}$ está em $\mathcal{T}$.

O par $(X, \mathcal{T})$ é chamado de espaço topológico.

Se $\mathcal{T}$ é uma topologia em X e $\mathcal{U} \in \mathcal{T}$ então $\mathcal{U}$ é chamado de conjunto aberto em X.

• **Exemplo 5.1.2** 1i) Um espaço métrico (M, d) é um espaço topológico. A topologia de M é a topologia

$$\tau = \{A \subseteq M; A\,\text{é aberto de}\;\, M\},$$

onde o termo aberto está dado na definição 4.3.1. Esta estrutura é chamada de *topologia gerada* pela métrica de (M, d).

2i) Seja $X = \{a, b, c\}$ e $\mathcal{T}_0 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$, todos os subconjuntos de X. Segue que $(X, \mathcal{T}_0)$ é espaço topológico.

Se $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, X\}$ então $(X, \mathcal{T}_1)$também é espaço topológico.

A topologia $\mathcal{T}_0$ é chamada de topologia discreta e a topologia $\mathcal{T}_1$ é chamada topologia trivial, ou indiscreta ou caótica.

3i) Seja X um conjunto e τ_f a coleção de todas os subconjuntos $\mathcal{U}$ de X tais que $X - \mathcal{U}$ é finito ou é todo X. Então τ_f é uma topologia sobre X chamada a topologia do complemento finito. É claro que X e $\emptyset$ estão em τ_f. Se $\{\mathcal{U}_\alpha\}$ é uma coleção de elementos de τ_f então $\cup_\alpha \mathcal{U}_\alpha$ está em τ_f, pois $X - \cup_\alpha \mathcal{U}_\alpha = \cap_\alpha (X - \mathcal{U}_\alpha)$. A interseção é finita ou todo o X pois cada $X - \mathcal{U}_\alpha$ é finito ou todo o X. Se $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \ldots, \mathcal{U}_n$ estão em τ_f, então como

$$X - \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{U}_i = \bigcup_{i=1}^{n} (X - \mathcal{U}_i)$$

e a união é finita ou todo o conjunto X pois cada conjunto é finito ou o conjunto X.

4i) Seja X um conjunto e τ_c a coleção de todos os subconjuntos $\mathcal{U}$ de X tal que $X - \mathcal{U}$ é enumerável ou todo o X. Então, τ_c é uma topologia sobre X. De fato, é claro que X e $\emptyset$ estão em τ_c. Se $\{\mathcal{U}_\alpha\}_\alpha$ é uma coleção de elementos de τ_c então

$$X - \bigcup_{\alpha} \mathcal{U}_\alpha = \bigcap_{\alpha} (X - \mathcal{U}_\alpha).$$

Como cada $(X - \mathcal{U}_\alpha)$ é enumerável ou todo X, então a interseção é enumerável ou é todo X (lembre que subconjunto de conjunto enumerável é enumerável).

Se $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \ldots, \mathcal{U}_n$ estão em τ_c, então

$$X - \bigcap_1^n \mathcal{U}_i = \bigcap_1^n (X - \mathcal{U}_i)$$

é enumerável ou X (lembre que reunião enumerável de conjuntos enumeráveis é enumerável). Esta é a topologia do complemento enumerável.

Definição 5.1.3 *Sejam τ e τ' topologias de X. Se $\tau' \supset \tau$, então dizemos que τ' é mais fina que τ. Também dizemos que τ' é maior do que τ.*

Duas topologias sobre um conjunto X não precisam ser comparáveis.

5.2 Bases

Mostramos no teorema 4.3.7 que num espaço métrico, todo aberto é reunião de bolas abertas. Isto mostra que os abertos de um espaço métrico são construídos usando alguns abertos especiais. Nos exemplos, descrevemos a topologia dizendo como são os seus abertos. Em geral isto não é possível ser feito. Em muitos casos especificamos uma coleção menor de subconjutos de X e definimos a topologia em termos dela. A idéia de construir conjuntos abertos usandos alguns abertos especiais é idéia de base.

Definição 5.2.1 *Seja X um conjunto. Uma base para uma topologia sobre X é uma coleção $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X, chamados de elementos básicos, tais que*

1i) para cada $x \in X$, existe um elemento $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$.

2i) Se $x \in (B_1 \cap B_2)$, onde $B_i \in \mathcal{B}$, então existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3$ e $B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Se $\mathcal{B}$ é uma base para uma topologia sobre X, a topologia τ gerada por $\mathcal{B}$ é descrita como segue: $\mathcal{U} \in \tau$ se para cada $x \in \mathcal{U}$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$ e $B \subset \mathcal{U}$.

Note que cada $B \in \mathcal{B}$ é um aberto sob esta definição e assim $\mathcal{B} \subset \tau$.

Proposição 5.2.2 A coleção τ construída acima é de fato uma topologia.

Demonstração: Se $\mathcal{U} = \emptyset$, então $\mathcal{U}$ satisfaz a definição de aberto por vacuidade. Também X está em τ, pois para cada $x \in X$ existe algum elemento básico B contendo x e contido em X.

Tomemos agora uma família $(\mathcal{U})_\alpha$ de elementos de τ e vamos provar que $\mathcal{U} = \cap_\alpha \mathcal{U}_\alpha$ pertence a τ.

Dado $x \in \mathcal{U}$, existe $\mathcal{U}_\alpha$ tal que $x \in \mathcal{U}_\alpha$. Como $\mathcal{U}_\alpha$ é aberto, existe elemento básico B tal que $x \in B \subset \mathcal{U}_\alpha$. Então, $x \in B$ e $B \subset \mathcal{U}$, assim $\mathcal{U}$ é aberto, por definição.

Sejam $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ elementos de τ, vamos provar que $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$ pertence a τ. Dado $x \in \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$, escolha um elemento básico $B_1 \subset \mathcal{U}_1$ e um elemento básico $B - 2 \subset \mathcal{U}_2$ tal que $x \in B_2$. Logo, existe um elemento básico B_3 contendo x tal que $B_3 \subset B_2 \cap B2$. Então, $x \in B_3$ e $B_3 \subset \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$ e assim $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$ pertence a τ, por definição. Finalmente, segue por indução, que qualquer interseção finita de elementos de τ está em τ.

Segue que a coleção de abertos gerados por uma base $\mathcal{B}$ é de fato uma topologia. □

É claro que toda topologia admite uma base. Note que a própria topologia é uma base para si mesma.

• **Exemplo 5.2.3** *a) Seja $\mathcal{B}$ a coleção de todas as regiões circulares (interiores de círculos) do plano. Então, $\mathcal{B}$ satisfaz às condições para base. Na topologia gerada por $\mathcal{B}$, um subconjunto $\mathcal{U}$ do plano é aberto se todo $x \in \mathcal{U}$ pertence ao interior de alguma região circular contida em $\mathcal{U}$.*

Analogamente, a coleção $\mathcal{B}'$ de todas as regiões retangulares (interiores de retângulos) do plano é uma base para uma topologia do plano.

b) Se X é um conjunto, a coleção de todos os subconjuntos unitários de X é uma base para a topologia discreta de X.

•• **Exercício 5.2.4** *Mostre que as bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ acima definidas geram a mesma topologia.*

Lema 5.2.5 *Seja X um conjunto e $\mathcal{B}$ uma base para a topologia τ de X. Então, τ é igual a coleção de todas as uniões de elementos de $\mathcal{B}$.*

Demonstração: Dada uma coleção de elementos de $\mathcal{B}$, então eles também são elementos de τ. Como τ é topologia, sua união está em τ. Reciprocamente, dado $\mathcal{U} \in \tau$ escolha para cada $x \in \mathcal{U}$ um elemento B_x de $\mathcal{B}$ tal que $x \in B_x \subset \mathcal{U}$. Então, temos $\{x\} \subset B_x \subset \mathcal{U}$. Tomando a reunião temos que $\mathcal{U} \subset \cup B_x \subset \mathcal{U}$. Assim $\mathcal{U}$ é igual a união de elementos de $\mathcal{B}$. $\square$

Veja o teorema 4.3.7 e compare com o teorema acima.

O lema abaixo dá um critério pra determinar se uma topologia é mais fina que outra, quando elas são dadas por meio de bases.

Lema 5.2.6 *Seja $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ bases para as topologias τ e τ', respectivamente, de X. São equivalentes:*
a) τ' é mais fina que τ,
b) para cada $x \in X$ e cada elemento básico $B \in \mathcal{B}$ contendo x, existe um elemento básico $B' \in \mathcal{B}'$ tal que $x \in B' \subset \mathcal{B}$.

Demonstração: Dado $x \in X$ e $B \in \mathcal{B}$ com $x \in B$, então $B \in \tau$ e por definição $\tau \subset \tau'$. Logo, $B \in \tau'$. Como τ' é gerada por $\mathcal{B}'$, existe $B' \in \mathcal{B}'$ tal que $x \in B' \subset B$.

Por outro lado, dado $\mathcal{U} \in \tau$, provaremos que $\mathcal{U} \in \tau'$. Seja $x \in \mathcal{U}$. Como $\mathcal{B}$ gera τ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset \mathcal{U}$. Pela hipótese, existe $B' \in \mathcal{B}'$ tal que $x \in B' \subset B$. Então, $x \in B' \subset \mathcal{U}$, assim $\mathcal{U} \in \tau'$, por definição.

Usando este lema podemos ver que as topologias geradas pelas regiões retangulares e pelas regiões circulares do plano são as mesmas.

O próximo resultado garante a existência de uma base para a topologia de um espaço topológico (X, τ).

Lema 5.2.7 *Seja (X, τ) um espaço topológico e $\mathcal{C}$ a coleção de todos os abertos de X tais que para cada $x \in X$ e cada aberto $\mathcal{U}$ de X existe um $C \in \mathcal{C}$ tal que $x \in C \subset \mathcal{U}$. Então, $\mathcal{C}$ é uma base para a topologia τ.*

Demonstração: Devemos provar que $\mathcal{C}$ é uma base e gera τ. A primeira condição para base é fácil: dado $x \in X$ como X é aberto de X existe por hipótese um elemento C de $\mathcal{C}$ tal que $x \in C \subset X$. Para a segunda condição, seja $x \in C_1 \cap C_2$, onde $C_i \in \mathcal{C}$. Como C_1, C_2 são abertos, também é $C_1 \cap C_2$. Logo, existe por hipótese um elemento $C_3 \in \mathcal{C}$ tal que $x \in C_3 \subset C_1 \cap C_2$.

Seja τ' a topologia gerada por $\mathcal{C}$, então o lema anterior mostra que τ' é mais fina que τ. Reciprocamente, como cada elemento de $\mathcal{C}$ é um elemento de τ, então são uniões arbitrárias de elementos de $\mathcal{C}$. Portanto, $\tau' \subset \tau$. Mostrando assim que $\tau' = \tau$.

5.3 Topologia produto

Dados espaços topológicos (X, τ_1) e (Y, τ_2) existem várias maneiras de construir novos espaços topológicos. Passaremos a considerar agora uma das mais elementares que é o produto cartesiano.

Sejam X e Y espaço topológicos e consideremos o produto cartesiano $X \times Y$. A topologia produto em $X \times Y$ é a topologia que tem como base a coleção $\mathcal{B}$ de todos os conjuntos da forma $U_1 \times V_1$, onde U_1 é aberto de X e V_2 é aberto de Y.

Para completar a definição acima devemos provar que $\mathcal{B}$ é de fato uma base.

Lema 5.3.1 *A coleção $\mathcal{B}$ é uma base.*

Demonstração: A primeira condição é fácil, pois $X \times Y$ é um elemento básico e contém todo elemento $(x, y) \in X \times Y$. Para a segunda condição, tomemos dois elementos básicos $U_1 \times V_1$ e $U_2 \times V_2$. Como

$$(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \times V_2)$$

e $(U_1 \cap U_2)$ e $(V_1 \times V_2)$ são abertos em X e Y, respectivamente, então $(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2$ é aberto básico. $\square$

Note que a reunião de dois elementos de $\mathcal{B}$ não precisa estar em $\mathcal{B}$, assim $\mathcal{B}$ não é uma topologia em $X \times Y$.

Quando as topologias de X e Y dão dadas pelas bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$, respectivamente, então uma base para a topologia de $X \times Y$ é dada pelo seguinte teorema.

Teorema 5.3.2 *Sejam $\mathcal{B}$ base para a topologia de X e $\mathcal{C}$ base para a topologia de Y. Então*

$$\mathcal{D} = \{B \times C; B \in \mathcal{B} \;\; e \;\; C \in \mathcal{C}\}$$

é uma base para a topologia de $X \times Y$.

Demonstração: Dados um aberto W de $X \times Y$ e $(x, y) \in W$, obtemos da definição de topologia produto um elemento básico $U \times V$ tal que $(x, y) \in U \times V$ tal que $(x, y) \in U \times V \subset W$. Como $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são bases, existem $B \in \mathcal{B}$ e $C \in \mathcal{C}$ tais que $x \in B \subset U$ e $y \in C \subset V$. Segue que $(x, y) \in B \times C \subset W$. Assim $\mathcal{D}$ é uma base para a topologia de $X \times Y$. $\square$

Definição 5.3.3 *Um subconjunto F num espaço topológico (X, τ) é fechado se $(M - F)$ é aberto em X.*

Segue desta definição que um conjunto A é aberto em X se, e somente se, $X - A$ é fechado. De fato, pois $X - A$ é fechado se, e somente se $X - (X - A) = A$ é aberto.

Observação 5.3.4 *Notemos que do teorema 4.3.2 a noção de aberto e fechado em espaços métricos coincide com a noção correspondente em espaços topológicos.*

Provamos que conjuntos fechados num espaço métrico satisfazem as propriedades do teorema abaixo. Provaremos agora que estas propriedades também valem para fechados em espaços topológicos.

Teorema 5.3.5 *Num espaço topológico (X, τ) valem as seguintes propriedades:*
1i) Os conjuntos $\emptyset$ e X são fechados,
2i) A interseção de qualquer coleção de fechados é um conjunto fechado.
3i) A reunião de qualquer coleção finita de conjuntos fechados é fechado.

A prova é deixada como exercício.

O teorema acima diz que em vez de usarmos conjuntos abertos para especificar uma topologia poderíamos usar conjuntos fechados, isto é, uma topologia sobre um conjunto Xé uma coleção de conjuntos que são complementares de conjuntos fechados, satisfazendo as três propriedades do teorema acima, chamados de abertos.

5.4 Subespaço Topológico

Seja (X, τ) um espaço topológico. Se A é um subconjunto de X, a coleção

$$\tau_A = \{A \cap U; U \text{ é aberto de } \tau\}$$

é uma topologia em A, chamada de topologia relativa, topologia de subespaço ou topologia induzida. Com esta topologia A é chamado um subespaço topológico de X. Note que seus abertos são todas as interseções de abertos de X com A.

Agora provaremos que τ_A é uma topologia.

Lema 5.4.1 *A coleção τ_A definida acima é uma topologia.*

Demonstração: É claro que ela contém A e $\emptyset$. Além disso, como

$$\cap_{i=1}^{n}(U_i \cap A) = A \cap (\cap_{i=1}^{n} U_i)$$
$$\cup_{\alpha}(U_\alpha \cup A) = A \cup (\cup_{\alpha} U_\alpha)$$

e interseção finita de abertos e união arbitrária de abertos são abertos, segue que τ_A é uma topologia. $\square$

Lema 5.4.2 *Se $\mathcal{B}$ é uma base para a topologia de X, então a coleção*

$$\mathcal{B}_A = \{B \cap A; B \in \mathcal{B}\}$$

é uma base para a topologia do subespaço A.

Demonstração: Seja U aberto em X e $a \in (A \cap U)$. Existe um aberto básico $B \in \mathcal{B}$ tal que $a \in B \subset U$. Logo, $a \in (A \cap U) \subset (A \cap U)$. Isto mostra que $\mathcal{B}_A$ é uma base. $\square$

Lema 5.4.3 *Seja A um aberto do espaço topológico X. Se U é aberto em A, (ou um aberto relativo) então U é aberto em X.*

Demonstração: Como U é aberto em A, então $U = A \cap V$ para algum aberto V em X. Como A e V são abertos em X segue que U é aberto em X. $\square$

Se N é um subconjunto de um espaço métrico (M, d), então (N, d) é claramente um espaço métrico. Então dizemos que N é um subespaço métrico de M. Como visto anteriormente, se $\mathcal{B}$ é uma base para a topologia de M, então a coleção

$$\mathcal{B}_A = \{B \cap N; B \in \mathcal{B}\}$$

é uma base para a topologia do subespaço N.

5.5 Fecho e conjunto interior

Seja (X, τ) espaço topológico e $x \in X$. Uma vizinhança de x é qualquer aberto contendo x. Dizemos que x é ponto da *fronteira* de $A \subset X$ se A e $X - A$ não são vizinhanças de x. Representamos o conjunto fronteira do conjunto A por ∂A.

Dado um conjunto A de um espaço topológico (X, τ), definimos o *interior* de A como sendo a união de todos os conjuntos abertos contidos em A. E definimos o *fecho* de A como sendo a interseção de todos os conjuntos fechados contendo A.

O interior de A, denotado por $\mathrm{int}(A)$, está contido em A e é claramente um conjunto aberto de X. O fecho de A, denotado por $\overline{A}$ contém A e é claramente um conjunto fechado de X.

Segue das definições que se A é aberto, então $A = \mathrm{i}ntA$; e se A é fechado, então $A = \overline{A}$.

Segue das propriedades de conjuntos aberto e fechado que se $A = \mathrm{i}ntA$, então A é aberto; e que se $A = \overline{A}$, então A é fechado.

Teorema 5.5.1 *Seja A subconjunto de um espaço topológico (X, τ). Então $x \in \overline{A}$ se, e somente se, todo conjunto aberto contendo x tem interseção não vazia com A.*

Demonstração: Provaremos que $x \notin \overline{A}$, se e somente se, existe um aberto U contendo x tal que $U \cap A = \emptyset$. Nesta forma é mais fácil provar o teorema. Se $x \notin \overline{A}$, o conjunto $U = X - A$ é um aberto contendo x que não intercepta A. Por outro lado, se existe um conjunto aberto U contendo x tal que $U \cap A$, então $X - U$ é um fechado contendo A. Pela definição de fecho $X - U$ deve conter $\overline{A}$ e assim x não pode estar em $\overline{A}$.$\square$

Há outra maneira de descrever o fecho de um conjunto, usando o conceito de ponto de acumulação.

Dizemos que $x \in X$ é um ponto de *acumulação* do conjunto A se $x \in \overline{A - \{x\}}$.

O ponto de acumulação pode ou não pertencer ao conjunto A. Denotamos por A' o conjunto de todos os pontos de acumulação de A.

Teorema 5.5.2 *Se A é subconjunto de um espaço topológico (X, τ), então*

$$\overline{A} = A \cup A'.$$

Demonstração: Se $x \in A'$, então todo aberto contendo x intercepta A em um ponto diferente de x. Segue que $x \in \overline{A}$. Portanto, $A' \subset \overline{A}$. Por definição $A \subset \overline{A}$, daí segue que $A \cup A' \subset \overline{A}$.

Agora provaremos que se $x \in \overline{A}$, então $x \in A \cup A'$. Se $x \in A$, não há o que fazer. Suponha que $x \notin A$. Como $x \in \overline{A}$, sabemos então que todo aberto U contendo x intercepta A e um ponto diferente de x. Então, $x \in A'$ e assim $x \in A \cup A'$.□

Corolário 5.5.3 *Seja (X, τ) um espaço topológico e A um subconjunto de X. A é fechado se, e somente se, A contém todos os seus pontos de acumulação.*

Demonstração: O conjunto A é fechado se, e somente se, $\overline{A} = A$. Como $\overline{A} = A \cup A'$, então $A = A \cup A'$ e assim $A' \cup A$.□

5.6 Topologia quociente

A topologia quociente não é uma generalização natural de topologias que já temos visto. Mas é facilmente motivada da geometria. Já vimos alguns conjuntos quocientes, obtidos de um conjunto X e de uma relação de equivalência em X, como o toro e o cilindro. A formalização destas construções envolvem o conceito de topologia quociente.

Definição 5.6.1 *Sejam X e Y espaços topoloógicos. Uma aplicação sobrejetora $f : X \to Y$ é chamada de aplicação quociente se U é aberto em Y se, e somente se, $f^{-1}(U)$ é aberto em X.*

Uma afirmação equivalente a esta é a seguinte: um subconjunto U de Y é fechado se, e somente se, $f^{-1}(U)$ é fechado em X. Note que a coleção de todos os subconjuntos U de Y tais que $f^{-1}(U)$ é aberto em X é uma topologia em Y.

Uma aplicação é aberta (fechada) se leva conjunto aberto (fechado) em conjunto aberto (fechado). Assim aplicações sobrejetoras que são abertas ou fechadas são aplicações quocientes.

Sejam X é um espaço topológico, A um conjunto e $f : X \to A$ uma aplicação sobrejetora. A coleção τ de todos os subconjuntos U de A tais que $f^{-1}(U)$ são abertos em X é uma topologia em A na qual f é uma aplicação quociente. É claro que nesta topologia a aplicação f é contínua. Note que se $U \subset A$ não pertence a τ, então $f^{-1}(U)$ não é aberto em X. Segue que qualquer topologia em A que contenha propriamente τ torna f descontínua. Assim esta topologia é a mais fina em A que torna f contínua. Esta topologia é chamada de topologia quociente induzida por f. Faça os detalhes como exercício.

