Universidade Estadual de Maringá - Departamento de Matemática
Cálculo Diferencial e Integral: um KIT de Sobrevivência

A origem das funções hiperbólicas

Levi Veiga Magalhães – veigamagalhaes@hotmail.com

O objetivo deste texto é apresentar a dedução das expressões para as funções seno e cosseno hiperbólicos. A maioria dos livros de cálculo apresenta as definições padrões, sem explicação alguma sobre a origem destas expressões. Para as funções trigonométricas utilizamos o círculo, já para as funções hiperbólicas iremos considerar a hipérbole $f(x) = \dfrac{1}{2x}$.

Sumário

1 Introdução

A maioria dos livros de cálculo, disponíveis em todas as bibliotecas, apresenta a definição de funções hiperbólicas de maneiras análogas, ou seja:

$$\cosh(\theta) = \frac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{2} \text{ e } \sinh(\theta) = \frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{2}.$$

Para verificar que as funções hiperbólicas são definidas em função de funções exponenciais, faremos a dedução utilizando a função a $f(x) = \frac{1}{2x}$.

2 Mudança de base

Assim como as funções trigonométricas são definidas no círculo, e para as funções hiperbólicas iremos considerar $f(x) = \frac{1}{2x}$. Faremos uma mudança de base com uma rotação de $\frac{\pi}{4}$ da base xy para XY e assim encontraremos a hipérbole desejada. Considerando o ponto E sobre a hipérbole, com a mudança de base encontraremos suas coordenadas na base XY. E o

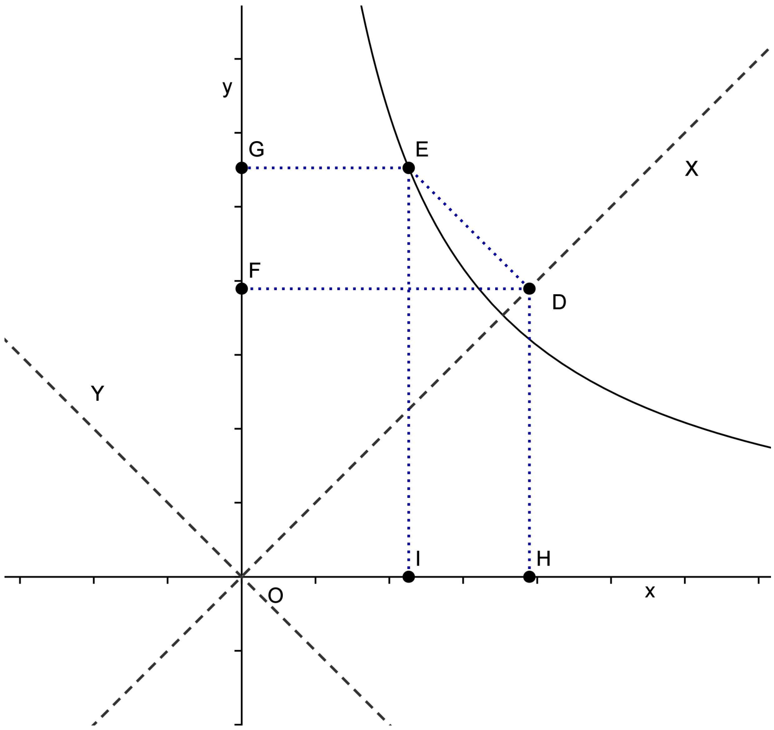

Figura 1: Figura inicial

faremos de duas maneiras. Até o final do texto iremos considerar as hipérboles para $x > 0$.

Primeira maneira:
As coordenadas do ponto E no eixo xy são:

$$x = OI \text{ e } y = OG$$

E no eixo XY, são:

$$X = OD \text{ e } Y = ED$$

Observe que:

$$x = OI = OH - IH = OD\cos(\frac{\pi}{4}) - ED\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}X - \frac{\sqrt{2}}{2}Y = \frac{\sqrt{2}}{2}(X - Y)$$

e

$$y = OG = OF + FG = OD\sin(\frac{\pi}{4}) + ED\cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}X + \frac{\sqrt{2}}{2}Y = \frac{\sqrt{2}}{2}(X + Y)$$

Assim a hipérbole no eixo XY é $X^2 - Y^2 = 1$.