Teorema 5.6.2 Sejam X um espaço topológico, A um conjunto e $f :\to A$ uma função sobrejetora. Consideremos A munido da topologia quociente induzida por f. Uma função $g : X \to A$ é contínua se, e somente se, $g \circ f$ é contínua

Demonstração: Como f é contínua, segue que $g \circ f$ é contínua. Suponha agora que $g \circ f$ contínua, então dado U aberto de A temos $f^{-1}(g^{-1}(U) = (g \circ f)^{-1}(U)$ é aberto em X. Segue da definição que $g^{-1}(U)$ é aberto em A e portanto g é contínua. □

Seja X um espaço topológico e R uma relação de equivalência em X. Por X/R denotamos o conjunto quociente e $\pi : X \to X/R$ é a projeção (sobrejetora) canônica. Com a topologia quociente induzida por π, o espaço X/R é chamado espaço quociente de X.

Observação 5.6.3 A situação acima é a mais geral. De fato, sejam X e Y espaços topológicos e $f : X \to Y$ contínua sobrejetora. A relação dada por $x\mathrm{R}x' \Longleftrightarrow f(x) = f(x')$, é uma relação de equivalência em X. Tomando a projeção canônica $\pi : X \to X/\mathrm{R}$ vemos que a $\overline{f} : X/\mathrm{R} \to Y$ é a única aplicação tal que

$$\overline{f}(\pi(x)) = f(x).$$

Além disso, $\overline{f}$ é bijetora e como $\overline{f} \circ \pi = f$ e f é contínua, então $\overline{f}$ é contínua.

•• **Exercício 5.6.4** .

Prove os detalhes da observação acima. Mostre que se a topologia de Y for a induzida por f, então $\overline{f}$ é um homemorfismo.

Capítulo 6

Funções Contínuas

O conceito de função contínua é fundamental em matemática. Neste capítulo vamos formular uma definição de continuidade que, embora envolva apenas a noção de conjunto aberto, engloba a noção de continuidade na reta real como caso especial. Vamos estudar várias propriedades das funções contínuas e veremos que muitas delas são generalizações dos resultados aprendidos no Cálculo e Análise.

6.1 Funções contínuas em espaços topológicos

Definição 6.1.1 *Sejam* $(X\tau)$ *e* (Y,τ') *espaços topológicos. Uma função* $f : X \to Y$ *é dita contínua se para cada aberto* V *de* Y*, o subconjunto* $f^{-1}(V)$ *é aberto de* X*.*

Note que a noção de continuidade envolve apenas o conceito de conjunto aberto.

Observamos que se a topologia τ' de Y é dada por uma base $\mathcal{B}'$, então para provar a continuidade de f basta provar que $f^{-1}(B')$ é aberto para todo B' aberto básico. De fato, dado um aberto arbitrário V de Y existem abertos básicos B_α tais que

$$V = \cup_{\alpha \in I} B_\alpha.$$

Então,

$$f^{-1}(V) = f^{-1}(\cup_{\alpha \in I} B_\alpha) = \cup_{\alpha \in I} f^{-1}(B_\alpha)$$

é aberto desde que $f^{-1}(B_\alpha)$ seja aberto.

Teorema 6.1.2 *Sejam $(X\tau)$ e (Y, τ') espaços topológicos. São equivalentes:*
1i) f é contínua,
2i) para todo $A \subset X$, tem-se $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$,
3i) para todo B fechado em Y, o conjunto $f^{-1}(B)$ é fechado em X.

Demonstração: 1i) $\Longrightarrow$ 2i): suponha que f seja contínua e seja $A \subset X$. Provaremos que se $x \in \overline{A}$ então $f(x) \in \overline{f(A)}$. Tome V um aberto de Y contendo $f(x)$. Então $f^{-1}(V)$ é aberto de X e contém x e tem algum ponto $y \in f^{-1}(V) \cap A$. Segue que $\emptyset \neq V \cap f(A) \ni f(y)$. Portanto $f(x) \in \overline{f(A)}$.

Para provar que 2i)$\Longrightarrow$ 3i), seja B fechado de Y e $A = f^{-1}(B)$. Provaremos que A é fechado em X, isto é, $\overline{A} \subset A$. Seja $x \in \overline{A}$, então

$$f(x) \in f(A) \subset \overline{f(A)} \subset \overline{B} = B,$$

assim $x \in f^{-1}(B) = A$. Segue que $\overline{A} \subset A$.

Finalmente provaremos que 3i) $\Longrightarrow$ 1i). Seja V um aberto em Y e $B = Y - V$. Então B é fechado em Y e portanto $f^{-1}(B)$ é fechado em X. Mas,

$$f^{-1}(V) = f^{-1}(Y - B) = f^{-1}(Y) - f^{-1}(B) = X - f^{-1}(B),$$

assim $f^{-1}(V)$ é aberto. $\Box$

Definição 6.1.3 *Sejam X e Y espaços topológicos e $f : X \to Y$ uma função bijetora. Dizemos que f é um homeomorfismo se f e f^{-1} são contínuas.*

Admitindo f contínua então $f^{-1}(A)$ é aberto desde que A seja aberto. Admitindo f^{-1} contínua então $(f^{-1})^{-1}(A) = f(A)$ é aberto desde que A seja aberto. Assim, outra maneira de definir homeomorfimso e dizer que f é uma bijeção tal que $f(A)$ é aberto se, e somente se, A é aberto.

Teorema 6.1.4 (construção de funções contínuas) *Seja X,Y e Z espaços topológicos.*
a) Se $f : X \to Y$ é função constante, então f é contínua.
b) Se A é subespaço de X, então a inclusão $i : A \to X$ é contínua.
c) Se $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ são contínuas, então $g \circ f$ é contínua.
d) Se $f : X \to Y$ é contínua e A é subespaço de X, então a restrição $f|_A : A \to Y$ é contínua.

Demonstração: a) Suponha $f(x) \equiv a \in Y$. Se V é um aberto de Y, então $f^{-1}(V)$ é igual a X ou igual ao conjunto vazio, conforme $a \in V$ ou não. Em qualquer $f^{-1}(V)$ é aberto.

b) Dado aberto U em X, então $j^{-1}(U) = U \cap A$, que é aberto em A.

c) Dado aberto W em Z, então $g^{-1}(W)$ é aberto em Y e $f^{-1}(g^{-1}(W))$ é aberto em X. Mas $f^{-1}(g^{-1}(W)) = (g \circ f)^{-1}(W)$. Logo, $(g \circ f)^{-1}(W)$ é aberto em X e assim $(g \circ f)$ é contínua.

d) Finalmente para provar d) basta notar que $f|_A$ é igual a composta da inclusão $j : A \to X$ com $f : X \to Y$ e portanto $f|_A$ é contínua. □

Teorema 6.1.5 *Sejam $X = A \cup B$, $f : A \to Y$ e $g : B \to Y$ contínuas tais que $f(x) = g(x), \forall x \in (A \cap B)$. Então é contínua a função $h : X \to Y$ dada por*

$$h(x) = \begin{cases} f(x), \ se\, x \in A \\ g(x), \ se\, x \in B. \end{cases}$$

Demonstração: Seja $F \subset Y$ fechado. Como $h^{-1}(F) = f^{-1}(F) \cup g^{-1}(F)$ e $f^{-1}(F)$ e $g^{-1}(F)$ são fehados, então $h^{-1}(F)$ e assim h é contínua. □

Teorema 6.1.6 *Seja* $f :\to X \times Y$ *dada por* $f(a) = (f_1(a), f_2(a))$. *Então,* f *é contínua se, e somente se,* f_1 *e* f_2 *são contínuas.*

Demonstração: Sejam $\pi_1 : X \times Y \to X$ e $\pi_2 : X \times Y \to Y$ as projeções. Claramente π_1 e π_2 são contínuas, pois

$$\begin{aligned}\pi_1(V) &= V \times Y\\ \pi_2(W) &= X \times W,\end{aligned}$$

para V e W abertos. Como $f_1 = \pi_1 \circ f$ e $f_2 = \pi_2 \circ f$ são composta de funções contínuas, então f_1 e f_2 são contínuas.

Por outro lado, se f_1 e f_2 são contínuas, seja $V \times W$ um aberto básico de $X \times Y$. Então, $f^{-1}(V \times W) = f_1^{-1}(V) \cap f_2^{-1}(W)$. Como cada um dos conjuntos desta interseção é aberto segue que $f^{-1}(V \times W)$ é aberto. $\square$

6.2 Funções contínuas em espaços métricos

Nesta seção veremos alguns resultados elementares sobre funções contínuas definidas em espaços métricos e provaremos que a definição de continuidade do cálculo é equivalente aquela dada para funções definidas em espaços topológicos.

Teorema 6.2.1 *Sejam* (X, d_1) *e* (Y, d_2) *espaços métricos. A função* $f : X \to Y$ *é contínua se, e somente se, para todo* $x \in X$ *e* $\varepsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que* $d_1(x, y) < \delta$ *implica* $d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Demonstração: Primeiramente suponhamos f contínua e sejam dados $x \in X$ e $\varepsilon > 0$. Como f é contínua, $f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))$ é aberto de X e contém x. Logo, contém alguma bola $B(x, \delta)$ centrada em x. Se $y \in B(x, \delta)$ então $f(y) \in B(f(x), \varepsilon))$. Isto é, $d_1(x, y) < \delta$ implica que $d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Suponha agora que a condição seja satisfeita. Tomemos um aberto V de Y e $x \in f^{-1}(V)$. Como $f(x) \in V$ existe $B(f(x), \varepsilon) \subset V$. Logo, pela hipótese, existe $B(x, \delta)$ tal que $f(B(x, \delta)) \subset B(f(x), \varepsilon)$. Segue que $f^{-1}(V)$ é aberto em X. □

• **Exemplo 6.2.2** *Se* (M_1, d_1) *e* (M_2, d_2) *são dois espaços métricos podemos introduzir pelo menos duas métricas em* $M_1 \times M_2$. *São elas dadas por se* $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ *e* $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ *são elementos de* $M_1 \times M_2$

$$\begin{aligned} d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \sqrt{(d_1(x_1, y_1))^2 + (d_2(x_2, y_2))^2} \\ m(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \max d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2). \end{aligned}$$

Estas métricas geram a mesma topologia em $M_1 \times M_2$ *que tornam as projeções* $\pi_1 : M_1 \times M_2 \to M - 1$ *e* $\pi_2 : M - 1 \times M_2 \to M_2$ *dadas por* $\pi_1(x_1, y_1) = x_1$ *e* $\pi_2(x_1, y_1) = y_1$, *contínuas.*

Uma *sequência* em um espaço topológico é uma função $s : \mathbb{N} \to X$. Denotamos $s(n)$ por x_n e escrevemos (x_n) ou $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ para representar s.

Dizemos que a sequência (x_n) de elementos de X *converge* para $x \in X$, se para todo aberto U contendo x existe um natural n_0 tal que $x_n \in U$, $\forall n \geq n_0$. Escrevemos $x_n \to x$ para representar que $(x_)$ converge para x.

Lema 6.2.3 *Seja* (X, d) *espaço métrico e* $A \subset X$. *Se existe sequência* (x_n) *de pontos de* A *convergindo para* x, *então* $x \in \overline{A}$.

Demonstração: Seja (x_n) sequência de pontos de A tal que $x_n \to x$. Então, todo aberto U contendo x contém pontos de A e assim $x \in \overline{A}$. Suponha que $x \in \overline{A}$, então para cada $n \in \mathbb{N}$ tomemos $x_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap A$. Provaremos que (x_n) converge para x. Dado um aberto U contendo x existe $B(x, \varepsilon) \subset U$. Seja $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \varepsilon$, então $x_n \in U$ para todo $n \geq n_0$. □

Note que apenas na prova da recíproca utilizamos o fato de X ser métrico.

Teorema 6.2.4 *Sejam (X, d) espaço métrico, Y espaço topológico e $f : X \to Y$ uma função. Então, f é contínua se, se somente se, para toda sequência convergente $x_n \to x$ em X tem-se $f(x_n) \to f(x)$.*

Demonstração: Primeiramente assuma que f seja contínua. Dado $x_n \to x$ e V aberto contendo $f(x)$, então $f^{-1}(V)$ é aberto contendo x e assim existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in f(^{-1}(V)$, $\forall n \geq n_0$. Segue que $f(x_n) \in V$, $\forall n \geq n_0$ e assim $f(x_n) \to f(x)$.

Reciprocamnte, seja $A \subset X$ e $x \in \overline{A}$. Então, existe (x_n) sequência de pontos de A convergindo para x. Por hipótese, a sequência $f(x_n)$ converge para $f(x)$. Como $f(x_n) \in f(A)$, o lema anterior assegura que $f(x) \in \overline{f(A)}$. Logo, $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ e f é contínua. □

Lema 6.2.5 *As operações adição, subtração e multiplicação são funções contínuas de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. A operação de divisão é função contínua de $\mathbb{R} \times (\mathbb{R} - \{0\}$ em $\mathbb{R}$.*

Demonstração: Exercício.

Teorema 6.2.6 *Seja X espaço topológico e $f, g : X \to \mathbb{R}$ funções contínuas. Então, $(f \pm g)$ e $(f \cdot g)$ são contínuas. Se $g(x) \neq 0$ para todo $x \in X$, então $(\dfrac{f}{g})$ é contínua.*

Demonstração: Como $(f + g)$ é a composta de $h : X \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, dada por $h(x) = (f(x), g(x))$, com a adição $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e ambas são contínuas segue que $(f + g)$ é contínua. Argumento análogo para as outras funções. □

Definição 6.2.7 *Sejam (Y, d) um espaço métrico e X um conjunto. Dizemos que a sequência de funções $f_n : X \to Y$ converge uniformemente para $f : X \to Y$ se dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon, \, \forall x \in X, \, \forall n \geq n_0.$$

O conceito de convergência uniforme de sequência de funções é importante e o seguinte teorema afirma que o limite uniforme de funções contínuas é uma função contínua.

Teorema 6.2.8 (Limite uniforme) *Sejam X espaço topológico, (Y,d) espaço métrico e $f_n : X \to Y$ uma sequência de funções contínuas. Se f_n converge uniformemente para $f : X \to Y$, então f é contínua.*

Demonstração: Provaremos que $f^{-1}(V)$ é aberto se V é aberto. Seja V aberto de Y e $x_0 \in f^{-1}(V)$. Seja $y_0 = f(x_0)$ e $\varepsilon > 0$ tal que $B(y_0,\varepsilon) \subset V$. Então, pela convergência uniforme, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(f_n(x), f(x) < \frac{\epsilon}{4},\ \forall x \in X,\ \forall n \geq n_0.$$

Como f_{n_0} é contínua, existe um aberto U contendo x_0 tal que $f_{n_0}(U) \subset B(f_{n_0}(x_0), \frac{\varepsilon}{2})$. Provaremos que $f(U) \subset B(y_0,\varepsilon)$. De fato, seja $x \in U$, então

$$\begin{aligned} d(f(x), f_{n_0}(x)) &< \frac{\varepsilon}{4} \ \text{(pela escolha de}\, n_0), \\ d(f_{n_0}(x), f_{n_0}(x_0)) &< \frac{\varepsilon}{2} \ \text{(pela escolha de}\, U), \\ d(f_{n_0}(x), f(x_0)) &< \frac{\varepsilon}{4} \ \text{(pela escolha de}\, n_0). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} d(f(x), f(x_0)) &\leq d(f(x), f_{n_0}(x_0)) + d(f_{n_0}(x_0), f(x_0)) \\ &\leq d(f(x), f_{n_0}(x)) + d(f_{n_0}(x)), f_{n_0}(x_0)) + d(f_{n_0}(x_0), f(x_0)) \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Logo, $f(x) \in B(y_0,\varepsilon)$.□

6.3 Aplicações abertas e fechadas

Já vimos que as projeções levam abertos em abertos. Mas existem funções que não tem esta propriedade, é o caso da função $f : X \to \mathbb{R}$ constante.

Definição 6.3.1 *Sejam X e Y espaços topológicos e $f : X \to Y$ uma função. Dizemos que f é aberta se [ara cada $A \subset X$ aberto, $f(A) \subset Y$ é aberto. Dizemos que f é fechada se para cada $B \subset X$ fechado, $f(B) \subset Y$ é também fechado.*

• **Exemplo 6.3.2** *a) Sejam (X, τ) e (X, σ) espaços topológicos onde $\tau \neq \sigma$ mas $\tau \subset \sigma$. Então, a aplicação identidade $i : (X, \tau) \to (X, \sigma)$ é bijeção, fechada, aberta e não contínua.*
b) Seja $f : [0, 1) \to [0, 1)$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & se\ 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 2(x - \frac{1}{2}), & se\ \frac{1}{2} \leq x < 1. \end{cases}$$

É aberta, fechada e não é contínua.

Embora a definição de aplicação aberta e fechada não exijam continuidade das funções, estamos interessados em resultados que combinem estes conceitos.

Teorema 6.3.3 *a) Uma bijeção contínua $f : X \to Y$ é homeomorfismo se, e somente se, f é aberta.*
b) Uma bijeção contínua $g : X \to Y$ é homeomorfismo se, e somente se, g é fechada.

Demonstração: Como f é bijeção, então f é homeomorfismo se, e somente se, f^{-1} é contínua e isto ocorre se, e somente se, f é aberta. O caso b) é análogo.□

•• **Exercício 6.3.4** *Dê exemplos de aplicações que sejam apenas abertas ou fechadas, mas não ambos.*

Definição 6.3.5 *Uma aplicação contínua $g : X \to Y$ é homeomorfismo local se para cada $x \in x$ existem abertos $V \subset X$ e $U \subset Y$ tais que $x \in V$ e $g(x) \in U$ e $g|_V : V \to U$ é homeomorfismo.*

O seguinte teorema relaciona homeomorfismo local como aplicação aberta.

Teorema 6.3.6 *Todo homeomorfismo local é uma aplicação aberta.*

Demonstração: Seja $f : X \to Y$ um homeomorfismo local. Para cada $x \in X$ selecione $V_x \subset X$ e $U_x \subset Y$ como na definição. Então, $\cup_{x\in X} V_x = X$ e $f|_{V_x} : V_x \to U_x$ é homeomorfismo. Se $V \subset V_x$ é aberto, então $f(V)$ é aberto de U_x e portanto aberto de Y. Seja W um aberto qualquer de X, então

$$W = W \cap X = W \cap (\cup_{x\in X} V_x = \cup_{x\in X}(W \cap V_x).$$

Cada $W \cap V_x$ é aberto de X e portanto aberto de V_x. Sendo $f : |_{V_x} : V_x \to U_x$ homeomorfismo, concluímos que $f(W \cap V_x)$ é aberto de Y para cada $x \in X$. Logo,

$$f(W) = f(\cup_{x\in X}[W \cap V_x]) = \cup_{x\in X} f(W \cap V_x)$$

é aberto em Y.$\square$

•• **Exercício 6.3.7** *Seja $f : X \to Y$ contínua, sobrejetora e aberta (fechada). Mostre que $A \subset Y$ é aberto (fechado) se, e somente se, $f^{-1}(A)$ é aberto (fechado).*

Capítulo 7

Espaços Topológicos Especiais

7.1 Espaços Conexos

Uma separação para um espaço topológico X é um par A, B de subconjuntos abertos disjuntos e não vazios tal que $X = A \cup B$. Note que neste caso A e B são abertos e fechados em X.

Um espaço topológico é chamado conexo se ele não é a união de dois subespaços não vazios disjuntos e abertos. Em outras palavras, o espaço não admite uma separação.

O próximo resultado, embora simples, é de interesse pois em muitos casos a conexidade de espaços mais complicados é deduzida da conexidade dos intervalos.

Teorema 7.1.1 *Um intervalo $I \subset \mathbb{R}$ é sempre conexo.*

Demonstração: Esta demonstração vale para qualquer intervalo. Suponha $I = A \cup B$ com $A \cap B = \emptyset$ e ambos não vazios e abertos no subespaço topológico $I \subset \mathbb{R}$. Tomemos $a \in A$ e $b \in B$, podemos assumir que $a < b$. Seja $s = \inf\{x \in B; a < x\}$. Então, pela definição de ínfimo, toda vizinhança de s contém pontos de B; mas também pontos de A, pois se $s \neq a$ então $a < s$

e $(a, s) \subset A$. Assim, s não pode ser ponto de A e nem de B o que é uma contradição, pois $s \in A \cup B$ e ambos são abertos. $\square$

A recíproca do teorema anterior é verdadeira.

Teorema 7.1.2 *Todo subconjunto conexo S de $\mathbb{R}$ é um intervalo.*

Demonstração: Se S não fosse intervalo, existiriam $x, y \in S$ e $z \notin S$ tais que $x < z < y$. Segue que $(-\infty, z) \cap S$ e $(c, \infty) \cap S$ são abertos em S, disjuntos e não vazios. Logo, S é desconexo. $\square$

Teorema 7.1.3 *Sejam $f : X \to Y$ uma aplicação contínua entre espaços topológicos. Se X é conexo, então $Z = f(X)$ é conexo.*

Demonstração: Restringindo f a sua imagem, então $f : X \to Z$ é contínua e sobrejetor. Suponhamos que $Z = A \cup B$, onde A e B são dois abertos disjuntos e não vazios em Z. Segue que $f^{-1}(A)$ e $f^{-1}(B)$ são abertos disjuntos não vazios e a união é X. Uma contradição, pois X é conexo.$\square$

Uma consequência imediata é o seguinte corolário.

Corolário 7.1.4 *Seja X espaço topológico e $f : X \to \mathbb{R}$ uma aplicação contínua. Então, $f(X)$ é um intervalo.*

Segue imediatamente deste corolário que se f assume os valores $f(x_0)$ e $f(y_0)$, então f assume todos os valores reais entre eles.

Proposição 7.1.5 *Seja $A \cup B$ uma separação para o espaço topológico X. Se Y é um subconjunto conexo de X, então Y está inteiramente contido em A ou B.*

Demonstração: Como A e B são abertos, então $C = A \cap Y$ e $D = B \cap Y$ são abertos em Y. Os conjuntos C e D são disjuntos e $C \cup D = Y$. Como Y é conexo, pelo menos um deles é vazio e portanto Y está inteiramente contido em A ou B.$\square$

Teorema 7.1.6 *Seja $\{A_\lambda\}$ uma coleção de conjuntos conexos tendo um ponto p em comum. Então, $Y = \cup_\lambda A_\lambda$ é conexo.*

Demonstração: Se $A \cup B = Y$ é uma separação, então p pertence a um dos conjuntos A ou B. Suponha $p \in A$. Como cada conjunto A_λ éconexo e contém p, então está contido inteiramente em A. Portanto, $\cup_\lambda A_\lambda \subseteq A$. Contradizendo o fato de B ser não vazio.$\square$

Como aplicação deste teorema provaremos o seguinte:

Teorema 7.1.7 *O produto cartesiano arbitrário de conjuntos conexos é conexo.*

Demonstração: Provaremos o resultado para uma quantidade enumerável. Seja $\{A_n\}$ uma coleção enumerável de conjuntos conexos e $X = \prod_n A_n$. A prova é por indução. Se A_1 e A_2 são conexos fixemos o ponto $(a,b) \in A_1 \times A_2$. São conexos os conjuntos $\{x\} \times A_2$ e $A_1 \times \{b\}$, pois são homeomorfos a A_2 e a A_1, respectivamente, onde $x \in A_1$. Além disso, como $\{x\} \times A_2$ e $A_1 \times \{b\}$ têm o ponto (x,b) em comum, então $X_x = (A_1 \times \{b\}) \cup (\{x\} \times A_2)$ é conexo. Observamos que X_x contém o ponto (a,b) para todo $x \in A_1$. Tomando a união $\cup_{x \in A_1} \in X_x$ temos que este conjunto é conexo pois os conjuntos conexos têm o ponto (a,b) em comum. A prova para qualquer número finito é feita por indução e usando que $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ é homemorfo a $(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_{n-1}) \times A_n$. Os detalhes ficam como exercício.$\square$

Definição 7.1.8 *Dados dois pontos x, y num espaço topológico X, um caminho em X, ligando x a y, é qualquer função contínua $f : [a,b] \to X$ tal que $f(a) = x$ e $f(b) = y$, para algum intervalo fechado $[a,b]$.*

O seguinte teorema dá uma classe ampla de conjuntos conexos.

Teorema 7.1.9 *Seja X um espaço topológico com a seguinte propriedade: para quaisquer dois pontos x e y de X existe uma função $f : [0,1] \to X$ contínua tal que $f(0) = x$ e $f(b) = y$. Então, X é conexo.*

Demonstração: Seja $A \subset X$ subconjunto não vazio, aberto e fechado. Tome $x \in A$ e $y \in X$. Então existe uma função $f : [0,1] \to X$ contínua tal que $f(0) = x$ e $f(1) = y$. Como A é aberto, então $f^{-1}(A) \subset [0,1]$ é aberto, fechado e não vazio $(0 \in f^{-1})A)$. Como $[0,1]$ é conexo, então $f^{-1}(A) = [0,1]$ e portanto $f(1) = y \in A$. Como $y \in X$ é qualquer, segue que $A = X$.$\square$

Um espaço topológico com a propriedade acima recebe um nome especial. Um espaço X é conexo por caminho se dois pontos quaisquer de X podem ser ligados por um caminho em X.

O teorema acima diz que todo espaço conexo por caminhos é conexo. Esta é a relação mais evidente entre os conceitos de conexidade e conexidade por caminhos. Daremos outra prova do teorema acima.

Teorema 7.1.10 (de novo) *Se X é conexo por caminhos, então X é conexo.*

Demonstração: Suponha que X não seja conexo. Seja $X = A \cup B$ uma separação para X e $f : [a,b] \to X$ um caminho qualquer. Como $f([a,b])$ é conexo, então o conjunto está inteiramente contido em A ou B, mas não em ambos. Segue que não existe um caminho ligando um ponto de A a um ponto de B, isto contradiz a hipótese de X ser conexo o por caminhos. Logo, X é conexo.$\square$

A recíproca do teorema 7.1.9 não é verdadeira. No seguinte exemplo apresentamos um espaço conexo que não é conexo por caminhos. Mas antes precisamos de um resultado.

Teorema 7.1.11 *Seja $A \subset X$ conexo. Se $\overline{A} = X$, então X é conexo.*

Demonstração: Seja $B \neq \emptyset$ subconjunto aberto e fechado de X. Como $\overline{A} = X$ e B é aberto segue que $A \cap B \neq \emptyset$. Como A é conexo, segue da proposição 7.1.5 que $A \subset B$. Logo, $X = \overline{A} \subset B$, pois B é fechado. Portanto, $X = B$. $\square$

Corolário 7.1.12 *Sejam A e B subconjuntos de um espaço X. Se A é conexo e $A \subset B \subset \overline{A}$. Então, B é conexo.*

Demonstração: Basta aplicar o teorema com $X = B$. Em B, com a topologia induzida de X, temos $\overline{A} = B$ e agora aplicar o teorema. □

• **Exemplo 7.1.13** *a) O seguinte conjunto é chamado de "pente"sem a origem. Seja*

$$P_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; (0 < y < 1 \quad e \; x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}) \; ou \; (y = 0 \; e \; 0 < x \leq 1)\}.$$

Note que $(0,0)$ não pertence ao conjunto P_0. O conjunto pode ser escrito como união do segmento vertical inicial S com o seu complementar T. É fácil ver que estes são conexos por caminho e portanto conexos. Além disso, temos $\overline{T} = P_0$. Segue do teorema que P_0 é conexo.

•• **Exercício 7.1.14** *1. Prove que os seguintes espaços são conexos.*

a) $\mathbb{R}^n$ $B_r(x) \subset \mathbb{R}^n$ $D_r(x) \subset \mathbb{R}^n$.

b) $S^n, \; n \geq 1$.

c) $R^n - \mathbb{Z}^n, \; n \geq 2$.

d) $R^n - \mathbb{Q}^n, \; n \geq 2$.

e) $S^1 \times S^1$.

2. Considere o conjunto

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; (x = 0 \;\; e \;\; -1 \leq y \leq q) \;\; ou \;\; (0 \leq x \leq 1) \quad e \;\; y = \sin(\frac{1}{x})\}.$$

Mostre que S é conexo.

3. Considere o conjunto

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2+y^2 = 1 \quad ou \;\; x = (\exp(\theta+1)\cos(\theta) \;\; e \;\; y = (\exp(\theta+1)\sin(\theta), \, \theta \leq \pi\}.$$

Mostre que é conexo.

A conexidade por caminhos é preservada por continuidade.

Proposição 7.1.15 *Seja X, Y espaços topológicos e $f : X \to Y$ função contínua e sobrejetora. Se X é conexo por caminhos, então Y também é.*

Demonstração: Dados y_0 e y_1 elementos de Y, sejam x_0 e x_1 tais que $f(x_i) = y_i$. Como X é conexo por caminhos, existe $\alpha : [0,1] \to X$ caminho tal que $\alpha(0) = x_0$ e $\alpha(1) = x_1$. Logo, $f \circ \alpha$ é um caminho ligando y_0 e y_1.$\square$

Um subconjunto $A \subset X$ é conexo por caminhos se A com a topologia induzida de X é conexo por caminhos.

Proposição 7.1.16 *Seja X, Y espaços topológicos e $f : X \to Y$ função contínua. Se A é conexo por caminhos, então $f(A) \subset Y$ é conexo por caminhos.*

Demonstração: exercício.

Teorema 7.1.17 *Seja $(A_i)_{i \in I}$ uma família de subconjuntos conexos por caminhos de um espaço X. Suponha que existe $i_0 \in I$ tal que $A_i \cap A_{i_0} \neq \emptyset$, $\forall i \in I$. Então $A = \cup_{i \in I} A_i$ é conexo.*

Demonstração: A idéia da prova é construir um caminho que liga dois pontos quaisquer x e y de A. Como $x \in A_j$ e $y \in A_k$, para algum j e algum $k \in I$, temos que $A_j \cap A_{i_0} \neq \emptyset$ $A_k j \cap A_{i_0} \neq \emptyset$. Então tomemos $x_j \in A_j \cap A_{i_0}$ e $x_k \in A_j \cap A_{i_0}$. Como existe um caminho ligando x a x_j, um caminho ligando x_j a x_k e um caminho ligando x_k a y, é fácil construir um caminho ligando x a y.$\square$

•• **Exercício 7.1.18** *Mostre que as condições abaixo implicam na condição do teorema acima.*
a) $\exists x_0 \in X; x_o \in A_i,\ \forall in \in I$.
b) $A_i \cap A_j \neq \emptyset,\ \forall i\ \ e j \in I$.

Definição 7.1.19 *Dado um conjunto X, definimos a seguinte relação de equivalência em $X : x \sim y$ se, e somente se, existe um subconjunto de X conexo que contém ambos. As classes de equivalênica são chamadas de componentes conexas de X. Analogamente definimos a componente conexas por caminhos.*

•• **Exercício 7.1.20** .

Mostre que as relações definidas acima são relações de equivalência.

Teorema 7.1.21 *As componentes de X são subconjuntos de X conexos e disjuntos. Além disso, cada subconjunto conexo de X intersecta apenas um deles.*

Demonstração: A relação de equivalência particiona o conjunto em subconjuntos dois a dois disjuntos. Se $A \subset X$ intersecta as componentes conexas C_1 e C_2 em pontos x_1 e x_2, respectivamente, então $x_1 \sim x_2$ e isto acontece apenas se $C_1 = C_2$. Agora provaremos que cada componente C é conexa, de fato tomemos um ponto $x_0 \in C$. Para cada $x \in C$ temos $x \sim x_0$, assim existe um conjunto conexo A_x contendo x e x_0. Como $A_x \subset C$, então $C = \cup_{x \in C} A_x$. Como os conjuntos A_x são conexos tendo o ponto x_0 em comum, então C é conexo.□

Um teorema análogo vale para componentes por caminhos. A prova é imediata e deixamos como exercício.

Teorema 7.1.22 *As componentes por caminhos são subconjuntos disjuntos conexos por caminhos. Além disso, cada subconjunto conexo por caminhos intesecta apenas uma das componentes.*

7.2 Espaços de Hausdorff

Um espaço topológico$X$ é de Hausdorff se para quaisquer dois pontos distintos x e y de X, existem vizinhanças V de x e U de y disjuntas. Neste caso dizemos que a topologia de X é Hausdorff ou que separa pontos.

É claro que todo espaço métrico é espaço de Haudorff e assim o espaço $\mathbb{R}^n$ também o é. Todo espaço com a topologia discreta é Hausdorff.O conjunto $\mathbb{N}$ com a topologia $\tau = \{A \subset \mathbb{N}; A = \emptyset \text{ ou } A^C \text{ finito}\}$ não é espaço de Hausdorff.

Definição 7.2.1 *uma sequência $(x_n), n \in \mathbb{N}$ de um espaço topológico X converge para $a \in X$ se para cada vizinhança V de a, existe $n_0 \in N$ tal que $x_n \in V$ para todo $n \geq n_0$. O ponto $a \in X$ é chamado de limite da sequência e representamos isto por*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} x_n = a.$$

Proposição 7.2.2 *Seja X um espaço de Hausdorff e (x_n) uma sequência convergente em X. Então, o seu limite é único.*

Demonstração: Suponhamos $a \neq b, \lim_{n \longrightarrow \infty} x_n = a$ e $\lim_{n \longrightarrow \infty} x_n = b$. Como $a \neq b$, existem vizinhanças $V \in a$ e $U \in b$ disjuntas e naturais n_1 e n_2 tais que $x_n \in V, \forall n \geq n_1$ e $x_n \in U, \forall n \geq n_2$. Tomando $n_0 = \max n_1, n_2$, temos que $x_n \in V \cap U, \forall n \geq n_0$, o que é absurdo.□

Teorema 7.2.3 *Um espaço X é Hausdorff se, e somente se, a diagonal $\Delta = \{(x, x); x \in X\}$ é conjunto fechado em X^2.*

Demonstração: Suponha que X é Hausdorff, provaremos que Δ^c é aberto em X^2. O par $(x, y) \in \Delta^c$ se, e somente se $x \neq y$, como X é Hausdorff existem vizinhanças disjuntas $V \ni x$ e $U \ni y$. Então, $V \times U \cap \Delta = \emptyset$, isto é, $(V \times U) \subset \Delta^c$ e portanto Δ^c é aberto.

Reciprocamente, se Δ é fechado então Δ^c é aberto. Dado $(x, y) \in \Delta^c$ existe um aberto do tipo $V \times U \subset \Delta^c$ com $(x, y) \in V \times U$ e V e U são abertos de X. Como $(V \times U) \cap \Delta^c = \emptyset$, temos que $V \cap U = \emptyset$ e assim X é Hausdorff. $\square$

Proposição 7.2.4 *Sejam $f : X \to Y$ uma função contínua e Y um espaço de Hausdorff. Então, o Graf(f) é um conjunto fechado em $X \times Y$.*

Demonstração: Defina a aplicação F dada por $X \times Y \mapsto ((fx), y) \in Y^2$ que é claramente contínua. Se Δ_Y é a diagonal de Y^2 temos que

$$\text{Graf}(f) = F^{-1}(\Delta_Y).$$

Como Y é espaço de Hausdorff, a diagonal Δ_Y é fechado e assim Graf(f)é fechado em $X \times Y$.$\square$

•• **Exercício 7.2.5** *1. Sejam $(X_i), i = 1 \cdots, n$ espaços de Hausdorff. Mostre que $X = \prod_i^n X_i$ é espaço de Hausdorff.*
2. Seja $f : X \to Y$ um homeomorfismo e X espaço de Hausdorff. Mostre que Y é espaço de Hausdorff.

7.3 Espaços Compactos

Uma coleção $\mathcal{C}$ de subconjuntos de um espaço X é chamada uma cobertura para X, se a união dos elementos de $\mathcal{C}$ é igual a X. A cobertura é chamada aberta se seus elementos são subconjuntos abertos de X.

Um espaço X é compacto se toda cobertura aberta contém uma subcoleção finita que ainda cobre X.

Definição 7.3.1 *Seja Y um subespaço de X. Uma coleção de subconjuntos de X é dita cobrir Y se a união de seus elementos contém Y.*

Lema 7.3.2 *Seja Y subespaço de X. Então, Y é compacto se, e somente se, toda cobertura de Y por abertos em X contém uma subcoleção cobrindo Y.*

Demonstração: Se Y é compacto e $\mathcal{C} = (A_\alpha)_{\alpha \in I}$ é uma cobertura de Y por abertos de X, então coleção composta dos elementos $A_\alpha \cap Y, \alpha \in I$ é uma cobertura de Y por meio de abertos em Y. Portanto, existe uma subcoleção finita $\{Y \cap A_{\alpha_i}, i = 1, \ldots, n\}$ que cobre Y. Segue que a subcoleção de $\mathcal{C}$ dada por $\{A_{\alpha_i}, i = 1, \ldots, n\}$ cobre Y.

Para provar a recíproca, seja $\mathcal{C}' = (A'_\alpha)$ uma cobertura para Y por abertos de Y. Para cada α escolhemos um aberto em X A_α tal que $A'_\alpha = A_\alpha \cap Y$. A coleção (A_α) cobre Y por meio de abertos de X. Pela hipótese, existe uma subcoleção finita $\{A_{\alpha_1}, \ldots, A_{\alpha_n}\}$ que cobre Y e portanto $\{A'_{\alpha_1}, \ldots, A'_{\alpha_n}\}$ é uma sucoleção de $\mathcal{C}'$ que cobre Y.$\square$

Teorema 7.3.3 *Todo subconjunto fechado Y de um espaço compacto X é compacto.*

Demonstração: Seja $\mathcal{A}$ uma cobertura de Y por abertos em X. Então, $\mathcal{B} = \mathcal{A} \cup (X - Y)$ é uma cobertura aberta de X. Como X é compacto, existe uma subcoleção finita de $\mathcal{B}$ que ainda cobre X. Se esta subcoleção contém $(X - Y)$, então descartando-a, obtemos uma subcoleção finita de $\mathcal{A}$ que cobre Y.Agora usamos o lema acima para concluir que Y é compacto.$\square$

Teorema 7.3.4 *Um subconjunto compacto K de um espaço de Hausdorff X é fechado.*

Demonstração: A idéia é provar que $K^c = (X - K)$ é aberto. Fixemos $x_0 \in K^c$. Para cada $k \in K$, tomemos vizinhanças U_k e V_k dos pontos x_0 e $k \in K$, respectivamente, disjuntas. A coleção $\{V_k; k \in K\}$ é uma cobertura de K por conjuntos abertos em X, segue que existem $\{V_{k_i}; k_i \in K\ , i = 1 \cdots n \in \mathbb{N}\}$ que ainda cobrem K. Assim, o conjunto aberto $V = \cup_1^n V_{k_i}$ contém K e é disjunto do conjunto aberto $U = \cap_i^n U_{k_i}$ formado pela interseção das correspondentes vizinhanças de x_0. Portanto, U é uma vizinhança de x_0 disjunta de K. Segue que $(X - K)$ é aberto. $\square$

Teorema 7.3.5 *Seja $f : X \to Y$ uma aplicação contínua. Se X é compacto, então $f(X)$ é compacto.*

Demonstração: Seja $\mathcal{A}$ uma cobertura por abertos de Y. Tomemos

$$\mathcal{B} = \{f^{-1}(A); A \in \mathcal{A}\}.$$

Como f é contínua, então $\mathcal{B}$ é um cobertura de X por abertos de X. Portanto, podemos extrair uma subcoleção de $\mathcal{B}$ digamos

$$\{f^{-1}(A_1), \cdots, f^{-1}(A_n)\}$$

que cobre X. Segue que $A_1, \cdots, A_n$ cobre $f(X)$.$\square$

O próximo teorema é importante na construção de homeomorfismos.

Teorema 7.3.6 *Seja $f : X \to Y$ uma bijeção contínua. Se X é compacto e Y é Hausdorff, então f é um homeomorfismo.*

Demonstração: Para provar que f^{-1} é contínua, provaremos que a imagem por f de todo conjunto fechado é fechado em Y. Seja $A \subset X$ fechado, então segue que A é compactoe assim $f(A)$ é compacto. Como Y é espaço de Hausdorff, $F(A)$ é fechado em Y.$\square$

Teorema 7.3.7 *Seja $A \subset \mathbb{R}$. Então, A é compacto se, e somente se, A é limitado e fechado.*

Demonstração: Se A é compacto, então A é fechado pois $\mathbb{R}$ é Haudorff. Provaremos que é limitado. Para isto tomemos os abertos $U_n = (-n, n) \cap A, n \in \mathbb{N}$, de A que claramente cobrem A. Pela compacidade, existem $U_{n_1}, \cdots, U_{n_k}$

que cobrem A. Logo, $A \subset (-n_k, n_k)$. Para a recíproca basta provar que todo intervalo $[a, b]$ é compacto, pois A sendo limitado ele está contido em algum intervalo $[a, b]$. Consideremos uma cobertura $(U_i) = U'_i \cap [a, b], i \in I$ por abertos de $[a, b]$, onde os conjuntos U'_i são abertos de $\mathbb{R}$. Seja

$$K = \{x \in [a, b]; \exists J finito, J \subset I \text{ e } [a, x] \subset \cup_{j \in J} U_j\}.$$

Provaremos que $K = [a, b]$. Existe $i \in\in I$ tal que $a \in U_i$ e portanto, $[a, a+\epsilon] \subset U_i$ para algum $\epsilon > 0$. Como $K = \cup\{[a, x], x \in [a, b]\}$, K é um intervalo. Seja $s = \sup K$. Se provarmos que $s = b$, então teremos provado o que queríamos, isto é, $[a, b]$ é coberto por uma subfamília finita. Sabemos que existe $i_s \in I$ tal que $s \in U_{i_s}$ e portanto existe $\epsilon > 0$ tal que $(s - \epsilon, s + \epsilon) \subset U_{i_s}$. Como $s = \sup K$, então exsite $x \in K$ tal que $s - \epsilon < x < s + \epsilon; x \in U_{i_s}$. Pela definição de K, existe J finito tal que $[a, x] \subset \cup_{j \in J} U_j$. Segue que a família $(U_j), j \in J$ juntamente com U_{i_s} cobre $[a, s + \epsilon]$. Isto é, $[a, s + \epsilon) \subset K$ o que está em contadição com a definição de s. Devemos ter então $s = b$.□O mesmo resultado vale para conjuntos do $\mathbb{R}^n$.

Teorema 7.3.8 (Heine-Borel) *Seja $A \subset \mathbb{R}^n$. Então, A é compacto se, e somente se, A é limitado e fechado.*

Demonstração: É fácil provar que A compacto implica em limitado e fechado. Provaremos a implicação inversa, i.e., A fechado e limitado implica A compacto; para isto usaremos o fato que o produto cartesiano de um número finito de compactos é compacto. Como A é limitado, então existe um retângulo $S = [-m, m] \times \cdots \times [-m, m], (n \text{ vezes})$ tal que $A \subset S$. Sendo S compacto e A fechado segue que A é compacto.