Segunda maneira:
O eixo X tem uma rotação de $\frac{\pi}{4}$ sobre o eixo x, e da mesma maneira o eixo Y sobre o eixo y. Então qualquer ponto sobre X tem é do tipo $(\cos(\frac{\pi}{4}), \sin(\frac{\pi}{4}))$ e sobre Y é do tipo

$(-\sin(\frac{\pi}{4}), \cos(\frac{\pi}{4}))$, logo a matriz mudança de base é dada por:

$$\begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{4}) & \sin(\frac{\pi}{4}) \\ -\sin(\frac{\pi}{4}) & \cos(\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix}$$

Portanto as coordenadas de qualquer ponto na base XY são:

$$x = X\cos(\frac{\pi}{4}) - Y\sin(\frac{\pi}{4}) = X\frac{\sqrt{2}}{2} - Y\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(X - Y)$$
$$y = X\cos(\frac{\pi}{4}) + Y\sin(\frac{\pi}{4}) = X\frac{\sqrt{2}}{2} + Y\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(X + Y).$$

Como a hipébole na base xy é $x.y = \frac{1}{2}$, a hipérbole na base XY será:

$$X^2 - Y^2 = 1.$$

3 Definição

Por analogia às funções trigonométricas circulares que são definidas no círculo, definiremos as funções hiperbólicas na hipérbole $X^2 - Y^2 = 1$.

Considere a figura com a hipérbole $X^2 - Y^2 = 1$.

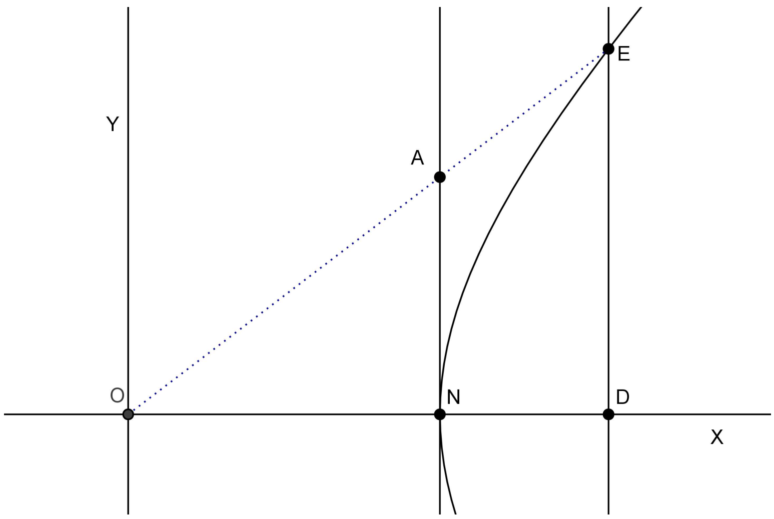

Figura 2: Por analogia

A reta suporte ao segmento $\overline{NA}$ é tangente a hipérbole pelo ponto N e o eixo X com o segmento $\overline{OE}$, no sentido anti-horário é o ângulo θ, o setor ONE tem área $\frac{\theta}{2}$ (assim como qualquer setor círcular determinado por um ângulo θ tem área $\frac{\theta}{2}$), e o ponto N tem abscissa 1 (tome $Y = 0$).

Definimos:

$$\overline{OD} = \cosh(\theta)$$
$$\overline{DE} = \sinh(\theta)$$

$$\overline{NA} = \tanh(\theta)$$

Observação: Observe que a imagem da $\tanh(\theta)$ é maior que -1 e menor que 1, pois $\cosh(\theta) \geq \sinh(\theta)$.