O seguinte teorema, usado acima, é muito importante. Sua prova é difícil e não é nosso objetivo apresentá-la aqui.

Teorema 7.3.9 *(Tychonoff): O produto de infinitos espaços compactos é compacto.*

7.4 Compactos de um espaço métrico

Já provamos que na reta real os conjuntos fechados e limitados coincidem com os conjuntos compactos. Nesta seção provaremos outros resultados importantes em espaços métricos. Iniciamos com alguns resultados em $\mathbb{R}^n$.

Um retângulo S no espaço $\mathbb{R}^n$ é um conjunto da forma $I_1 \times \cdots \times I_n$ onde cada I_k é um intervalo compacto de $\mathbb{R}$. Uma sequência de conjuntos é dita uma sequência de conjuntos encaixada se $S_{k+1} \subset S_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Teorema 7.4.1 *Seja (S_k) um sequência de retângulos encaixados do $\mathbb{R}^n$. Então, $\cap_{k=1}^{\infty} S_k \neq \emptyset$.*

Demonstração: Primeiro provaremos o resultado em $\mathbb{R}^1$. Seja (I_k) uma sequência de intervalos compactos $[a_k, b_k]$. Sejam

$$A = \{a_k, k \in \mathbb{N}\}$$
$$B = \{b_k, k \in \mathbb{N}\}.$$

Como a sequência é encaixada cada elemento de B é um limite superior para A. Seja $a = \sup A$, então $a_k \leq a \leq b_k$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Segue que $a \in I_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$, provando que a interseção é não vazia.

Tomemos agora uma sequência de retângulos encaixados da forma $S_k = I_k^{(1)} \times \cdots I_k^{(n)}$ em $\mathbb{R}^n$. A primeira parte já provada mostra que existe um número $a_l \in I_k^{(l)}$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Mas então

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in I_k^{(1)} \times \cdots I_k^{(n)}$$

para cada $k \in \mathbb{N}$. Portanto existe $a \in S_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$.□

Como aplicação podemos agora provar que $\mathbb{R}$ é não enumerável.

Corolário 7.4.2 *$\mathbb{R}$ é não enumerável.*

Demonstração: Basta provar que $[0,1]$ é não enumerável. Se fosse enumerável, tomaríamos $f : \mathbb{N} \to [0,1]$ sobrejetora, então $f(1)$ não está em pelo menos um dos intervalos $[0,1/3]$, $[1/3,2/3]$, $[2/3,1]$. Seja I_1 este intervalo. Quebrando este intervalo em três outros subintervalos congruentes, pelo menos um deles não contém $f(2)$. Denote este intervalo por I_2. Continuando desta maneira, obtemos uma sequência de intervalos compactos encaixados (I_k) tal que $f(k) \in I_k^c$, $\forall k \in \mathbb{N}$, onde I_k^c é o complementar de I_k. Segue que

$$f(\mathbb{N}) \subset \cup_{k=1}^{\infty} I_k^c = (\cap_{k=1}^{\infty} I_k)^c.$$

Isto contradiz a hipótese que f é sobrejetora porque a interseção da sequência (I_k)é não vazia.□

O teorema de Bolzano-Weierstrass é um dos mais importantes resultados da Análise real.

Teorema 7.4.3 (Bolzano-Weierstrass) *Todo conjunto infinito limitado E do $\mathbb{R}^n$ tem um ponto de acumulação.*

Demonstração: Como E é limitado, então está contido em algum retângulo fechado S. O retângulo S pode ser coberto por um número finito de subretângulos onde cada um deles tem dimensões igual a metade das dimensões de S. Pelo menos um desses subretângulos contém um subconjunto infinito E_1 de E. Seja S_1 este subretângulo contendo E_1. Repetindo o processo com o conjunto infinito e limitado E_1 obtemos um subretângulo S_2 de dimensões igual a metade das dimenões de S_1 e que contém um subconjunto infinito E_2 de E_1. Seguindo este procedimento contuímos uma sequência (S_k) de subretângulos compactos onde cada um contém um subconjunto infinito. Pelo teorema dos retângulos encaixados existe um elemento $a \in S_k$,
, $\forall k \in \mathbb{N}$. Seja B a bola de centro a e raio $\epsilon > 0 qualquer$. Como as dimensões de cada S_k é 2^{-k} vezes as dimensões de S, então S_k estará dentro de B para k suficientemente grande. Assim, B contém um conjunto infinito de E e

portanto a é um ponto de acumulação.$\square$O teorema da interseção de Cantor generaliza o teorema dos retângulos encaixados.

Teorema 7.4.4 *Seja (F_n) uma sequência de subconjuntos não vazios, fechados e encaixados de um conjunto compacto K em um espaço métrico X. Então*

$$\cap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset.$$

Demonstração: Se um dos conjuntos F_n é finito o resultado é imediato. Caso contrário podemos construir um subconjunto infinito E de K consistindo de um ponto de cada um dos conjuntos F_n. Sendo E infinito então E tem um ponto de acumulação a e como todos os elementos de E, exceto um número finito pertencem a cada fechado F_n segue que $a \in F_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Assim, $a \in \cap F_n$.$\square$

Teorema 7.4.5 *Seja K um conjunto compacto de um espaço métrico M e $f : K \to \mathbb{R}$ contínua. Então, f assume valores máximo e mínimo sobre o conjunto K, isto é, existe x_0 e $x_1 \in K$ tais que $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1), \forall x \in K$.*

Demonstração: Sabemos que $f(K)$ é compacto e portanto é limitado e fechado. Como $f(K) \subset \mathbb{R}$ é fechado e limitado superiormente, então tem um máximo. Do mesmo modo $f(K)$ tem um mínimo.$\square$

7.5 Espaços métricos completos

Uma sequência (x_n) num espaço métrico (M, d) é dita de Cauchy se, para cada $\epsilon > 0$ dado existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x_m) < \epsilon$ $\forall m, n > n_0$.

É fácil ver que toda sequência de Cauchy é limitada e que toda sequência convergente é de Cauchy. Deixamos as desmonstrações destes fatos como exercício.

Teorema 7.5.1 *Seja (M, d) um espaço métrico e (x_n) uma sequência de Cauchy em M. Se alguma subsequência (x_{n_k}) converge para $x \in M$, então (x_n) converge para x.*

Demonstração: Dado $\epsilon > 0$ existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_{n_k}, x) < \frac{\epsilon}{2}$ $\forall n_k > n_1$. Como a sequência é de Cauchy, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_m, x_n) < \frac{\epsilon}{2}$, $\forall m, n > n_2$. Tomando $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, se $n > n_0$ podemos escolher $n_k > n_0$ tal que

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Logo, $x_n \longrightarrow x$.□

Num espaço métrico, as sequências de Cauchy não são necessariamente convergentes. O corpo $\mathbb{Q}$ dos racionais é exemplo onde as sequências de Cauchy não são convergentes em $\mathbb{Q}$.

Definição 7.5.2 *Dizemos que o espaço métrico (M, d) é completo se toda sequência de Cauchy em M é convergente.*

• **Exemplo 7.5.3** *a) O conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais com a métrica usual, é um espaço métrico completo. De fato, Seja (x_n) uma sequência de Cauchy de números reais. Seja $a_n = \inf\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$. Como (x_n) é limitada temos $a_1 \leq a_2 \leq \cdots$. Seja $a = \lim a_n$. Provaremos que $\lim x_n = a$. Provaremos que existe uma subsequência convergentee portanto a sequência é convergente. Dados $\epsilon > 0$ e $n_1 \in \mathbb{N}$ existe $m\mathbb{N}$ tal que $a - \epsilon < a_m < a + \epsilon$. Como a_m é um ínfimo, então $a_m \leq a + \epsilon$ implica que existe $n > m$ tal que $a_m \leq x_m < a + \epsilon$, isto é, $x_n \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$.*□

7.6 Completamento de espaço métrico

Seja, (X, d) e (Y, d') espaços métricos. Uma aplicação $T : X \to Y$ é dita uma isometria se T preserva distâncias, isto é,

$$d(Tu, Tv) = d'(u, v), \forall u, v \in X.$$

Dizemos que X e Y são isométricos se T é uma isometria bijetora. Note que toda isometria é injetora.

Teorema 7.6.1 Para um espaço métrico (X, d) existe um espaço métrico completo (X', d') que tem um subespaço W que é denso em X'. Este espaço é único exceto por isometrias.

Demonstração: Primeiramente vamos construir o espaçhamado o completamento de (X, d). Sejam (u_n) e (v_n) sequências de Cauchy em X. Defina

$$(u_n) \sim (u_n) \Longleftrightarrow \lim_{n\longrightarrow\infty} d(u_n, v_n) = 0.$$

Esta relação é uma relação de equivalência.Seja $\hat{X}$ o espaço de todas as classes de equivalências $\hat{x}, \hat{u}, \ldots$. Defina

$$\hat{d}(\hat{u}, \hat{v}) = \lim_{n\longrightarrow\infty} d(u_n, v_n),$$

onde $(u_n) \in \hat{u}, (v_n) \in \hat{v}$. São perguntas naturais: este limite existe? Depende dos representantes? Estas questões ficam como exercí cio. Como $d(u_n, v_n) \leq d(u_n, u_m) + d(u_m, v_m) + d(v_m, v_n)$ obtemos

$$d(u_, v_n) - d(u_m, v_m) \leq d(u_n, v_m) + d(v_m, v_n)$$

e trocando m por n temos que

$$|d(u_n, v_m) - d(u_n, v_n)| \leq d(u_n, u_m) + d(v_m, v_n).$$

Como (u_n) e (v_n) são de Cauchy, seque que $|d(u_n, v_m) - d(u_n, v_n)|$ é tão pequeno quanto desejado. Deixamos como exercício mostrar que $\hat{d}$ é uma métrica.

Agora vamos construir a isometria. A cada $b \in X$ associamos a classe $\hat{b} \in \hat{X}$ que contém a sequência constante $b = (b, b, b, \ldots)$. Defina $T : X \rightarrow W$ dada por $T(b) = \hat{b}$ e $W = T(X)$. T é uma isometria, pois $\hat{d}(\hat{b}, \hat{c}) =$

$\lim_{n\longrightarrow\infty} d(b,c) = d(b,c)$. Além disso, pela definição T é sobrejetora e assim W e X são isométricos.

Agora provaremos que $\overline{W} = \hat{X}$. Considere $\hat{x} \in \hat{X}$ e seja $(x_n) \in \hat{x}$. Dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x_N) < \frac{\epsilon}{2}, \forall n > N$. Seja $(x_N, x_N, \ldots) \in x_N$. Então, $\hat{x_N} \in W$ e

$$\hat{d}(\hat{x_N}, \hat{x}) = \lim_{n\longrightarrow\infty} d(x_n, x_N) \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

Isto prova que toda $\epsilon-$vizinhança de $\hat{x}$ contém um elemento de W. Logo, W é denso em $\hat{X}$.

Para mostrar que $\hat{X}$ é completo, tomemos uma sequência de Cauchy em $\hat{X}$, como W é denso em $\hat{X}$ para todo $\hat{x_n}$ existe $\hat{z_n} \in W$ tal que $\hat{d}(\hat{x}, \hat{z_n}) < \frac{1}{n}$. Logo, $\hat{d}(\hat{z_n}, \hat{z_m}) \leq \hat{d}(\hat{z_m}, \hat{x_m}) + \hat{d}(\hat{x_m}, \hat{x_n}) + \hat{d}(\hat{x_n}, \hat{z_n}) < \frac{1}{m} + \hat{d}(\hat{x_m}, \hat{x_n}) + \frac{1}{n}$, que tende a zero. Assim a sequência $(\hat{z_m})$ é de Cauchy.

Como T é isometria e $\hat{z_m} \in W$ a sequência (z_m), onde $z_m = T^{-1}(\hat{z_m})$ é de Cauchy em X. Seja $\hat{x} \in \hat{X}$ a classe tal que $(z_m) \in \hat{x}$. Vamos provar que $\hat{x} = \lim_{n\longrightarrow\infty}(\hat{x_n}$. De fato, $\hat{d}(\hat{x}, \hat{x_n}) \leq \hat{d}(\hat{x_n}, \hat{z_n}) + \hat{d}(\hat{x}, \hat{z_n}) < \hat{d}(\hat{x}, \hat{z_n}) + \frac{1}{n}$.

Como $(z_m)\mathbb{N}\hat{x}$ e $\hat{z_n} \in W$, então $(z_n, z_n, \ldots) \in \hat{z_n}$, e assim, $\hat{d}(\hat{x}, \hat{z_n}) + \frac{1}{n} < \lim_{m\longrightarrow\infty} d(z_n, z_m) + \frac{1}{n}$, que tende a zero. Assim, $(\hat{X}, \hat{d})$ é completo. A unicidade é deixado como exercício.

• **Exemplo 7.6.2** a)Seja $C_\infty(\mathbb{R}) = \{f; f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua e $\lim_{x\longrightarrow\pm\infty} f(x) = 0\}$ munido da métrica induzida pela norma do supremo é um espaço completo.
b) Seja $C_c(\mathbb{R}) = \{f; f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua de suporte compacto $\}$ munido da métrica induzida pela norma do supremo não é completo. O seu completamento é o espaço $C_\infty(\mathbb{R})$.
c) Para $1 < p \leq \infty$ seja $C([0,1])$ o espaço das funções contínuas munido da métrica induzida pela norma dada por

$$||f||_p = (\int_0^1 |f(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}}$$

não é completo. O completamento desses espaços é $L^p([0,1])$.

Capítulo 8

O Teorema Fundamental da Álgebra

8.1 Introdução

Neste capítulo vamos dar uma aplicação importante das funções contínuas.

O problema de encontrar raízes de um polinômio é antigo. Já por volta de 1600 AC os babilônios possuíam tabelas que permitiam resolver equações quadráticas. Os gregos antigos resolviam equações quadráticas por meio de construções geométricas, não existia sinal algum de formulação algébrica até 100 DC. Os gregos tinham métodos aplicáveis a equações cúbicas envolvendo interseção de cônicas.

A solução algébrica da cúbica era desconhecida e em 1494 Pacioli em sua "Summa Arithmetica"observa que a solução das equações $x^3 + mx = n$ e $x^3 + n = mx$ eram impossíveis. Na Renascência os matemáticos de Bolonha descobriram que a equação cúbica geral podia ser reduzida a três casos básicos $x^3 + px = q$, $x^3 = px + q$ e $x^3 + q = px$. A separação em casos foi necessário pois eles não conheciam números negativos.

Scipio del Ferro resolveu todos os três casos e certamente passou o seu método a um estudante, Fior. Nicollo Fontana (ou Tartaglia) em 1535 redescobriu o método. Fontana demonstrou o seu método numa competição pública, mas recusou-se a revelar os detalhes. Finalmente ele foi convencido pelo físico Girolano Cardano a revelar o segredo, mas com a condição de não revelar a mais ninguém. Quando a "Ars Magna"de Cardano apareceu em 1545 ela continha uma completa discussão da solução de Fontana. Continha também o método de Ludovico Ferrari para resolver a equação de quarto grau por redução a uma cúbica. Girolano sentiu-se desobrigado de cumprir o trato com Tartaglia pois descobriu que o seu método de solução já era conhecido. A solução de Fontana para $x^3 + px = q$ é

$$x = \frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}} + \frac{q}{2} - \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}.$$

A expressão acima só envolve os coeficientes da equação, adição, subtração, multiplicação, divisão e extração de raiz. Tais expressões são conhecidas como expressões radicais.

Vamos apresentar nestas notas uma prova elementar do famoso teorema fundamental da Álgebra, esta prova usa apenas propriedades das funções contínuas.

O conjunto de todos os polinômios sobre $\mathbb{R}$ munido das operações abaixo se transformará em um anel:

Adição:

$$(a_0, \ldots, a_n, \ldots) + (b_0, \ldots, b_n, \ldots) = (a_0 + b_0, \ldots, a_n + b_n, \ldots),$$

Multiplicação:

$$(a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots) \cdot (b_0, b_1, \ldots, b_n, \ldots) = (c_0, c_1, \ldots, c_k, \ldots),$$

onde

$$c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_{k-i}.$$

Denotaremos por $(A[x], +, \cdot)$ o anel dos polinômios sobre o anel A com as operações definidas acima. É fácil mostrar que se $(A, +, \cdot)$ é um anel comutativo com identidade então $(A[x], +, \cdot)$ também é um anel comutativo com identidade.

Quando $(A, +, \cdot)$ é um domínio de integridade, $f \neq 0$ e $g \neq 0$ são polinômios sobre A, o grau$(f \cdot g) =$ grau$(f)+$ grau(g) . E concluímos que $f \cdot g \neq 0$. Segue que se $(A, +, \cdot)$ é um domínio de integridade, então $(A[x], +, \cdot)$ é um domínio de integridade.

É usual representar um polinômio

$$f = (a_0, a_1, \cdots, a_n, \ldots)$$

sobre um anel A por

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n.$$

Neste caso também escrevemos

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n.$$

Assim o polinômio $(a, 0, 0, \cdots)$ representa o polinômio constante $ax^0 = a$. Segue que a representa ou um elemento de A ou um elemento de $A[x]$.

Em $\mathbb{Z}_2[x]$ o polinômio $p(x) = x^2 - x$ não é o polinômio nulo, mas $\varphi : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$ dada por $\varphi(b) = b^2 - b$ é uma função identicamente nula.

Se $f(b) = 0$ dizemos que $b \in A$ é uma raiz da equação funcional $f(x) = 0$. Segue que todo elemento de A é uma raiz do polinômio nulo.

O seguinte teorema é importante, mas não estamos interessados na sua prova.

Teorema 8.1.1 Seja K um corpo, a e $b \in K[x]$. Se $b \neq 0$, então existem polinômios únicos $q, r \in K[x]$ tais que

$$a = bq + r, \; r = 0 \text{ ou grau}(r) < \text{grau}(b).$$

Corolário 8.1.2 Seja K um corpo e $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ um polinômio não nulo em $K[x]$ de grau n. Então, f tem no máximo n raízes em K.

Demonstração: A demonstração é uma aplicação do algoritmo da divisão. Se f não possui raiz, não há o que provar. Se f tem grau 1, o resultado é verdadeiro. Suponha que o resultado seja verdadeiro para todos os polinômios de grau menor ou igual a $(n-1)$. Seja f de grau n. Se f não tem raiz em K não há nada a ser provado. Caso contrário seja $a \in K$ uma raiz de f. Como $(x-a)$ divide f então podemos escrever

$$f(x) = (x-a)q(x)$$

para algum para algum $q(x) \in K[x]$ de grau $(n-1)$. Notemos que toda raiz de $q(x)$ é também raiz de f e por outro lado se $b \neq a$ é raiz de f então temos que $(b-a)q(b) = 0$ e portanto b é raiz de $q(x)$. Logo, as raízes de f são as raízes de $q(x)$ e a. Como $q(x)$ tem grau $(n-1)$ segue da hipótese de indução que $q(x)$ tem no máximo $(n-1)$ raízes. Logo, $f(x)$ tem no máximo n raízes. $\square$

Se L e K são dois corpos tais que $L \supset K$, dizemos que L é uma extensão de K. É imediato do teorema anterior que se $f(x) = a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0$ é polinômio não nulo em $K[x]$ de grau n, então $f(x)$ possui no máximo n raízes em qualquer extensão L de K.

Dizemos que um corpo K é algebricamente fechado se todo polinômio não escalar de $K[x]$ tem pelo menos uma raiz em K. Segue do teorema da raiz, que se K é um corpo algebricamente fechado então todo polinômio não escalar de $K[x]$ tem todas as raízes em K.

Seja $f(x) \in K[x]$ com grau pelo menos 1. Dizemos que f é polinômio irredutível sobre K se toda vez que

$$f(x) = g(x) \cdot h(x), \quad g, h \in K[x]$$

implicar que $g(x) = a$ constante ou $h(x) = b$ constante.

Se f não for irredutível, então f é dito redutível sobre K.

Teorema 8.1.3 Seja K um corpo. Todo polinômio $f(x) \in K[x]$ de grau ≥ 1 é irredutível ou se decompõe num produto

$$p_1(x) \cdot p_2(x) \cdots p_n(x)$$

de polinômios irredutíveis.

Além disso, os polinômios $p_1, p_2, \cdots, p_n$ são determinados de modo único, a menos de um rearranjo e a menos de fatores constantes não nulos.

Demonstração: Primeiro provaremos a possibilidade de fatoração. A prova é por indução sobre o grau(f). Se o grau de f é igual a 1, então é claro que f é irredutível.

Suponha que todo polinômio $g \in K[x]$ de grau menor que grau(f) pode ser escrito como produto de irredutíveis ou é irredutível. Vamos provar que o mesmo vale para f. Se fé irredutível, não há o que provar. Se fé redutível, então

$$f = gh,$$

onde $g, h \in K[x]$ são polinômios de $K[x]$ com

$$\begin{aligned} \text{grau}(g) &< \text{grau}(f) \\ \text{grau}(h) &< \text{grau}(f). \end{aligned}$$

Pela hipótese de indução ge $h$são irredutíveis ou são produto de irredutíveis:

$$\begin{aligned} g(x) &= g_1(x) \cdot g_2(x) \cdots g_k(x) \\ h(x) &= h_1(x) \cdot h_2(x) \cdots h_l(x). \end{aligned}$$

Logo, $f(x)$é irredutível ou é um produto de irredutíveis:

$$f(x) = g_1(x) \cdot g_2(x) \cdots g_k(x) \cdot h_1(x) \cdot h_2(x) \cdots h_l(x).$$

Provaremos agora a unicidade da decomposição:
suponha que

$$f(x) = p_1(x) \cdots p_r(x) = q_1(x) \cdots q_s(x)$$

onde p_ie q_i são irredutíveis. Desta igualdade temos que $p_1|q_i$para algum $i = 1, 2, \cdots, s$.Como q_ié irredutível, então $p_1 = c_i q_i$,para alguma constante c_i. Rearranjando os polinômios q_i podemos supor que $q_i = q_1$.Segue que

$$g(x) = g_1(x) \cdot g_2(x) \cdots g_k(x)$$
$$h(x) = h_1(x) \cdot h_2(x) \cdots h_l(x).$$

Cancelando temos

$$f(x) = p_2(x) \cdots p_r(x) = c_1 q_2(x) \cdots q_s(x).$$

Repetindo o argumento, concluímos que após uma possível permutação dos polinômios q_i, existem constantes $c_i$tais que

$$p_i(x) = c_i q_i(x), \quad i = 1 \cdots, s.$$

Isto prova a unicidade. □

Corolário 8.1.4 Seja $f \in K[x]$ polinômio de grau pelo menos 1. Então f admite uma fatoração

$$fx) = cp_1(x) \cdot p_2(x) \cdots p_r(x)$$

de polinômios irredutíveis mônicos, determinados de modo único a menos de uma permutação.

Corolário 8.1.5 Se K é um corpo algebricamente fechado, todo polinômio $f \in K[x]$ de grau ≥ 1 admite uma fatoração

$$f(x) = c(x - a_1) \cdot (x - a_2) \cdots (x - a_n)$$

com $a_i \in K$ e $c \in K$. Os fatores $(x - a_i)$ são determinados de modo único a menos de uma permutação.

Demonstração: A prova é imediata.

8.2 A prova do teorema fundamental

Nesta secção provaremos que $\mathbb{C}$ é algebricamente fechado, isto é, os únicos polinômios irredutíveis de $\mathbb{C}[x]$ são os polinômios lineares $a + bx$.

O corpo $\mathbb{C}$ foi construído para conter todas as raízes de polinômios reais irredutíveis, é o que provaremos a seguir. É fácil ver que o polinômio $g(x) = x^2 + ax + b$,com $a, b \in \mathbb{C}$ tem raízes em $\mathbb{C}$, pois

$$g(x) = (x + \frac{a}{2} + d) \cdot (x + \frac{a}{2} - d),$$

onde $\frac{a^2}{4} - b = d^2$. Assim todo polinômio de grau 2 se fatora num produto de dois polinômios complexos lineares.

Para polinômios de grau 3, $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$, com coeficientes em $\mathbb{C}$, fazendo $h = -\frac{b}{3}$ obtemos

$$f(y + h) = y^3 + py + q, \quad p, q \in \mathbb{C}.$$

Agora usando a substituição de Viète $y = z - \frac{p}{3z}$ obtemos que

$$f(z - \frac{p}{3z}) = z^3 - \frac{p^3}{27z^3} + q.$$

Assim,

$$z^3 - \frac{p^3}{27z^3} + q = 0$$

é uma equação quadrada em z^3 e portanto

$$z_1^3 = \frac{-q + \sqrt{-\frac{D}{27}}}{2},$$

$$z_2^3 = \frac{-q - \sqrt{-\frac{D}{27}}}{2},$$

são as raízes, onde $D = -(4p^3 + 27q^2)$. Como

$$z^3 + z(-3rs0 + (r^3 + s^3) = (z + r + s)(z + wr + w^2 s)(z + w^2 r + ws)$$

onde $p = -3rs$ e $q = r^3 + s^3$, segue que as raízes de $y^3 + py + q = 0$ são

$$\begin{aligned} y_1 &= z_1 + z_2 \\ y_2 &= wz_1 + w^2 z_2 \\ y_2 &= w^2 z_1 + wz_2, \end{aligned}$$

onde $w \in \mathbb{C}$ é a raiz cúbica da unidade.

A equação polinomial geral do quarto grau pode ser reduzida, via mudança de variáveis, para

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0,$$

e em seguida reduzida, com $u, v, w \in \mathbb{C}$ convenientes, para a forma

$$(y^2 + \frac{u}{2})^2 - (vy + w)2 = 0.$$

Comparando obtemos que

$$\begin{aligned} p &= u - v^2, \\ q &= -2vw, \\ r &= \frac{u^2}{4} - w^2. \end{aligned}$$

Substituindo em $r = \frac{u^2}{24} - w^2$ obtemos

$$v^6 + 2pqv^4 + (p^2 - 4r)v^2 - q^2 = 0,$$

que é uma equação cúbica em v^2 e as raízes desta equação determinar explicitamente por meio de radicais.

Até grau 4 as raízes são obtidas por meio de radicais. Não é verdade para polinômios gerais com graus maior ou igual a 5, este é o famoso teorema de Abel. Apesar do teorema de abel, temos

Teorema 8.2.1 (Teorema Fundamental da Álgebra) *Todo polinômio $p(z)$ em $\mathbb{C}[z]$ de grau maior ou igual a 1, tem uma raiz em $\mathbb{C}$. Isto é, $\mathbb{C}$, é algebricamente fechado.*

A prova elementar que apresentaremos é basicamente a prova dada por Argand em 1814.

Observamos que um polinômio $p(z)$ com coeficientes complexos pode ser escrito da forma

$$p(z) = p(x + iy) = p_1(x, y) + ip_2(x, y),$$

onde $p_1(x, y)$ e $p_2(x, y)$ são polinômios reais nas variáveis reais x, y. Segue que

$$|p(z)| = \sqrt{p_1(x, y)^2 + p_2(x, y)^2},$$

que é claramente função contínua nas variáveis x, y. Na prova usaremos o fato básico da Topologia que uma função contínua num disco fechado D do plano tem um mínimo em D. A prova está dividida em duas partes, provaremos que:

a) existe um ponto z_0 no plano complexo tal que

$$|p(z_0) \leq |p(z)|, \ \ \forall z \in \mathbb{C},$$

b) se z_0 é o ponto de mínimo global determinado na primeira parte, então $p(z_0) = 0$.

Primeiramente vamos provar um lema que será útil na prova do teorema fundamental.

Lema 8.2.2 Se $f(z) \in \mathbb{C}[z]$ é polinômio de grau maior ou igual a 1, então dado $M > 0$ existe $R > 0$ tal que se $|z| > R$, então $|f(z) \geq M$.

Demonstração: A prova é sobre indução sobre o grau de f. Se o grau de f é igual a 1, então $f(z) = a + bz, b \neq 0$. Logo,

$$|f(z)| = |a + bz| \geq |bz| - |a| = |b| \cdot |z| - |a|.$$

Dado $M > 0$ escolha

$$R = \frac{M + |a|}{|b|}$$

e assim se $|z| > R$ então $vert f(z) > M$.

Assuma que o lema é verdade para polinômios de grau $(d-1)$. Então $f(z)$ pode ser escrito na forma $f(z) = a + zf_1(z)$, onde $f_1(z)$ tem grau $(d-1)$. Dado $M > 0$ escolha $R \geq 1$ tal que para $|z| > R$, $|f(z)| > M + |a|$, isto é possível pela hipótese de indução.

Então, para $|z| > R$,

$$\begin{aligned} |f(z)| &= |a + zf_1(z)| \\ &\geq |zf_1(z)| - |a| \\ &= |z| \cdot |f_1(z)| - |a| \\ &\geq |f_1(z)| - |a| \\ &\geq M + |a| - |a| = M, \end{aligned}$$

provando assim o lema.

Para provar o teorema fundamental, seja

$$p(z) = z^m + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0.$$

Existe $R > 0$ tal que se $|z| > R$, então $|p(z)| > 1 + |a_0|$, para todo $z \in \mathbb{C}$.

Seja

$$D = \{z \in \mathbb{C}; |a| \leq R\}.$$

Como D é fechado e limitado no plano, então sabemos que existe $z_0 \in D$ tal que

$$|p(z_0)| \leq |p(z)|, \;\; \forall z \in D.$$

Pela escolha de D, temos que

$$|p(z_0)| \leq |p(z), \;\; \forall z.$$

Pois se $z \notin D$, então $|z| > R$ e assim $|p(z)| \geq 1 + |a_0| > |p(0)|$. Como $0 \in D, |p(0)| \geq |p(z_0)|$. Assim,

$$|p(z_0)| \leq |p(z)|, \;\; \forall z \in D \;\; \text{ou} \;\; z \notin D.$$

Agora provaremos que $p(z_0) = 0$. Fazendo a mudança de variáveis $w = z - z_0$, então

$$p(z) = p(w + z_0) = q_1(w)$$

é um polinômio em w e

$$|q_1(0)| = |p(z_0)| \leq |p(z)| = q_1(w)|, \ \forall w.$$

Assim q_1 tem mínimo global em $w = 0$.

Provaremos que $q_1(0) = 0$. Se este for o caso, não há o que fazer. Se $q_1(0) = a \neq 0$, chegaremos a uma contradição. Suponha $a \neq 0$ e seja $q_2(w) = \frac{1}{a} q_1(w)$. Então, $|q_2(w)|$ tem um mínimo em $w = 0$ se e, somente se, $|q_1(w)|$ tem um mínimo em $w = 0$.

Agora $q_2(w)$ tem a forma

$$q_2(w) = 1 + bw^m + b_1 w^{m+1} + \cdots + b_k w^{m+k},$$

onde $m + k = n$.

Seja r a $m-$ésima raiz de $(-\frac{1}{b})$. Então, $br^m = -1$. Seja $w = ru$ e $q(u) = q_2(ru) = q_2(w)$. Então, $|q(u)|$ tem um mínimo e $u = 0$ se e, somente se, $|q_2(w)|$ tem um mínimo e, $w = 0$. Agora, $q(u)$ tem a forma

$$\begin{aligned} q(u) &= 1 + b(ru)^M + \cdots + b_k (ru)^{m+k} \\ &= 1 - u^m + u^{m+1} Q(u), \end{aligned}$$

onde

$$Q(u) = c_1 + c_2 u + \cdots + c_k u^{k-1}$$

é um polinômio em u com $c_j = b_j r^{m+j}, 1 \leq j \leq k$. Note que $q(0) = 1$, assim 1 é um valor mínimo de $|q(u)|$.

Seja $t > 0$ real. Fazendo $u = t$, temos

$$\begin{aligned} |Q(t)| &= |c_1 + c_2 t + \cdots + c_k t^{k-1}| \\ &\leq |c_1| + |c_2 t + \cdots + c_k t^{k-1}. \end{aligned}$$

Seja

$$Q_0(t) = |c_1| + |c_2 t + \cdots + c_k t^{k-1}.$$

Quando $t \longrightarrow 0$, temos que $tQ_0(t) \longrightarrow 0$. Escolha $0 < t < 1$ tal que $tQ_0(t) < 1$.

Vamos mostrar que esta escolha de t, fazendo $u = t$ dá $|q(t)| < 1 = |q(0)|$, contradizendo a hipótese que $|q(u)|$ tem seu mínimo em $u = 0$. De fato,

$$\begin{aligned} |q(t)| &= |1 - t^m + t^{m+1}Q(t)| \\ &\leq |1 - t^m| + |t^{m+1}Q(t)| \\ &= (1 - t^m) + t^m t|Q(t)| \\ &= (1 - t^m) + t^m(tQ_0(t)). \end{aligned}$$

Como t é escolhido de modo que $tQ_0(t) < 1$, este último número é menor do que

$$(1 - t^m) + t^m = 1 = |q(0)|.$$

Como $t \neq 0$, $|q(u)|$ não tem seu mínimo em $u = 0$. Contradição. Logo, $a = 0$ o que implica que $q_1(0) = 0$ e portanto $p(z_0) = 0$.$\Box$

Capítulo 9

Teoremas de Ponto fixo e Aplicações

9.1 Introdução

Se um conjunto é levado em si mesmo por uma função f, pode acontecer que algum ponto seja mantido fixo pela função. Um ponto x satisfazendo $f(x) = x$ é chamado ponto fixo da aplicação f. Se um disco é rotacionado sobre si mesmo de um ângulo $\theta > 0$, o centro do disco é o único ponto fixo. Considerando agora o disco sem o seu centro, a mesma aplicação não tem ponto fixos. Assim uma aplicação de um conjunto em si mesmo pode ou não ter ponto fixo.

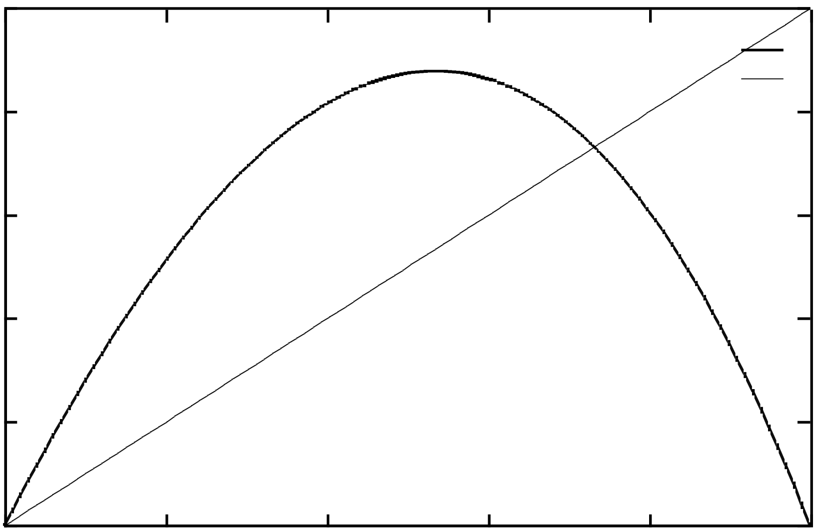
O seguinte teorema é um resultado simples, mas surpreendente, sobre existência de ponto fixo.

Teorema 9.1.1 *Toda aplicação contínua $f : [a, b] \to [a, b]$ tem pelo menos um ponto fixo.*

Demonstração: Defina a seguinte aplicação $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = f(x) - x$. Assim g mede a distância orientada entre x e sua imagem $f(x)$.

Um ponto fixo de f é um ponto x onde $g(x) = 0$. Se um dos extremos do intervalo é ponto fixo nada temos a provar. Então suponha que nenhum deles seja ponto fixo. Como $f(a)$ e $f(b)$ estão no intervalo $[a, b]$ segue que $a < f(a)$ e $f(b) < b$ e portanto $g(a) > 0$ e $g(b) < 0$. Como g é contínua, existe $x \in [a, b]$ tal que $g(x) = 0$.$\Box$

O teorema acima pode ser visualizado no gráfico abaixo.



Teorema 9.1.2 *Toda aplicação contínua de um círculo na reta tem um par de pontos diametralmente opostos com mesma imagem.*

Demonstração: Seja $f : C \to \mathbb{R}$ uma aplicação contínua do círculo C na reta $\mathbb{R}$. Se x e x' são pontos diametralmente opostos sobre C, defina $g : C \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = f(x) - f(x')$. Como f é contínua, então g também o é. Além disso,

$$g(x') = f(x') - f(x) = -(f(x) - f(x')) = -g(x).$$

Segue que g tem sinais opostos em x e em x' ou é zero em x e x'. Se $g(x) = 0$, então $f(x) = f(x')$. No outro caso, como g é contínua existe um ponto x_0 tal $g(x_0) = 0$, isto é, $f(x_0) = f(x_0')$.□

Agora vamos dar uma aplicação do resultado acima. O primeiro problema da panqueca pode ser afirmado do seguinte modo: dado duas regiões do plano (duas panquecas), dividir ambas ao meio com um único golpe de uma faca. Se as regiões são dois círculos, então a reta que passa pelos seus centros dá a divisão desejada. O problema fica mais complicado se as duas regiões não são tão simples. No entanto temos o seguinte teorema.

Teorema 9.1.3 *Se A e B são duas regiões limitadas do mesmo plano, então existe uma reta no plano que divide cada região ao meio.*

Demonstração: Por uma região do plano entendemos um subconjunto aberto e conexo. O teorema se aplica mesmo quando as duas panquecas se interceptam. Como as duas regiões são limitadas, existe um círculo C de centro z e raio r que as contém.

Para qualquer ponto $x \in C$, seja x' o ponto diametralmente oposto e D_x o diâmetro de x'a x. Provaremos que para qualquer $x \in C$, a família de todas as retas perpendiculares a D_x contém uma e apenas uma reta $L(A, x)$ que divide A em duas partes de mesma área, e uma e apenas uma reta $L(B, x)$ que divide B em duas partes de mesma área.

Se x_A e x_B denotam os pontos onde D_x encontra $L(A, x)$ e $L(B, x)$, temos sobre D_x um sistema natural de coordenadas com z na origem: a coordenada de um ponto é a distância até z, positiva quando o ponto está do mesmo lado de x, negativo caso contrário. Sejam $g_a(x)$ e $g_B(x)$ as coordenadas de x_a e x_B, respectivamente. Defina para cada $x \in C$ a função $h(x) = g_A(x) - g_B(x)$. Se mostrarmos que h é contínua e que seus valores em quaisquer dois pontos diametralmente opostos de C têm sinais opostos, o teorema acima garante a existência de um ponto $x \in C$ tal que $h(x) = h(x')$. Para este ponto devemos ter necessariamente $h(x) = 0$, e isto implica $x_A = x_B$. Assim $L(A, x) = L(B, x)$ divide ambos A e B ao meio.

9.2 Princípio da contração

Um dos teoremas mais importantes sobre ponto fixo é o teorema do ponto fixo de Banach ou o princípio da contração. Sejam (M, d) e (N, d_1) dois espaços métricos. Uma aplicação $f : M \to N$ é dita uma contração se existe $0 \leq k < 1$ tal que

$$d_1(f(x), f(y)) \leq kd(x, y), \ \forall x, y \in M.$$

É fácil ver que toda contração é uniformemente contínua.

Teorema 9.2.1 *Sejam (M, d) um espaço métrico completo e $f : M \to M$ uma contração. Então, f possui um único ponto fixo em M. Além disso, dado $x_0 \in M$ a sequência definida por*

$$x_1 = f(x_0), \ \ x_{n+1} = f(x_n), \ n \geq 1,$$

é uma sequência convergente e $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} x_n = a$ é ponto fixo de f.

Demonstração: se a sequência (x_n) definida acima converge para $a \in M$, então como f é contínua temos

$$f(a) = f(\lim x_n) = \lim f(x_n) = \lim x_{n+1} = a.$$

Provando que a é ponto fixo de f.

Se f tem dois pontos fixos a e b, então temos

$$d(a, b) = d(f(a), f(b)) \leq kd(a, b),$$

o que é absurdo a menos que $a = b$. Logo, $a = b$.

Resta provar que a sequência (x_n) converge. Notemos que $d(x_1, x_2) \leq kd(x_0, x_1)$ e que em geral $d(x_{n+1}, x_n) \leq k^n d(x_1, x_0), \forall n \in \mathbb{N}$. Segue que para $n, p \in \mathbb{N}$ temos

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+p}) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + \cdots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \\ &\leq [k^n + k^{n+1} + \cdots + k^{n+p-1}] d(x_0, x_1) \\ &\leq \frac{k^n}{1-k} d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Como $\lim k^n = 0$ segue que a sequência é de Cauchy e portanto convergente, o que completa a prova do teorema. $\square$

• **Exemplo 9.2.2** *Seja* $f : [a, b] \to [a, b]$ *uma aplicação contínua com derivada tal que* $\sup_{x \in [a,b]} |f'(x)| < 1$. *Então,* f *é uma contração.*

De fato, este resultado decorre da seguinte desiguadade

$$|f(y) - f(x)| \leq |y - x| \sup_{c \in (a,b)} |f'(c)| \leq k|y - x|.$$

Agora vamos ver um resultado que estabelece a relação entre pontos fixos de duas contrações. Duas aplicações A e B de um espaço métrico (M, d) em (M, d) são ditas ε-próximas se

$$d(Ax, Bx) \leq \varepsilon, \ \forall x \in M.$$

Teorema 9.2.3 *Sejam* A *e* B *duas contrações definidas sobre um espaço métrico completo* (M, d). *Suponha que*

$$d(Ax, Ay) \leq k_A d(x, y) \qquad d(Bx, By) \leq k_B d(x, y), \ \forall x, y \in M$$

e que A *e* B *são* ε*-próximas. Então, a distância entre seus pontos fixos não excede* $\dfrac{\varepsilon}{(1-k)}$, *onde* $k = \min\{k_A, k_B\}$.

Demonstração: Sejam x_0 e y_0 pontos fixos de A e B, respectivamente. Então y_0 é o limite da sequência $Bx_0, B^2x_0, \cdots, B^nx_0, \cdots$. Assim, temos que

$$d(x_0, B^nx_0) \leq \frac{1}{1-k_B}d(x_0, Bx_0) = \frac{1}{1-k_B}d(Ax_0, Bx_0) \leq \frac{\varepsilon}{1-k_B},$$

pois A e B são ε-próximas. Tomando o limite quando $n \longrightarrow \infty$ obtemos

$$d(x_0, y_0) \leq \frac{\varepsilon}{1-k_B}.$$

Repetindo o mesmo argumento com a sequência $Ax_0, A^2x_0, \cdots, A^nx_0, \cdots$, obtemos que

$$d(x_0, y_0) \leq \frac{\varepsilon}{1-k_A}.$$

Isto conclui a prova do teorema.□

9.3 O Teorema de Existência de Soluções para EDO

Vamos dar a prova do teorema de existência e unicidade de soluções de EDO's numa situação particular.