4 Desenvolvimento

Por quê

$$\cosh(\theta) = \frac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{2}$$

e

$$\sinh(\theta) = \frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{2}?$$

Para responder a esta pergunta, consideremos a figura, vamos mostrar que as áreas dos setores OEN, IPNE e QNEG são iguais. Ou seja,

$$A_{OEN} = A_{IPNE} = A_{QNEG}$$

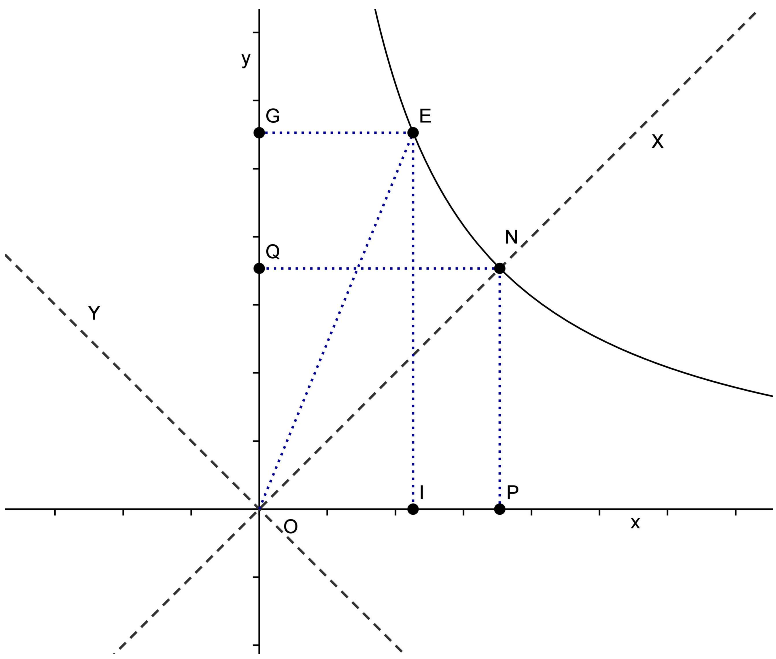

Figura 3: Calculando a área

Na figura o ponto N tem abscissa 1, no plano XY.
Temos que as coordenadas dos pontos N e E, no plano xy, são:
Ponto N

$$x = OP, y = OQ;$$

Ponto E

$$x = OI, y = OG.$$

Assim a área do retângulo $OPNQ$ é:

$$A_{OPNQ} = OP{\cdot}OQ = x{\cdot}y = \frac{1}{2}$$

E do retângulo $OIEG$ é:

$$A_{OIEG} = OI{\cdot}OG = x{\cdot}y = \frac{1}{2}$$

Portanto,

$$A_{OPNQ} = A_{OIEG}$$

A área so setor $IPNE$, é dada por;

$$A_{OPNQ} = \int_{OI}^{OP} \frac{1}{2x}dx = \frac{1}{2}(\ln OP - \ln OI) = \frac{1}{2}\ln\frac{OP}{OI}$$

Considerando $OP > OI$.
De maneira análoga mostramos que $A_{QNEG} = \frac{1}{2}\ln\frac{OG}{OQ}$, com $OG > OQ$.
Observe que

$$A_{OIE} = \frac{1}{2}A_{OIEG} = \frac{1}{2}A_{OPNQ} = A_{OPN}$$

e

$$A_{OPNE} = A_{OPN} + A_{ONE} = A_{OIE} + A_{IPNE}$$

então

$$A_{IPNE} = A_{ONE}$$

portanto

$$A_{IPNE} = A_{ONE} = A_{QNEG}$$

Relembremos que:

$$OI = \frac{\sqrt{2}}{2}(X - Y) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cosh(\theta) - \sinh(\theta))$$

$$OG = \frac{\sqrt{2}}{2}(X + Y) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cosh(\theta) + \sinh(\theta)).$$

E como a rotação foi de $\frac{\pi}{4}$ segue que:

$$OQ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$OP = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

E assim,

$$A_{IPNE} = \frac{1}{2}\ln\frac{OP}{OI} = \frac{1}{2}\ln\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cosh(\theta) - \sinh(\theta))} = -\frac{1}{2}\ln(\cosh(\theta) - \sinh(\theta))$$

$$A_{QNEG} = \frac{1}{2}\ln\frac{OG}{OQ} = \frac{1}{2}\ln\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cosh(\theta) + \sinh(\theta))}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{2}\ln(\cosh(\theta) + \sinh(\theta))$$

Como $A_{IPNE} = A_{ONE} = A_{QNEG}$, temos:

$$\frac{\theta}{2} = -\frac{1}{2}\ln(\cosh(\theta) - \sinh(\theta)) \tag{41}$$

$$\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}\ln(\cosh(\theta) + \sinh(\theta)) \tag{42}$$

Exponenciando (1) e (2) teremos o seguinte:

$$\mathrm{e}^{-\theta} = \cosh(\theta) - \sinh(\theta) \tag{43}$$

$$\mathrm{e}^{\theta} = \cosh(\theta) + \sinh(\theta) \tag{44}$$

Somando (3) e (4), teremos:

$$\cosh(\theta) = \frac{\mathrm{e}^{\theta} + \mathrm{e}^{-\theta}}{2} \tag{45}$$

Subtraindo (4) de (3), teremos:

$$\sinh(\theta) = \frac{\mathrm{e}^{\theta} - \mathrm{e}^{-\theta}}{2} \tag{46}$$

De (5) e (6) define-se as outras funções hiperbólicas.

5 Estudo das funções

5.1 Propriedades da função $\sinh(x)$

Veja a figura 5.1.

• $\sinh(0) = \frac{\mathrm{e}^{o} - \mathrm{e}^{-0}}{2} = 0$, logo passa pela a origem.

• $\sinh(-x) = \frac{\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{x}}{2} = -\sinh(x)$, isto é a função é ímpar, logo o gráfico é simétrico em relação a origem.

• $\frac{d}{dx}\sinh(x) = \frac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{2} = \cosh(x) > 0$, logo a função é crescente em todo seu domínio.

• $\frac{d^2}{dx^2}\sinh(x) = \sinh(x) = \frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{2}$, daí temos:
$x < 0 \Rightarrow f(x) < 0$ concavidade voltada para baixo;
$x > 0 \Rightarrow f(x) > 0$ concavidade voltada para cima.

• $\lim\limits_{x \to +\infty} \sinh(x) = +\infty$
e
$\lim\limits_{x \to -\infty} \sinh(x) = -\infty$
Logo a imagem da função é o intervalo $(-\infty, +\infty)$.

• $\mathrm{e}^{x} > 0$ e $\mathrm{e}^{-x} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, então
$-\mathrm{e}^{-x} < \mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x} < \mathrm{e}^{x}$
$\Rightarrow -\frac{\mathrm{e}^{x}}{2} < \frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{2} < \frac{\mathrm{e}^{x}}{2}$
$\Rightarrow -\frac{\mathrm{e}^{x}}{2} < \sinh(x) < \frac{\mathrm{e}^{x}}{2}$, logo a função $\sinh(x)$ é sempre maior que a função $-\frac{\mathrm{e}^{x}}{2}$ e sempre menor que a função $\frac{\mathrm{e}^{x}}{2}$.

• $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sinh(x) - \frac{\mathrm{e}^{+x}}{2}) = 0$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} (\sinh(x) + \frac{\mathrm{e}^{-x}}{2}) = 0$. Do primeiro limite, temos que quando as duas funções tende ao $+\infty$ elas se aproximam, lembrando que $\sinh(x) < \frac{\mathrm{e}^{x}}{2}$. E do segundo limite as duas funções se aproxima quando tende ao $-\infty$, lembrando que $-\frac{\mathrm{e}^{x}}{2} < \sinh(x)$.
Portanto temos o gráfico de $f(x) = \sinh(x)$, junto com as funções $-\frac{\mathrm{e}^{x}}{2}$ e $\frac{\mathrm{e}^{x}}{2}$.

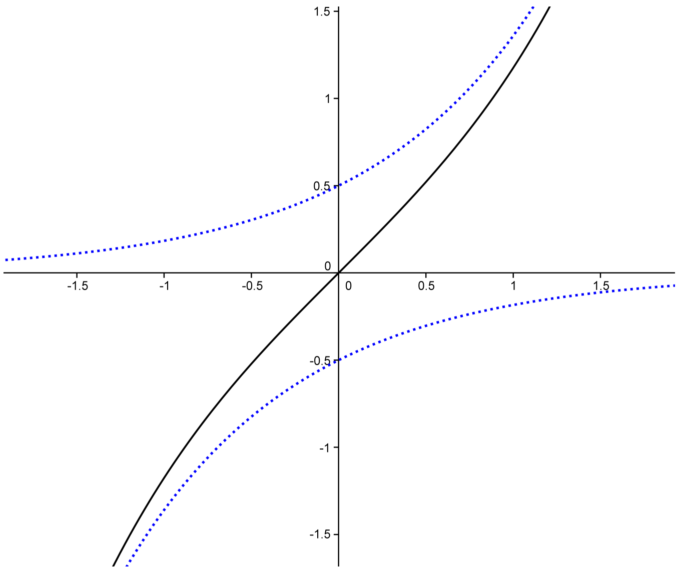

Figura 4: Seno hiperbólico

5.2 Propriedades da função $\cosh(x)$

Veja a figura 5.2.