Teorema 9.3.1 (Existência e Unicidade) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um aberto e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ função contínua com $f_y : \Omega \to \mathbb{R}$ também contínua. Dado $(t_0, y_0) \in \Omega$, existe um intervalo aberto $I \ni t_0$ e uma única função diferenciável $\varphi : I \to \mathbb{R}$ com $(t, \varphi(t)) \in \Omega$, para todo $t \in I$, que é solução do problema de valor inicial*

$$\begin{cases} y\prime(t) = f(t, y), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \tag{9.3.1}$$

Demonstração: A função $\varphi : I \to \mathbb{R}$ é solução de (9.3.1) se e somente se, for solução da equação integral

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds, \ \ \forall t \in I. \tag{9.3.2}$$

Assim, vamos estudar detalhadamente a equação (9.3.2). Sejam a e b reais positivos tal que o retângulo

$$R = \{(t, y); |t - t_0| \leq a \text{ e } |y - y_0| \leq b\}$$

esteja inteiramente contido em Ω. Como f é contínua e R é compacto, então f é limitada em R, seja

$$M = \max\{|f(t, y)|; (t, y) \in R\}.$$

Tome

$$0 < \overline{a} \leq \min\{a, \frac{b}{M}\}$$

e o intervalo

$$J_{\overline{a}} = [t_0 - \overline{a}, t_0 + \overline{a}].$$

Seja

$$\mathcal{C} = \{g; g : J_{\overline{a}} \to \mathbb{R} \text{ contínua }, g(t_0) = y_0 \text{ e } |g(t) - y_0| \leq b\}.$$

Munimos $\mathcal{C}$ da seguinte métrica

$$d(g_1, g_2) = \max\{|g_1(t) - g_2(t)|; t \in J_{\overline{a}}\}.$$

Segue que $(\mathcal{C}, d)$ é um espaço métrico. Mais ainda, $(\mathcal{C}, d)$ é um espaço métrico completo, isto é, toda sequência de Cauchy é convergente.

De (9.3.2) observamos que toda solução deve ser ponto fixo da aplicação dada por $\mathcal{C} \ni g \mapsto \Phi(g)$ onde

$$\Phi(g)(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, g(s))ds.$$

É fácil ver que $\Phi(g)$ é contínua em $J_{\overline{a}}$ e $\Phi(g)(t_0) = y_0$. Além disso,

$$|\Phi(g)(t) - y_0| \leq |\int_{t_0}^{t} f(s, g(s))ds| \leq M|t - t_0| \leq M\overline{a} \leq b$$

e portanto $\Phi(g) \in \mathcal{C}$. Logo temos que

$$\Phi : \mathcal{C} \to \mathcal{C}.$$

Por outro lado, se g_1 e g_2 pertencem a $\mathcal{C}$ temos que

$$|\Phi(g_1)(t) - \Phi(g_2)(t)| \leq \int_{t_0}^{t} |f(s, g_1(s)) - f(s, g_2(s))| ds.$$

Como f é Lipschitiziana na variável y, existe uma constante positiva k tal que

$$|\Phi(g_1)(t) - \Phi(g_2)(t)| \leq \int_{t_0}^{t} k|g_1(s) - g_2(s)| ds \leq k\overline{a}d(g_1, g_2).$$

Segue que

$$d(\Phi(g_1), \Phi(g_2)) \leq k\overline{a}d(g_1, g_2).$$

Tomando $\overline{a}$ tal que $k\overline{a} < 1$ concluímos que Φ é uma contração. Pelo Teorema da contração, Φ tem um único ponto fixo e o teorema fica provado com $I = (t_0 - \overline{a}, t_0 + \overline{a})$. $\Box$

Apenas a continuidade da f já garante a existência de solução mas não a unicidade. Para obtermos unicidade é preciso assumir alguma condição adicional.

• **Exemplo 9.3.2** *Consideremos o seguinte problema de valor inicial*

$$\begin{cases} y\prime(x) = |y|^{\frac{1}{2}}, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Neste exemplo a função $f(x, y) = |y|^{\frac{1}{2}}$ *é contínua em todo o plano* $\mathbb{R}^2$ *e vemos claramente que* $y(x) \equiv 0$ *é solução. Mas existe ainda outra solução,*

$$y(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x^2, x \geq 0, \\ -\frac{1}{4}x^2, x < 0. \end{cases}$$

Isto ocorre porque f_y *não é contínua em* 0.

• **Exemplo 9.3.3** *Agora consideremos o seguinte problema*

$$\begin{cases} y\prime(x) = y^2, \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

A função $f(x, y) = y^2$ *e* f_y *são contínuas em todo o plano* $\mathbb{R}^2$, *assim o teorema diz que existe uma e apenas uma solução em um intervalo* $(1-\overline{a}, 1+\overline{a})$.

• **Exemplo 9.3.4 (Aplicação a sistemas de EDO)** *Considere o espaço de todas as funções da forma*

$$x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t)),$$

onde os x_i *são funções a valores reais, e o sistema de equações*

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, \ldots, x_n),\ i = 1, \ldots, n$$

que pode ser escrito na forma

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

com a condição inicial $x(0) = 0$. *É bem conhecido que isto é equivalente a equação integral*

$$x(t) = \int_0^t f(s, x(s))ds, \quad x(0) = 0.$$

Suponha que f *satisfaça a condição de Lipschitz*

$$|f(t, x) - f(t, y)| < L|x - y|$$

onde a distância é a do $\mathbb{R}^n$.

A equação pode ser tratada usando o seguinte espaço métrico completo

$$C_\alpha = \{x(t), x(t) \ \ \textit{contínua em} \ \ [0, \alpha]\}$$

a métrica definida como segue

$$d(x(t), y(t)) = \sup\{|x(t) - y(t)|, t \in [0, \alpha]\}.$$

Considere a aplicação

$$(Ax)(t) = \int_0^t f(s, x(s))ds$$

que deixa C_α invariante. Como

$$d(Ax, Ay) \leq L\alpha d(x, y),$$

para α tal que $L\alpha < 1$ podemos aplicar o princípio da contração e obtemos a existência de uma solução.

9.4 Outras noções de contração

Definição 9.4.1 *Seja (X, d) um espaço métrico e $f : X \to X$ uma aplicação contínua. Dizemos que f é uma contração generalizada no sentido de Krasnoselskii se*

$$d(f(x), f(y)) < \alpha(a, b)d(x, y)$$

para $a < d(x, y) < b$ e $\alpha(a, b) \in [0, 1)$ com $0 < a < b$.

Teorema 9.4.2 Seja (X, d) um espaço métrico e $f : X \to X$ f uma contração generalizada no sentido de Krasnoselskii. Então, existe um único ponto fixo $x_0 \in X$ de f.

Demonstração: Tomemos $x \in X$ e consideremos a sequência definida por $x_1 = f(x)$ $\;x_{n+1} = f(x_n)$. Defina $a_n = d(x_n, x_{n-1})$. Segue das propriedades de f que a sequência (a_n) é não crescente. Seja $a = \lim_{n \longrightarrow \infty} a_n$, se $a > 0$ então para N suficientemente grande e para todo m, temos

$$a_{N+m} \leq [\alpha(a, a + 1)]^m (a + 1)$$

e isto contradiz o fato que $a > 0$.

Seja $\epsilon > 0$ dado e escolha N tal que

$$a_N \leq (\frac{\epsilon}{2})[1 - \alpha(\frac{\epsilon}{2}, \epsilon)],$$

mostraremos que f deixa invariante o conjunto $\{x, d(x, x_N) \leq \epsilon\}$. Isto implica que a sequência (x_n) é de Cauchy. Para mostrar que f deixa invariante o conjunto acima, podemos ver que se $d(x, x_N) \leq \frac{\epsilon}{2}$ então

$$d(f(x), x_N) \leq d(f(x), f(x_N)) + a_N \leq d(x, x_N) + a_N \leq \epsilon,$$

e se

$$\frac{\epsilon}{2} < d(x, x_N) \leq \epsilon$$

obtemos

$$d(f(x), f(x_N)) \leq d(f(x), f(x_N)) + a_N \leq \alpha(\frac{\epsilon}{2}, \epsilon) + a_N \leq \epsilon$$

e a invariância está provada. Seja $\lim x_n = x_0$, então é claro que x_0 é um ponto fixo. A unicidade é deixado como exercício. □

Dizemos que uma aplicação $f : X \to X$ é uma contração local se para todo $x \in X$ existem ϵ_x e λ_x tal que para u e v em

$$\{y, d(x, y) \leq \epsilon_x\} \text{ e}, \epsilon_x > 0,\ \lambda_x \in [0, 1)$$

a relação

$$d(f(u), f(v)) \leq \lambda_x d(p, q)$$

vale.

Teorema 9.4.3 Seja (X, d) um espaço métrico compacto e $f : X \to X$ uma contração local. Então f tem um único ponto fixo.

Demonstração: Considere a aplicação

$$F(x) = d(f(x), x), x \in X.$$

Como X é compacto e F é contínua, então F assume o mínimo em um ponto x_0. Como f é uma contração local segue que x_0 é um ponto fixo de f.

Definição 9.4.4 *Seja (X, d) um espaço métrico completo e $f : X \to X$ uma aplicação contínua. Dizemos que f é uma contração potência local se existe uma constante $K < 1$, e para cada $x \in X$, existe um inteiro $n = n(x)$ tal que, para todo $y \in X$,*

$$d(f^n(x), f^n(y)) \leq Kd(x, y).$$

Para esta classe de aplicações temos o seguinte teorema:

Teorema 9.4.5 *Seja (X, d) espaço métrico completo e $f : X \to X$ uma aplicação contração potência local. Então existe um único ponto fixo de f.*

Para a prova deste teorema vamos precisar do seguinte lema:

Lema 9.4.6 *Se $f : X \to X$ é uma contração potência local, então para cada $x \in X$ o número $r(x) = \sup\{d(x, f^n(x)), n \in \mathbb{N}\}$ é finito.*

Demonstração: Para cada $x \in X$ seja

$$m(x) = \max\{d(x, f^k(x)), 1 \leq k \leq n(x)\}.$$

Se n é um inteiro arbitrário existe $s > 0$ tal que

$$sn(x) \leq n \leq (s + 1)n(x)$$

e isto dá

$$\begin{aligned} d(x, f^n(x) &\leq d(f^{n(x)} \circ f^{n-m}(x), f^{n(x)}(x) + \\ &+ d(f^{n(x)}(x), x) \\ &\leq Kd(f^{n-m}(x), x) + m(x) \\ &\leq m(x) + Km(x) + \ldots + K^s m(x) \\ &\leq \frac{m(x)}{1 - K} \end{aligned}$$

e isto termina a prova.

Agora vamos dar a prova do teorema. Sejam $x_0 \in X$ um ponto arbitrário, $n_0 = n(x_0)$, e $x_1 = f^{n_0}(x_0)$ e definimos indutivamente a sequência de pontos de (x_i) em X como segue: $n_i = n(x_i)$ e $x_{i+1} = f^{n_i}(x_i)$. Primeiro provaremos que a sequência (x_i) é uma sequência de Cauchy. Para isto vamos estimar $d(x_n, x_m)$. Temos,

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &= d(f^{n_{n+1}} \circ f^{n_n}(x_{n-1}), f^{n_{n-1}}(x_{n-1})) \\ &\leq Kd(f^{n_n}(x_{n-1}), x_{n-1}) \\ &\leq \ldots \leq K^n d(f^{n_n}(x_0), x_0) \end{aligned}$$

e isto implica que para $n > m$,

$$d(x_n, x_m) \leq K^m \frac{1}{1-K}$$

que mostra que (x_i) é sequência de Cauchy. Seja $u = \lim x_i$. Mostraremos que u é ponto fixo de f. Suponha que isto não seja verdade, então encontramos um par de vizinhanças disjuntas U e V contendo u e $f(u)$, respectivamente. Seja d_0 a distância

$$d_0 = \inf\{d(x, y), x \in U, y \in V\} > 0$$

e como f é contínua para n grande $f(x_n) \in V$ e também $x_n \in U$.

Agora

$$\begin{aligned} d(x_n, f(x_n)) &= d(f^{n_{n-1}} \circ f^{n_n}(x_{n-1}), f^{n_{n-1}}(x_{n-1})) \\ &\leq Kd(f(x_{n-1}), x_{n-1}) \leq \ldots \leq K^n d(f(x_0), x_0) \end{aligned}$$

e para n grande isto é uma contradição. Como a unicidade é óbvia, o teorema está provado.

Seja X um espaço topológico. Dizemos que X tem a propriedade de ponto fixo se toda aplicação contínua $f : X \to X$ tem um ponto fixo.

Lema 9.4.7 *Sejam X e Y espaços topológicos e $h : X \to Y$ um homeomorfismo. Se X tem a propriedade de ponto fixo, então Y também tem a propriedade de ponto fixo.*

Demonstração: a prova é simples e é deixada como exercício.

Definição 9.4.8 *Sejam X e Y espaços topológicos. Dizemos que Y é um retrato de X se $Y \subset X$ e se existe uma aplicação contínua $r : X \to Y$ tal que $r(x) = x, \forall x \in Y$. A aplicação r é chamada uma retração.*

Teorema 9.4.9 *Se X tem a propriedade de ponto fixo e Y é um retrato de X, então Y tem a propriedade de ponto fixo.*

Demonstração: Sejam r uma retração de X em Y e $f : Y \to Y$ uma aplicação contínua. Defina $g : X \to X$ dada por $g(x) = f(r(x))$ que é obviamente contínua, e como X tem a propriedade de ponto fixo, então existe $x_0 \in X$ tal que $g(x_0) = x_0$. Como $x_0 \in Y$ temos $r(x_0) = x_0$. Isto dá o teorema.

A bola unitária no $\mathbb{R}^n$ tem a propriedade do ponto fixo. Este é o teorema do ponto fixo de Brouwer.

9.5 O teorema do ponto fixo de Brouwer

Teorema 9.5.1 *Seja $f : \{x; ||x|| \leq 1\} \to \{x; ||x|| \leq 1\} = B =$ a bola unitária do espaço $n-$dimensional com f contínua. Então f tem um ponto fixo em B.*

Demonstração: Provaremos primeiramente o teorema quando a função f é infinitamente diferenciável. Neste caso, suponha que $f(x) \neq x$ para todo $x \in B$. Consideremos para cada $x \in B$ a reta de pontos da forma $x + t(x - f(x)), t \in \mathbb{R}$, unindo os pontos x e e $f(x)$. Sobre a reta existem exatamente dois pontos da esfera $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n; ||x|| = 1\}$. Isto é, a equação quadrática em t

$$||x||^2 + 2t(x|x - f(x)) + t^2|x - f(x)||^2 = 1$$

tem duas raízes reais distintas. Indiquemos por $a(x)$ a maior delas; temos

$$\begin{aligned}||x - f(x)||^2 a(x) = &-(x, x - f(x)) \\ &+\{(x|x - f(x))^2 + (1 - ||x||^2)||x - f(x)||^2\}^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Como a equação tem duas raízes distintas, o discriminante

$$(x|x - f(x))^2 + (1 - ||x||^2)||x - f(x)||^2$$

é estritamente positivo para todo $x \in B$. Como a função $t \mapsto t^{\frac{1}{2}}$ é de classe C^∞ para $t > 0$ segue que $a(x)$ é infinitamente diferenciável numa vizinhança aberta de B. Como $-1 \leq t \leq 0$ se $x + t(x - f(x))$ está entre $f(x)$ e x, resulta que se $||x|| = 1$, então $a(x) = 0$.

Defina a família de funções, para $t \in \mathbb{R}$, $f_t : B \to B$ dadas por $f_t(x) = x + ta(x)(x - f(x))$. Segue que $F : \mathbb{R} \times B \to B$ dada por $F(x) = f_t(x)$ é de classe C^∞ (numa vizinhança de $\mathbb{R} \times B$ em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$). Além disso, $f_0(x) = x$ para todo $x \in B$; temos

$$f_1(x) = x + a(x)(x - f(x)) \in S^{n-1}$$

e pela definição de $a(x)$ vem que $||f_1(x)|| = 1$, para todo $x \in B$. Seja $J(t, x)$ o determinante jacobiano de f_t no ponto x. Segue que $J(0, x) = 1, \forall x \in B$, e devido a igualdade $||f_1(x)||^2 = 1$, para todo $x \in B$, temos $J(1, x) = 0, \forall x \in B$.

Definindo

$$I(t) = \int_B J(t, x) dx_1 \cdots dx_n,$$

temos $I(0)$ =volume de B e $I(1) = 0$. Provaremos que $I(t)$ é constante o que dará a contradição. Como $I(t)$ é um polinômio em t pois

$$J(t, x) = \sum_{i=0}^{n} \eta(x) t^i,$$

pela definição de f_t. Portanto basta provar que $I(t)$ é constante em algum intervalo $[0, \delta)$.

Seja $g(x) = a(x)(x - f(x)), \forall x \in B$. Como B é compacto e $g' : B \to L(\mathbb{R}^n)$ é contínua, existe $M > 0$ tal que $||g'(x)|| < M, \forall x \in B$.

De outro lado, $g(x) = 0$, se $x \in S^{n-1}$, pois, então, $a(x) = 0$, de modo que, se pusermos $g(x) = 0$ para $x \in \mathbb{R}^n - B$ obteremos uma função contínua de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$.

Para $t \in \mathbb{R}$ e$y \in B$ fixados, seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida por $T(x) = y - tg(x)$. De $T(x_1) - T(x_2) = t(g(x_1) - g(x_2))$, vem que

$$||T(x_1) - T(x_2)|| \leq |t|M||x_1 - x_2||,$$

onde $||g'(x)|| \leq M$ e $x \in B$.

Logo, para $0 < \delta_1 < \frac{1}{M}$ e $0 \leq t < \delta_1$, T é uma contração, portanto tem um e um só ponto fixo, $x_t \in \mathbb{R}^n$. Não podemos ter $||x_t|| > 1$, pois então $g(x_t) = 0$, logo $x_t = Tx_t = y - tg(x_t) = y \in B$, o que é absurdo, logo $x_t \in B$. Assim, para todo $t \in [0, \delta_1)$, $f_t : B \to B$ é uma bijeção.

Tomando agora $0 < \delta < \delta_1$ e tal que $J(t, x) > 0$ para todo $0 \leq t < \delta$ e todo $x \in B$, então pelo teorema da função inversa para todo $t \in [0, \delta), f_t$ é uma aplicação biunívoca de B sobre B cuja inversa é diferenciável no interior de B. Então $I(t)$ é igual ao volume de B para todo $t \in [0, \delta)$. Isto termina a prova do teorema de Brouwer para aplicações de classe C^∞. Para estender o resultado a todas as aplicações contínuas $f : B \to B$ usamos o teorema da aproximação de Weierstrass para representar f como limite uniforme de uma sequência (f_k) de aplicações infitamente diferenciáveis de B em B.

Como o teorema de Brouwer vale para as f_k existe uma $x_k \in B$ tal que $f(x_k) = x_k$. Como B é compacto, existe alguma subsequência (x_{k_n}) de (x_k) convergindo a um $x \in B$. Da convergência uniforme $f_{n_k} \to f$, seque que $f(x) = \lim_{n \longrightarrow \infty} f_{n_k}(x_{k_n})$. De $f_{n_k}(x_{k_n}) = x_{k_n}$, vem que

$$f(x) = \lim_{n \longrightarrow \infty} x_{n_k} = x.$$

O teorema do ponto fixo de Schauder é uma aplicação do teorema de Brouwer, é o próximo exercício.

•• **Exercício 9.5.2** *Use o teorema acima para provar que se K é compacto convexo do $\mathbb{R}^n$, toda aplicação contínua de K em K tem um único ponto fixo.*

Como aplicação do teorema do ponto fixo de Brouwer vamos dar uma outra prova do teorema fundamental da Álgebra.

Teorema 9.5.3 *Seja $f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ um polinômio complexo. Então, existe z_0 tal que $f(z_0) = 0$.*

Demonstração: Podemos supor sem perda de generalidade que $a_n = 1$. Seja $z = r\exp(i\theta), 0 \leq \theta < 2\pi$ e

$$R = 2 + |a_0| + \cdots + |a_{n-1}|.$$

Defina

$$g(z) = \begin{cases} z - \frac{f(z)}{R\exp(i(n-1)\theta)}, \text{ se } |z| \leq 1 \\ z - \frac{f(z)}{Rz^{n-1}}, \text{ se } |z| \geq 1. \end{cases}$$

Segue da sua expressão que g é contínua. Consideremos o conjunto

$$C = \{z; |z| \leq R\}$$

que é claramente compacto e convexo do plano.

Mostraremos que C é invariante pela g. De fato, suponha $|z| \leq 1$ e assim

$$\begin{aligned} |g(z)| &\leq |z| + \frac{|f(z)|}{R} \\ &\leq 1 + \frac{(1 + |a_0| + \cdots + |a_{n-1}|}{R} \\ &\leq 1 + 1 = 2 < R. \end{aligned}$$

Suponha agora $|z| \geq 1$. Então temos

$$\begin{aligned} |g(z)| &\leq (R-1) + \frac{(a_0 + \cdots + a_{n-1})}{Rz^{n-1}} \\ &\leq R - 1 + \frac{R-2}{R} \end{aligned}$$

$$\leq R.$$

Assim C é invariante pela g. Seja z_0 ponto fixo de g, é claro que vale a relação $f(z_0) = 0.\square$

9.6 Princípio Variacional de Ekeland

Em 1972 Ivar Ekeland provou um poderoso resultado. Este teorema, chamado o Princípio Variacional de Ekeland, basicamente diz que se f é semicontínua inferior sobre um espaço métrico completo (X, d) e a valores reais estendidos e limitada inferiormente com $f(x_0)$ próximo de $\inf_{x\in X} \quad f(x)$, então existe uma função Lipschitz contínua g tal que $(f+g)$ tem um mínimo estrito em algum $\overline{x} \in X$ perto de x_0.

As aplicações deste princípio variacional são surpreendentes. Na geometria dos espaços de Banach pode-se usá-lo para demonstrar o Teorema de J. Borwein para em seguida obtermos os Teoremas de Brosted-Rockafellar, Bishop-Phelps e Rockafellar. Na teoria do ponto fixo é também usado para obter os Teoremas de Caristi e de Clark. Há também aplicações à teoria do controle e às equações diferenciais e, em particular, o Teorema do passo da montanha e o Teorema de sela.

Uma observação importante, demonstrada por F. Sullivan, é que a propriedade do Princípio Variacional de Ekeland para funções semicontínuas inferior sobre um espaço métrico, implica na completude do espaço. Outras equivalências foram obtidas por Penot que provou que o Princípio Variacional de Ekeland, o Teorema do “pingo”e o Teorema da “pétala”são equivalentes.

Sejam (X, d) um espaço métrico e $f : X \to \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ uma função. Dizemos que f é semicontínua inferior em $x_0 \in X$ se, para qualquer sequência (x_n) convergente para x_0, vale

$$f(x_0) \leq \liminf f(x_n).$$

A função f é semicontínua inferior sobre X se for semicontínua inferior em cada elemento $x \in X$. Por domínio efetivo de f entendemos o seguinte conjunto:

$$\mathrm{dom}(f) = \{x \in X; f(x) < \infty\}$$

Teorema 9.6.1 (Princípio variacional de Ekeland) Seja (X, d) um espaço métrico completo e $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ semicontínua inferior e limitada inferiormente. Sejam $\epsilon > 0$ e $x_0 \in X$ tal que

$$f(x_0) < \inf_{x \in X} \; f(x) + \frac{\epsilon}{2}.$$

Então, para todo $\lambda > 0$ existe $x_\lambda \in dom(f)$ satisfazendo:

1i) $f(x_\lambda) \leq f(x_0$

2i) $d(x_\lambda, x_0) \leq \lambda$

3i) $f(x_\lambda) < f(x) + \frac{\epsilon}{\lambda} d(x, x_\lambda), \quad \forall x \neq x_\lambda$

Demonstração A relação

$$x \leq y \Longleftrightarrow f(x) \leq f(y) - \lambda d(x, y)$$

é claramente reflexiva, anti-simétrica e transitiva. Para $u_1 = x_0$, defina

$$S_1 = \{u \in X; u \leq u_1\}$$

Tome $u_2 \in S_1$ tal que

$$f(u_2) \leq \inf_{x \in S_1} \; f(x) + \frac{\epsilon}{2^2}$$

e defina

$$S_2 = \{u \in X; u \leq u_2\}.$$

Admitindo que S_n esteja definido, tomemos $u_{n+1} \in S_n$ tal que

$$f(u_{n+1}) \leq \inf_{x \in S_n} f(x) + \frac{\epsilon}{2^{n+1}}$$

e defina S_{n+1} de modo análogo.

É fácil ver que cada S_n é fechado, que $S_n \supset S_{n+1}$ e que $\operatorname{diam} S_n \leq \frac{\epsilon}{\lambda 2^{n-1}}$. Como (X,d) é espaço métrico completo temos que

$$\cap S_n = \{x_\lambda\}.$$

Resta provar que x_λ é o elemento procurado, mas isto é um exercício fácil. Isto conclui a prova.

A escolha de $\lambda > 0$ depende do nosso objetivo, se queremos x_λ perto de x_0 devemos escolher $\lambda = \sqrt{\epsilon}$. Observamos que 2i) diz que x_λ é um mínimo estrito de $f(.) + \frac{\epsilon}{\lambda} d(., x_\lambda)$.

Mesmo para um espaço de Banach X e f Gateaux diferenciável, a função $f(.) + \frac{\epsilon}{\lambda} d(., x_\lambda)$ não é Gateaux diferenciável em geral, este é um defeito do Princípio Variacional de Ekeland. O Princípio Variacional de Borwein - Preiss evita este problema. Veja a referência.

Teorema 9.6.2 (Ponto Fixo de Caristi) Sejam (X,d) um espaço métrico completo e T uma aplicação definida sobre X e com valores nas partes não-vazias de X. Suponha que exista $g : X \to I\!R \cup \{\infty\}$ funcional semicontínuo inferior satisfazendo:

$$g(y) \leq g(x) - d(x,y), \forall x \in X,\ y \in Tx.$$

Então, existe algum ponto fixo x_0 de T, isto é, existe $x_0 \in Tx_0$.

Demonstração: Com $\epsilon = \lambda = 1$ obtemos do Princípio Variacional de Ekeland um elemento $x_0 \in X$ tal que

$$(1)\ \ g(x_0) < g(x) + d(x, x_0),\ \ \forall x \neq x_0.$$

Provaremos que $x_0 \in Tx_0$. Suponha que todo $y \in Tx_0$ seja diferente de x_0, então da hipótese temos

$$(2)\ \ g(y) \leq g(x) - d(x_0, y).$$

Com $x = y$, (2) contradiz (1).

Capítulo 10

Apêndice – Teoria básica dos conjuntos

10.1 Introdução

No sistema de **ZF** admite-se uma relação de pertinência $\in$ para indicar que $a \in X$ e lê-se a é um elemento de X ou a pertence a X. Estruturalmente, impões os seguinte axiomas que descrevemos como segue:

I-Axioma da extensionalidade: se X e Y têm os mesmos elementos, então $X = Y$.

II-Axioma do par: para qualquer a e b existe um conjunto $\{a, b\}$ que contém exatamente a e b.

III-Axioma de separação: se φ é uma propriedade, com parâmetro p, então para qualquer X e p existe um conjunto $Y = \{u \in X : \varphi(u, p)\}$ que contém todo $u \in X$ que tem a propriedade φ.

IV-Axioma da união: para qualquer X exsite um conjutno $Y = \cup X$, que contém todos os elementos de X.

V-Axioma do conjunto potência: Para qualquer X existe um conjunto

$Y = P(X)$, o conjunto de todos os subconjuntos de X.

VI-Axioma da infinidade: Existe um conjunto infinito.

VII-Axioma de substituição: se F é uma função, então para qualquer X existe um conjunto $Y = F[x] = \{F(x); x \in X\}$.

VIII-Axioma de regularidade: Todo conjunto não vazio tem um elemento $\in$-minimal.

IX-Axioma da escolha: Toda família de conjuntos não vazio tem uma função escolha.

A teoria dos conjuntos com os axiomas I-VIII é a teoria axiomática de de Zermelo-Fraenkel. A teoria **ZFC** é a teoria **ZF** com o axioma da escolha.

No que segue faremos teoria axiomática dos conjuntos escolhendo como axiomas algumas afirmações alternativas que são hoje aceitas como mais completas. Por exemplo, os axiomas acima são insuficientes para provar que existe a união de dois conjuntos ou definir a noção de número real.

A característica típica de uma teoria matemática é que ela trata com coleções ou conjuntos de objetos, onde certas relações existem entre os objetos destes conjuntos, ou entre diferentes conjuntos, ainda que a natureza destes objetos seja completamente imaterial.

A teoria dos conjuntos elaborada por Cantor, como era originalmente, apresentava vários paradoxos. Quem não conhece, por exemplo, a estória abaixo:

Numa cidade existe um barbeiro que só faz a barba nos homens que não se barbeiam a si próprios. Pergunta: Quem faz a barba do barbeiro?

Esta estória não é outra senão o paradoxo de Russel: “O conjunto de todos os conjuntos que não são membros de si mesmos.”Isto é,

$$Z = \{X; X \notin X\}.$$

Se Z não pertence a Z, então pela definição de Z, Z pertence a si mesmo. Além disso, se Z pertence a Z, então Z não pertence a si mesmo. Em ambos os casos somos levados a uma contradição.

Muitos outros paradoxos lógicos existem, por exemplo paradoxo de Cantor e o paradoxo de Burali-Forti. Também paradoxos semânticos, como por exemplo, este em que um homem diz: "Eu estou mentindo". Se ele está mentindo, então ele diz a verdade e portanto ele não mente. Se ele não está mentindo, então ele diz é verdade e assim ele está mentindo. Em qualquer caso ele mente e ele não mente.

Estes paradoxos são genuínos no sentido que eles não contém uma falha lógica óbvia. Os paradoxos lógicos envolvem apenas noções da teoria dos conjuntos enquanto os paradoxos semânticos também fazem uso de conceitos como "verdade"e "adjetivo", que não precisam ocorrer na linguagem matemática. Por esta razão os paradoxos lógicos são mais interessantes para os matemáticos. Para evitar contradições que aparecem na teoria dos conjuntos, introduzimos um termo diferente tal como classe, para coleções gerais de objetos, e diferenciamos daquelas classes que são membros de outras classes chamando-as conjuntos. Abaixo descrevemos os axiomas de Zermelo-Fraenkel que atualmente é a base lógica da teoria dos conjuntos.

10.2 Teoria formal dos conjuntos

Uma linguagem adequada para a teoria dos conjuntos deve ser capaz de descrever aqueles objetos que já conhecemos como conjuntos e deve ser precisa o suficiente de modo a evitar contradições. Para construir um tal sistema formal devemos descrever uma linguagem formal, isto se consegue dando o alfabeto de símbolos e as regras de construção (regras gramaticais) das fórmulas bem formadas, *fbf.* Estas não precisam ter um significado específico e nem ter propriedades específicas dentro do sistema formal, em certas ocasiões podem ser interpretadas de diferentes maneiras mas estas não são parte do sistema. O alfabeto dos símbolos pode ser dado pelo seguinte:

$x_1, x_2, \cdots,$ variáveis

$a_1, a_2, \cdots,$ constantes individuais

$A_1^1, A_2^1, \cdots, A_1^2, A_2^2, \cdots,$ letras de predicado

$f_1^1, f_2^1, \cdots, f_1^2, f_2^2, \cdots,$ letras de função

(,), , sinais de pontuação

$\neg, \Longrightarrow$ conectivos

$\forall$ quantificador

Em geral uma linguagem de primeira ordem $\mathcal{L}$ terá como alfabeto de símbolos: variáveis, algumas constantes individuais, algumas letras de predicado, algumas letras de função, símbolos de pontuação, conectivos e o quantificador.

É claro que existem muitas linguagens de primeira ordem diferentes dependendo dos símbolos que se incluem. O significado do termo *primeira ordem* está relacionado com o uso do quantificador universal, o adjetivo "primeira ordem"serve para distingüir a teoria que vamos estudar daquelas em que existem predicados tendo outros predicados ou funções como argumento ou em que quantificadores de predicados são permitidos, ou ambos. Teorias de primeira ordem são suficientes para expressar teorias matemáticas conhecidas e além disso, teorias de ordem superior podem sempre ser adequadamente transladadas numa teoria de primeira ordem. Seja S um sistema de primeira ordem com igualdade. Um modelo normal de S é um modelo em que algum símbolo de predicado A_i^j pode ser interpretado como $=$. Trataremos sempre de modelos normais já que A_i^j representam uma situação matemática, na interpretação prevista.

Antes de falar sobre fórmulas bem formadas necessitamos de alguns preliminares. Seja $\mathcal{L}$ uma linguagem de primeira ordem. Os termos de $\mathcal{L}$ se definem do seguinte modo:

1i) as varáveis e as constantes individuais são termos de $\mathcal{L}$.

2i) se f_i^n é uma letra de função de $\mathcal{L}$ e se $t_1, t_2, \cdots, t_n$, são termos de $\mathcal{L}$, então $f_i^n(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ é termo de $\mathcal{L}$.
3i) os termos $\mathcal{L}$ são gerados pela aplicação de um úmero finito de vezes de 1i) e 2i).

Fórmulas atômicas de $\mathcal{L}$ são expressões definidas por:
se A_j^k é uma letra de predicado de $\mathcal{L}$ e $t_1, t_2, \cdots, t_k$ são termos de $\mathcal{L}$, então $A_j^k(t_1, t_2, \cdots, t_k)$ é uma fórmula atômica de $\mathcal{L}$.

Uma fórmula bem formada de $\mathcal{L}$ se define por:
1i) toda fórmula atômica de $\mathcal{L}$ é *fbf* de $\mathcal{L}$.
2i) se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são *fbf* de $\mathcal{L}$ então também o são $\neg\mathcal{A}$ e $\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B}$ e $(\forall x_i)\mathcal{A}$, sendo x_i qualquer variável.
3i) todas as fórmulas bem formadas de $\mathcal{L}$ são geradas por 1i) e 2i) através de um número finito de aplicações.

Desde o começo do século os matemáticos estão investigando as hipóteses básicas que se deve fazer acerca dos conjuntos (isto é, axiomas) e os modos em que todos os ramos da matemática podem ser construídos sobre estas hipóteses. A vantagem de se desenvolver uma teoria de conjuntos formal está nas hipóteses que estão explícitas, o que proporciona uma oportunidade de criticá-las e de explorar a interdependência entre elas. Vamos descrever um sistema de teoria de conjuntos formal. Há outros sistemas, porém este é um dos sistemas padrões e, talvez o mais simples de descrever em termos dos conceitos que já temos. O sistema que vamos descrever se chama **ZF**. O nome vem de Ernst Zermelo, que foi o primeiro a fórmular uma coleção de axiomas para a teoria de conjuntos em 1905, e Abraham Fraenkel, que os modificou em 1920.

A linguagem de primeira ordem apropriada para **ZF** contém varáveis, sinais de pontuação, conectivos e o quantificador, como de costume, e os símbolos do predicado $=$ e $\in$. Consideraremos $\in$ como um símbolo da linguagem, e escreveremos $t_1 \in t_2$, para quaisquer que sejam os termos t_1 e t_2.

Note que a falta de constantes individuais e letras de função significa que os únicos termos são as variáveis e as únicas fórmulas atômicas são as da forma $x_i = x_j$ ou $x_i \in x_j$. Isto pode parecer muito restritivo, porém os axiomas que introduziremos garantirão que o sistema formal reflete verdadeiramente toda a generalidade da teoria intuitiva, e poderemos introduzir símbolos correspondentes às noções padrões da teoria de conjuntos, tais como o conjunto vazio, a união, o conjunto potência e etc..

Mas afinal o que é relação de pertinência? O que é um conjunto? Um conjunto, para Frege, era a extensão de uma propriedade ou um predicado. Ou seja, era a família X de entes x que satisfaziam uma propriedade ou predicado $P(x)$. Neste sentido amplo, $x \in X$ apenas codifica, convenientemente, "$P(x)$ é verdadeira." Um predicado ou uma propriedade, por sua vez, é uma expressão lingüística, um ente sintático. Russel apontou então a seguinte dificuldade: considere a propriedade $P(x) \equiv x \notin x$ e S a extensão desse predicado. Se S é um conjunto, então $S \in S$ ou não. É fácil ver que $S \in S \Longleftrightarrow S \notin S$, uma contradição. Assim nem todas as propriedades podem determinar conjuntos, como queria Frege. A pergunta então que surge é: quais predicados determinam conjuntos? O que é uma propriedade como ente sintático?

Uma propriedade, como ente sintático, é uma fórmula em uma linguagem formal, com alfabeto e regras gramaticais estabelecidos *antes* de enunciar os princípios básicos ou axiomas da nossa teoria. Resumiremos a seguir o alfabeto de Zermelo-Fraenkel e as regras gramaticais.

Alfabeto

Constam deste alfabeto os seguintes símbolos:

a) $v_1, \cdots, v_n, n \geq 1$.

b) Dois símbolos $\in$ e $=$, para indicar a relação de pertinência e igualdade.

c) Símbolos lógicos usuais: $\wedge$, $\vee$, $\Longrightarrow$, $\neg$. Além de símbolos para os quantificadores usuais, $\forall$ e $\exists$.

d) Símbolos de abre e fecha parênteses.

Regras Gramaticais
Definimos por indução as fórmulas ou expressões lingüísticas de **ZF** do seguinte modo:
a) Se x e y são variáveis, $x \in y$ e $x = y$ são fórmulas denominadas *fórmulas atômicas*;
b) Se ϕ e ψ são fórmulas, então $\phi \wedge \psi$, $\phi \vee \psi$, $\phi \Longrightarrow \psi$ e $\neg\phi$ são fórmulas;
c) Uma sequência finita de símbolos de **ZF** é uma fórmula se, e somente se, puder ser obtida a partir das fórmulas atômicas pelas regras acima estabelecidas.

As fórmulas da teoria dos conjuntos são então construídas de fórmulas atômicas: $x \in y$, $x = y$ por meio dos conectivos lógicos e quantificadores.

O alfabeto e as regras geram as seguintes verdades a priori:
(ZF1) axioma da extensionalidade

$$X = Y \Longleftrightarrow (\forall u)(u \in X \Longleftrightarrow u \in Y)$$

Este é o axioma da extensão e significa que dois conjuntos são iguais se e somente se tem os mesmos elementos.
(ZF2) axioma do vazio

$$(\exists X)(\forall u)\neg(u \in X)$$

Este é o axioma do conjunto vazio, garante a existência, na interpretação prevista, de um conjunto sem elementos. Como consequência de (ZF1) em todo modelo normal haverá um só conjunto assim. Podemos então introduzir na linguagem o símbolo $\emptyset$ para atuar como constante individual, e (ZF2) toma a forma da *fbf*: $(\forall u)\neg(u \in \emptyset)$.

Notação: introduzimos o símbolo $\subseteq$ como abreviatura do modo seguinte:

$$(t_1 \subseteq t_2) \text{ é abreviatura de } (\forall x_1)(x_1 \in t_1 \Longrightarrow x_1 \in t_2)$$

sendo t_1e t_2 termos quaisquer.

(ZF3) axioma do par não ordenado

$$(\forall a)(\forall b)(\exists c)(\forall x)(x \in c \Longleftrightarrow (x = a \vee x = b))$$

Este é o axioma do par não ordenado. Dados dois conjuntos quaisquer x e y existe um conjunto z cujos membros são x e y. Este é também um axioma que afirma a existência, e é conveniente introduzir na linguagem os símbos $\{y\}$ a fim de denotar o objeto cuja existência afirma o axioma. $\{a, b\}$ se considerará como um termo, e (ZF3) afirma então $x \in \{a, b\} \Longleftrightarrow (x = a \vee x = b)$.

(ZF4) axioma da união

$$(\forall X)(\exists Y)(\forall u)(u \in Y \Longleftrightarrow (\exists z)(z \in X \wedge u \in z)$$

Este é o axioma da união. Dado qualquer conjunto X, existe um conjunto y que tem como elementos os elementos dos elementos de X.

Notação: Denotamos por $\cup X$ ao objeto cuja existência se afirma em (ZF4). $\cup X$ atua como símbolo de função de um argumento. Podemos então introduzir $\cup$ pondo:

$(X \cup Y)$ é abreviatura de $\{X, Y\}$.

(ZF5) axioma das partes

$$(\forall X)(\exists Y)(\forall u)(u \in Y \Longleftrightarrow u \subseteq X)$$

Este é o axioma do conjunto potência. Dado qualquer conjunto X existe um conjunto Y onde cada elemento é um subconjunto de X.

(ZF6) axioma da substituição

$$(\forall x_1)(\exists x_2)\mathcal{A}(x_1, x_2) \Longrightarrow (\forall x_3)(\exists x_4)(\forall x_5)(x_5 \in x_4 \\ \Longleftrightarrow (\exists x_6)(x_6 \in x_3 \wedge \mathcal{A}(x_6, x_5)))$$

para toda *fbf* $\mathcal{A}(x_1, x_2)$ em que aparecem livres x_1 e x_2 (e na qual podemos supor sem perda de generalidade que não aparecem os quantificadores $(\forall x_5)$

e $(\forall x_6))$.

Este é o esquema de substituição. Se a *fbf* $\mathcal{A}$ determina uma função, então para todo conjunto x existe um conjunto y que tem como elementos todas as imagens de elementos de x sob esta função.

Nosso primeiro resultado obtido dos axiomas de **ZF** é o princípio da separação.

Proposição 10.2.1 (Princípio da separação) *Se $\phi(t, v)$ é uma fórmula em* **ZF** *e x um conjunto, existe um conjunto y cujos elementos são exatamente aqueles $z \in x$ que satisfazem $\phi(z, v)$.*

Demonstração: Seja $P(z, t, v)$ a fórmula dada por $z = t \wedge \phi(t, v)$. É claro que $\forall z \exists' t P(z, t, v)$. Pelo axioma da substituição existe um conjunto y tal que $z \in y \Longleftrightarrow z \in x \wedge \phi(z, v)$.$\Box$

O conjunto construído acima é denotado por

$$y = \{z \in x; \phi(z, v)\}.$$

O princípio da separação permite construir a interseção de dois conjuntos. Dados x e y, definimos a interseção de x e y, indicada por $x \cap y$, por

$$x \cap y = \{z \in x; z \in y\}.$$

O princípio da separação permite também definir a diferença de conjuntos. Se x e y são dois conjuntos, a diferença entre x e y, é indicada por $x - y$, é dada por

$$x - y = \{z \in x; z \notin y\}.$$

Não é imediato definir a união. Como dados conjuntos x e y existe um conjunto w cujos elementos são exatamente x e y. Usando este fato podemos então definir a união de dois conjuntos: dados conjuntos x e y existe um conjunto indicado por $x \cup y$, a união de x e y, tal que

$$z \in x \cup y \Longleftrightarrow z \in x \vee z \in y.$$

Para obter $x \cup y$ basta aplicar o axioma da união ao par não ordenado $\{x, y\}$.