• $\cosh(0) = \frac{e^o + e^{-0}}{2} = 1$, logo quando x tem a abscissa igual a zero a ordenada é 1.

• $\cosh(-x) = \frac{e^{-x}+e^{x}}{2} = \cosh(x)$, assim a função é par, logo é simétrica em relação ao eixo y.

• $\frac{d}{dx}\cosh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh(x)$,
se $x > 0 \Rightarrow \frac{e^x - e^{-x}}{2} > 0$, a função é crescente;
se $x < 0 \Rightarrow \frac{e^x - e^{-x}}{2} < 0$, a função é decrescente.

• $\frac{d^2}{dx^2}\cosh(x) = \cosh(x)$, observe que $g(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ é sempre maior que 1, logo a concavidade da função é sempre voltada para cima.

• $\lim\limits_{x\to+\infty} \cosh(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} \cosh(x) = +\infty$, disto segue que a imagem da função é o intervalo $[1, +\infty)$.

• Observe que:
$\frac{e^x}{2} < \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ e $\frac{e^{-x}}{2} < \frac{e^x+e^{-x}}{2}$. Ou seja, $\cosh(x)$ é sempre maior que as funções $\frac{e^x}{2}$ e $\frac{e^{-x}}{2}$.

• $\lim\limits_{x\to+\infty} (\cosh(x) - \dfrac{e^{+x}}{2}) = 0$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} (\cosh(x) - \dfrac{e^{+x}}{2}) = 0$. Do primeiro limite, temos que quando as duas funções tende ao $+\infty$ elas se aproximam, lembrando que $\cosh(x) > \frac{e^x}{2}$. E do segundo limite as duas funções se aproxima quando tende ao $-\infty$, lembrando que $\cosh(x) > \frac{e^{-x}}{2}$.
Portanto temos o gráfico de $g(x) = \cosh(x)$, junto com as funções $\frac{e^x}{2}$ e $\frac{e^x}{2}$.

Agradecimentos especiais ao prof. Doherty Andrade pelas inúmeras sugestões que melhoraram este trabalho.

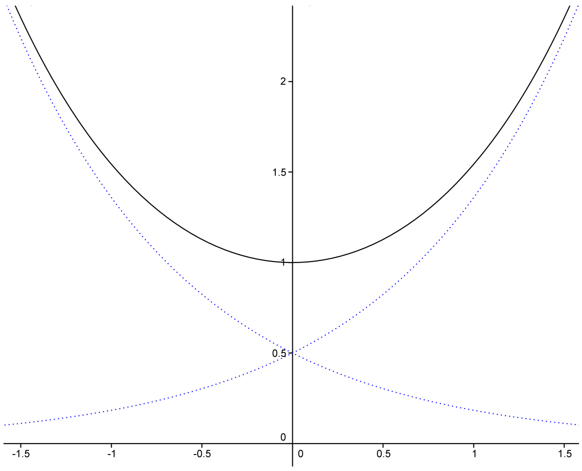

Figura 5: cosseno hiperbólico

Referências

[1] Shenk,Al, Calculus and analytic geometry,Therd Edition, San Diego - Califórnia, 1984.

[2] Silverman, Richard, A., Calculus with analytic geometry,Editora Prentice-Hall do Brasil Ltda ,Rio de Janeiro, 1985.

[3] Leithold, L., O cálculo com geometria análitica,v 1, Tradução Cyro de Carvalho Patarra, Editora Harba, São Paulo, 1994.

[4] George B. Thomas, JR., Cálculo, v. 2 ,Tradução Alfredro Alves de Farias,Editora Ao livro técnico, Rio de Janeiro, 1972.