A seguir vamos construir o produto cartesiano entre dois conjuntos y e z, denotamos por $x = y \times z$. Seja $\phi(t, y, z)$ a fórmula $\exists a \exists b[a \in y \wedge b \in z \wedge t = (a, b)]$, a notoção $x = y \times z$ significa

$$\forall t[t \in x \Longleftrightarrow \phi(t, y, z)].$$

(ZF7) axioma da infinidade

$$(\exists S)(\emptyset \in S \wedge (\forall x)(x \in S \Longrightarrow x \cup \{x\} \in S))$$

Nota: $\{x\}$ é abreviatura de $\{x, x\}$ já definido antes.

Definição 10.2.2 Dizemos que um conjunto X é finito se toda função $f : X \to X$ injetora é também sobrejetora. Um conjunto X que não finito é chamado de infinito, em outras palavras existe uma função $f : X \to X$ injetora que não é sobrejetora.

O axioma de infinidade assegura a existência, em todo modelo, de um conjunto infinito. Se não estivesse incluído entre os axiomas não haveria nenhum modo de assegurar que o sistema formal é relevante com respeito a teoria de conjuntos intuitiva, que inclui conjuntos infinitos.

(ZF8) axioma da regularidade

$$(\forall x_1)(x_1 \neg = \emptyset \Longrightarrow (\exists x_2)(x_2 \in x_1 \wedge \neg(\exists x_3)(x_3 \in x_2 \wedge x_3 \in x_1)))$$

Este é o axioma diz que todo conjunto não vazio x contém um elemento disjunto com x. Este é um axioma técnico que se inclui para evitar anomalias contrárias a intuição, tais como a possibilidade de que um conjunto seja elemento de si mesmo.

ZF é um sistema formal de teoria de conjuntos. Os axiomas estão escolhidos de maneira que as interpretações dos símbolos formais em modelos normais se comportem como conjuntos. Alguns dos axiomas têm uma base intuitiva mais forte que outros, porém estes têm resistido a prova do tempo e *parecem* representar verdades básicas sobre os conjuntos. É interessante lembrar que o uso pouco cuidadoso da relação de pertinência apontando por Russel é evitado pelos axiomas de **ZF**, mas não se sabe ainda se **ZF** é uma teoria consistente, livre de contradições. É consequência de um famoso teorema de Kurt Gödel que essa consistência não pode ser provada em **ZF**.

ZF pode ser usado como base da análise matemática do seguinte modo: supondo que seja um sistema consistente, sabemos que existe um modelo normal. Pode-se demonstrar que em qualquer modelo assim há conjuntos que posssuem todas as propriedades usuais dos sistemas numéricos. Os detalhes deste ponto estão fora do objetivo destas notas. Por exemplo, um modelo do sistema **N** da aritmética pode ser definido como um subconjunto de um modelo de **ZF** do seguinte modo. $\square$tem uma interpretação no modelo de **ZF**, denotemo-la por $\boxdot$. Então, $\{\boxdot\}$ é um elemento diferente do modelo, e $\{\boxdot, \{\boxdot\}\}$ é outro (este conjunto tem dois elementos$\boxdot$ e $\{\boxdot\}$. Este é o princípio do processo de indução que gera uma sucessão de conjuntos. A regra geral é: para cada x da sucessão, seu sucessor é $x \cup \{x\}$. Pode-se provar facilmente que o $(k+1)-$ésimo membro desta sucessão tem k elementos, e é possível definir o número natural k como este $(k+1)-$membro.

O sistema numérico dos inteiros, dos racionais e dos reais podem ser construídos apartir do naturais mediante procedimentos algébricos. Todos estes procedimentos podem ser realizados em **ZF**. Após muitas verificações detalhadas se confirma que todo modelo normal de **ZF** contém como elemento um conjunto que se parece e se comporta como os números complexos e este conjunto por sua vez tem um subconjunto que se parece e se comporta como os números reais.

Além da fundamentação da análise matemática sobre uma base axiomática, havia muitos outros estímulos no fim do século passado e início deste para o estudo da teoria axiomática dos conjuntos, por exemplo: encontrar uma justificativa intuitiva (se havia) para o uso de certos princípios particulares em matemática. A atenção se centrou em dois princípios particulares: o axioma da escolha (de que se conheciam várias formulações equivalentes) e a hipótese do contínuo. Alguns matemáticos os consideram como axiomas adicionais da teoria dos conjuntos e outros os consideram como suspeitos do ponto de vista intuitivo, o incluem como falsidades.

O axioma da escolha

Para todo conjunto não vazio x existe um conjunto y que tem justamente um elemento em comum com cada membro de x.

As duas formulações equivalentes ao axioma da escolha mais conhecidas são:

Lema de Zorn: se toda cadeia de um conjunto parcialmente ordenado tem alguma cota superior, então o conjunto tem algum elemento maximal;

Princípio da boa ordem: todo conjunto admite uma boa ordem.

A seguir enunciamos a hipótese do contínuo.

Hipótese do contínuo: todo conjunto infinito de números reais é enumerável ou tem o mesmo cardinal que o conjunto de todos so números reais. (Dois conjuntos tem mesma cardinalidade se existe uma bijeção entre eles.)

Como os matemáticos não estavam de acordo sobre a aceitabilidade destes dois princípios, a pergunta natural que se fêz foi: São verdadeiros? A pergunta seguinte é: Se se trata de demonstrar estes princípios, sobre que princípios se deveriam basear as demonstrações? Zermelo e Fraenkel (e outros) enumeraram o que eles consideraram fundamentais para a teoria dos conjuntos e o problema passou a ser: Podemos deduzir os axiomas da escolha e a hipótese do contínuo como teoremas do sistema **ZF** de teoria dos conjuntos, e em caso negativo, seria consistente em incluir um ou ambos como axiomas adicionais?

Gödel (1938) respondeu a uma destas perguntas mediante considerações técnicas do sistema formal da teoria dos conjuntos. O axioma da escolha e a hipótese do contínuo são consistentes com **ZF**. Em outras palavras, podem ser adicionados como axiomas sem introduzir contradição. A idéia é muito simples: Sob a hipótese de que **ZF** seja consistente, Gödel construiu modelos nos quais são verdadeiros o axioma da escolha e a hipótese do contínuo. Assim os sistemas obtidos pela adição de um destes como axioma adicional são ambos consistentes. Acidentalmente, Gödel demonstrou também que o sistema obtido adicionando simultaneamente estes como axiomas é também consistente.

Muito depois, Cohen (1963) resolveu o outro problema demonstrando que nem o axioma da escolha e nem a hipótese do contínuo podem ser deduzidas como teoremas de **ZF**. De novo a idéia é simples. Cohen construiu modelos de **ZF** nos quais são certas as negações do axioma da escolha e da hipótese do contínuo. Se estes fossem teoremas de **ZF** seriam verdadeiros em todo modelo e uma *fbf* e sua negação não pode ser correta no mesmo modelo.

A conclusão de tudo isto é que nem o axioma da escolha e nem a sua negação são teoremas de **ZF**, e que seria consistente incluir qualquer delas como novo axioma. O mesmo ocorre com a hipótese do contínuo. A teoria formal de conjuntos esclareceu os fundamentos e a aceitação ou não aceitação do axioma da escolha e da hipótese do contínuo há de ser forçosamente decidida pela intuição, ou por algum princípio matemático não descoberto ainda, que pudesse ser aceito no futuro como novo axioma e confirmasse ou refutasse o axioma da escolha e a hipótese do contínuo. Os trabalhos de Gödel e Cohen demonstram também que estes são independentes entre si: nenhuem deles é teorema resultante da adição do outro no sistema **ZF** como axioma adicional.

Todo objeto construído através dos axiomas de Zermello-Fraenkel é chamado conjunto.

• **Exemplo 10.2.3** O axioma da infinidade permite construir o conjunto dos números naturais. Podemos construir um conjunto infinito ω da seguinte forma:
a) $\emptyset \in \omega$,
b) Se $x \in \omega$, então $x \cup \{x\} \in \omega$,
c) Se $z \in \omega$, então $z = \emptyset$ ou ou existe $x \in \omega$ tal que $z = x \cup \{x\}$,
d) Se $A \subseteq \omega,\ A \neq \emptyset$, então existe $y \in A$ tal que $y \cap A = \emptyset$.

É claro que o conjunto construído acima é infinito, pois a função (sucessor) definida em b) é injetora e não sobrejetora.

A última condição diz que todo conjunto não vazio de ω tem um menor elemento. O conjunto ω construído acima se comporta como o conjunto dos números naturais. Uma propriedade importante obtida da construção de ω é:

Teorema 10.2.4 (Princípio da Indução): *Seja $S \subseteq \omega$ tal que:*
a) $\emptyset \in S$,
b) $\forall x(x \in S \Longrightarrow x \cup \{x\} \in S)$,
então $S = \omega$.

Demonstração: Suponha, por absurdo, que $\omega - S \neq \emptyset$. Então da construção de ω existe $y \in (\omega - S)$ tal que $y \cap (\omega - S) = \emptyset$. Como $\emptyset \in S$, temos que $y \neq \emptyset$. Pela terceira condição da construção de ω, existe $z \in \omega$ tal que $y = z \cup \{z\}$. Como $y \cap (\omega - S) = \emptyset$, segue que $z \notin (\omega - S)$. Logo, $z \in S$ e da hipótese segue que $y = z \cup \{z\}$ está em S, o que é um absurdo. Logo,$S = \omega$.$\Box$

10.3 Resultados básicos

Nesta seção precisaremos dos conceitos de funções injetoras e sobrejetoras. O conjunto das funções de X em Y será representado por Y^X e por 2^X

representamos o conjunto das partes de X. Comecemos com uma proposição.

Proposição 10.3.1 *Sejam X, Y e Z conjuntos. Então:*
a) Existe uma bijeção natural $\varphi : (X \times Y)^Z \to X^Z \times Y^Z$, dada por

$$\varphi(f) = (\pi_1 \circ f, \pi_2 \circ f),$$

onde π_1 e π_2 são projeções canônicas.
b) Existe bijeção natural $\alpha : (X^Y)^Z \to X^{Y \times Z}$, dada por $\alpha(f)(y,z) = f(z)(y)$, $\forall y \in Y$ e $\forall z \in Z$.

Demonstração: É deixado como exercício.

Outro resultado importante que utilizaremos na prova do teorema de Cantor-Schoröder-Bernstein é o seguinte:

Teorema 10.3.2 (Ponto fixo de Tarski) *Seja $F : 2^X \to 2^X$ uma função crescente, (isto é, $x \subseteq y \subseteq X \Longrightarrow F(x) \subseteq F(y)$) então F tem um ponto fixo.*

Demonstração: Seja $A = \{z \in 2^X; z \subseteq F(z)\}$. Observe que se $z \in A$, então $z \subseteq F(z)$ e como F é crescente temos que $F(z) \subseteq F(F(z))$. Isto é, $F(z) \in A$.

Seja $w = \cup A = \cup_{z \in A} z$. Como $z \subseteq w$ então $z \subseteq F(z) \subseteq F(w), \forall z \in A$. Tomando a união, $w = \cup_{z \in A} z \subseteq F(w)$ e portanto $w \in A$. Segue que $F(w) \in A$ e como $w = \cup_{z \in A} z$ segue que $F(w) \subseteq w$. Logo, $F(w) = w$. $\square$

Teorema 10.3.3 (Cantor-Schröder-Bernstein) *Seja X e Y conjuntos, $h : X \to Y$ e $g : Y \to X$ funções injetoras. Então, existe $f : X \to Y$ bijetora.*

Demonstração: Seja $F : 2^X \to 2^X$ dada por

$$F(A) = X - g(Y - h(A)).$$

Provaremos que F é crescente. De fato, se $A \subseteq B \subseteq X$, então $h(A) \subseteq h(B)$ e portanto $g(Y - h(A)) \supseteq g(Y - h(B))$. Segue que $X - g(Y - h(A)) \subseteq X - g(Y - h(B)$, isto é, $F(A) \subseteq F(B)$. Segue que existe $Z \subseteq X$ tal que $F(Z) = Z$. Observamos que $g|_{Y-h(Z)}$ é bijetora de $Y - h(Z)$ em $X - Z$. Como g é injetora, resta provar a sobrejetividade: $g(Y - h(Z)) = X - Z$. Como $Z = F(Z)$, temos da definição de F que $Z = X - g(Y - h(Z))$, isto é, $X - Z = X - (X - g(Y - h(Z)) = g(Y - h(Z))$, que é o que queríamos mostrar. Agora defina $f : X \to Y$ por

$$f(x) = \begin{cases} h(x), & \text{se } x \in Z \\ (g|_{Y-h(Z)})^{-1}(x), & \text{se } x \in g(Y - h(Z)) \end{cases}$$

que é claramente bijetora. Note que $X = (X - Z) \cup Z = (g|_{Y-h(Z)})(Y - h(Z)) \cup Z$, $Y = (Y - h(Z)) \cup h(Z)$ e cada expressão de f está definida em componentes disjuntas de X. $\square$

O seguinte resultado esclarece sobre a existência de certos tipos de conjuntos.

Proposição 10.3.4 *a) Não existe um conjunto Y tal que, para todo conjunto $x, x \in Y$.*
b) Seja X um conjunto não vazio. Não existe um conjunto Z tal que, para todo conjunto Y, se existir função bijetora $f : Y \to X$, então $Y \in Z$.
c) Seja X um conjunto não vazio. Não existe um conjunto Z tal que, para todo conjunto Y, se existir função injetora $f : Y \to X$, então $Y \in Z$.

Demonstração: a) Se existir um tal conjunto, então pelo princípio da separação, se $P(z)$ é a fórmula $z \notin z$, então podemos construir

$$S = \{z \in Y, P(z)\}.$$

Como S é conjunto, temos $S \in Y$ e assim $S \in S$ ou $S \notin S$. É fácil ver que $S \in S \iff S \notin S$. O que é uma contradição.
b) Suponha que existe Z um conjunto com esta propriedade. Seja $x_0 \in X$

um elemento fixado. Dado um conjunto x, definimos

$$Y = (X - \{x_0\}) \cup \{x\}$$

e $f : Y \to X$ dada por

$$f(y) = \begin{cases} y, & \text{se } y \neq x \\ x_0, & \text{se } y = x \end{cases}$$

Como f é claramente bijetora então $Y \in Z$. Mas então $x \in \cup Z$, uma vez que $Y \subseteq \cup Z$, contrariando a). c) é imediato de b.□

Russel propôs a noção de número como sendo a propriedade comum a todos os conjuntos que tenham o mesmo número de elementos. Dois conjuntos X e Y têm o mesmo número de elementos se existe uma bijeção entre eles. A proposição acima diz que a noção de número de Russel não pode ser formalizada na teoria de **ZF**. Fugimos desta dificuldade dizendo que cardinal(X) = cardinal(Y) (ou que são equipotentes) se existe $f : X \to Y$ bijetora, sem mencionar a *classe* de todos os conjuntos equipotentes a um dado conjunto.

Notação: por $X \hookrightarrow Y$ indicamos que existe uma função injetora de X para Y e por $X \equiv Y$ indicamos que existe $f : X \to Y$ bijetora.

Definição 10.3.5 *uma relação $\leq$ em $X \neq \emptyset$ é uma ordem parcial se, para todo $x, y, z \in X$ tem-se*
a) $x \leq x$
b) $x \leq y$ e $y \leq x \Longrightarrow x = y$
c) $x \leq y$ e $y \leq z \Longrightarrow x \leq z$.

A notação $x < y$ indica que $x \leq y$ e $x \neq y$.

Definição 10.3.6 *Seja $\leq$ uma ordem parcial no conjunto $X, a \in X$ e $A \subseteq X$.*
a) a é limitante superior ou cota superior de A se, para todo $x \in A, a \geq x$.

b) a é supremo de A ($\sup A$) se a é o menor limitante superior de A.
c) a é maximal em A se $a \in A$ e, para todo $x \in A$, se $x \geq a$, então $a = x$.
d) a é o máximo de A, $\max(A)$ se $a \in A$ e $a = \sup A$.

Definições análogas para limitante inferior, ínfimo e mínimo.

Definição 10.3.7 *Um conjunto X parcialmente ordenado por $\leq$ é bem ordenado por $\leq$ (ou $\leq$ é uma boa ordem em X) se todo subconjunto não vazio de X tem um mínimo. Em particular X tem um mínimo.*

Definição 10.3.8 *Um conjunto X parcialmente ordenado por $\leq$ é linearmente ordenado ou totalmente ordenado se, para todo $x, y \in X$, temos $x \leq y$ ou $y \leq x$. Se X é parcialmente ordenado, uma cadeia em X é um subconjunto totalmente ordenado por $\leq$.*

Observação 10.3.9 *Se X é bem ordenado por $\leq$, então X é totalmente ordenado por $\leq$.*

Definição 10.3.10 *$f : X \to Y$ é um isomorfismo de conjuntos parcialmente ordenados se f é crescente e bijetora.*

Teorema 10.3.11 *Sejam X e Y conjuntos bem ordenados por $\leq$. Então ou X é isomorfo a um subconjunto de Y ou Y é isomorfo a um subconjunto de X. Além disso, se as duas afirmações são verdadeiras simultaneamente, então X e Y são equipotentes.*

Cantor conjecturou este resultado desde suas primeiras investigações. Já provamos a segunda parte, ela foi provada em 1897 por Bernstein, a primeira parte foi provada em 1904 por Zermelo. Não vamos provar a primeira parte aqui.

A primeira parte do teorema acima pode ser reescrita como

Corolário 10.3.12 *Se X e Y são conjuntos, então $X \hookrightarrow Y$ ou $Y \hookrightarrow X$.*

Definição 10.3.13 *Sejam X e Y dois conjuntos.Escrevemos*
a) $card(X) = card(Y) \Longleftrightarrow X \equiv Y$.
b) $card(X) < card(Y) \Longleftrightarrow X \hookrightarrow Y$ *e* $card(X) \neq card(Y)$.
c) $card(X) \leq card(Y) \Longleftrightarrow X \hookrightarrow Y$.

Observação 10.3.14 Se X é um conjunto, então dizemos que X é infinito se $\omega \hookrightarrow X$ e X é finito se $\operatorname{card}(X) < \operatorname{card}(\omega)$. De fato, se X é infinito tome $f : X \to X$ injetora e não sobrejetora. Logo, $f(X) \neq X$ e assim existe $y \in X - f(X)$ ou seja $f(x) \neq y, \forall x \in X$. Seja $x_1 = f(y)$ e $x_{n+1} = f^{n+1}(y)$. Se $f^n(y) = f^m(y)$, supondo $n \geq m$, então temos $y = f^{n-m}(y)$ o que é absurdo pois $f(x) \neq y, \forall x \in X$. Segue que $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ está contido em X e portanto $w \hookrightarrow X$. Por outro lado, se $h : \omega \to X$ é injetora, defina $f : X \to X$ por

$$f(x) = \begin{cases} \text{x}, & \text{se } x \notin h(\mathbb{N}) \\ h(2n), & \text{se } x = h(n), \end{cases}$$

é claro que f é injetora e não sobrejetora. Segue que X é infinito.

Para a outra parte, se X é infinito então é verdade que $\omega \hookrightarrow X$. Isto é, existe $f : \omega \to X$ injetora. Logo, $\operatorname{card}(X) \geq \operatorname{card}(\omega)$ que é absurdo. Logo, X é finito.

Definição 10.3.15 *a) X é enumerável se $X \hookrightarrow \omega$*
b) X é não enumerável se $card(X) > card(\omega)$.

Um conjunto pode ser finito ou infinito. Todo conjunto finito é enumerável e se for infinito pode ser enumerável ou não enumerável:

$$\text{conjunto pode ser} \begin{cases} \text{finito} \quad \text{(enumerável)} \\ \text{infinito} \begin{cases} \text{enumerável} \\ \text{não enumerável} \end{cases} \end{cases}$$

Observamos que a expressão cardinal de X não tem significado isoladamente, trata-se de uma relação binária entre dois conjuntos.

Referências Bibliográficas

[1] J. M. Borwein and D. Preiss, A smooth variational principle with applications to subdifferentiability of convex functions. Transactions of the American Math Soc. vol. 303,no. 2, october(1987), 517-527.

[2] I. Ekeland I.Ekeland, Nonconvex minimization problems.Bull. of the Amer. Math. soc., vol 1, no. 3, may (1979), 443-474.

[3] I. Ekeland and J. P. Aubin, Applied nonlinear analysis.Jonh Wiley and Sons (1984).

[4] D. G. de Figueiredo, The Ekeland Variational Principle with applications and Detours.Springer Verlag (1989).

[5] J. P. Penot, The Drop Theorem,the petal theorem and Ekeland's variational principle.Nonlinear Analysis,Theory, Methods and Applications,vol. 10, no. 9, (1986) 813-822.

[6] F. Sullivan, Ordering and completness of metric spaces. Math. Inst. Kath. Univ., Nijmegen, The Netherlands Report 8101.

[7] E. L. Lima, Tologia Geral. Projeto Euclides, 1978.

[8] J. Munkes, A first course of topology. Addison Wesley 1980.

[9] C. S. Honig, Aplicações da Topologia a Análise. Projeto Euclides, IMPA 1985.

Índice Remissivo