O problema das panquecas

Jorge Ferreira de Lacerda – jflacerda@uem.br
Universidade Estadual de Maringá – DMA
87020-900 Maringá-PR, Brazil

Resumo: Nessas notas apresentamos a solução do problema de corte das panquecas. Na sua versão mais simples, o problema consiste em dividir, com um único corte, duas panquecas ao meio. Isto é, o corte deve dividir cada uma delas em duas regiões de mesma área.

Sumário

1 Introdução


O leitor, supostamente interessado em matemática, certamente não considera relevante este problema de dividir panquecas a ponto de merecer o esforço de aplicar matemática para resolvê-lo, opinião com a qual concordamos plenamente. De fato, nosso objetivo é apresentar e tratar de um problema de matemática na área da geometria e topologia que pode ser abordado usando alguns conceitos e resultados elementares no nível de graduação.

O problema enunciado com panquecas não é sequer um apelo motivacional, pois os matemáticos encontram motivação suficiente na própria Matemática. Revela, no entanto, um pouco do espírito de bom humor e alegria que permeia o trabalho nesta maravilhosa área da ciência.

Para continuar neste espírito, vamos fingir que estamos aplicando matemática para resolver o “relevante problema de dividir panquecas”. A estratégia para isto é criar um modelo matemático para o problema.

Há outros problemsa matemáticos relacionado às panquecas. Um deles é: com n cortes retos, como dividir uma panqueca em um número máximo de pedaços. O leitor interessado pode consultar os livros [1] e [2] que tratam desse problema com detalhes. Mas não é difícil concluir que com n cortes retos, pode-se obter no máximo $\frac{1}{2}\left(n^2+n+2\right)$ pedaços. O segundo problema, é sobre o ordenamento pelo tamanho de uma pilha de panquecas utilizando apenas uma espátula. Veja [3].

2 O problema do corte das panquecas

Vamos dividir o nosso problema em dois.
Problema 1: dividir uma panqueca em dois pedaços de mesmo tamanho com um só corte reto.
Problema 2: tendo duas panquecas colocadas em um mesmo prato, dividir cada uma delas em dois pedaços de mesmo tamanho com um só corte reto.

Note que se as panquecas fossem “redondas”a solução destes dois problemas seria bastante óbvia. Porém, panquecas podem ter formatos bastante irregulares como sugere as imagens acima, podendo conter buracos.

3 Modelo matemático e teoremas

Adotaremos como modelo matemático para uma panqueca uma região do Plano Euclidiano que vamos definir. Para isto introduzimos alguns elementos básicos da chamada Topologia do Plano Euclidiano que utilizaremos.
Distância: A *distância* entre dois pontos $x=(x_1,x_2)$ e $y=(y_1,y_2)$ do plano cartesiano $\mathbb{R}^2$ é dada por

$$\|x-y\| = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$$

Interior e Aberto: Seja $X\subset\mathbb{R}^2$ um subconjunto qualquer do plano. Um ponto $p\in X$ é dito *ponto interior* de X se existe $\epsilon>0$ tal que

$$\|x-p\|<\epsilon \Longrightarrow x\in X$$

De maneira informal, um ponto está no interior de um conjunto quando todo ponto do plano suficientemente próximo deste também está no conjunto.

O conjunto de todos os pontos interiores do conjunto X, denotado por $\operatorname{int}(X)$, é chamado *Interior de* X.

O conjunto X é *aberto* se todos os seus pontos são interiores, isto é, $\operatorname{int}(X)=X$.

Decorre desta definição que o interior de qualquer conjunto é um conjunto aberto. O conjunto $D=\{x\in\mathbb{R}^2: \quad \|x-p\|\le r\}$, chamado *disco fechado* de centro p e raio r tem como interior o conjunto (aberto) $\text{int}(D) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \quad \|x - p\| < r\}$, chamado *disco aberto*.

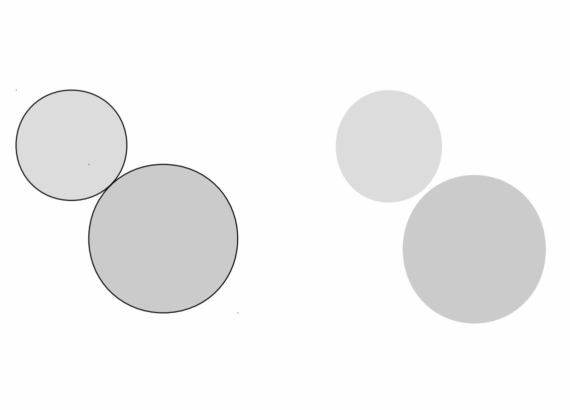
Conjunto limitado: Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^2$ é *limitado* se existe $C > 0$ tal que $\|x\| < C$, para todo $x \in X$.

Em palavras, um conjunto é limitado se estiver contido em algum disco de centro na origem.

Conjunto conexo: Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^2$ é *conexo* se, não existem abertos disjuntos $U, V \subset \mathbb{R}^2$ tais que $X \subset U \cup V$ e $X \cap U \neq \phi \neq X \cap V$.

Quando tais abertos existem dizemos que eles fornecem uma cisão do conjunto X que é então dito ser *desconexo*.

Exemplos: um semiplano é um conjunto conexo mas não limitado. Um disco é um conjunto conexo e limitado. A união de dois discos tangentes é um conjunto conexo e limitado mas o interior deste conjunto não é conexo.



Uma *região* é qualquer subconjunto limitado do plano.

Vamos admitir os seguintes axiomas:

Axiomas de área: Vamos admitir que cada região R do plano tem uma área $\mathcal{A}(R) \geq 0$ satisfazendo, além dos axiomas de área da geometria euclidiana, a seguinte propriedade adicional:

Axioma 3.1

$$\mathcal{A}(R) = 0 \quad \textit{se, e somente se,} \quad \textit{int}(R) = \emptyset$$

Para os axiomas de área e outras questão de geometria euclidiana utilizadas neste artigo indicamos a referência [4].

Função contínua:

Se $X \subset \mathbb{R}^2$, uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é *contínua no ponto* $p \in X$ se, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|x - p\| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(p)| < \epsilon$$

A função é *contínua em* X se for contínua em todos os pontos de X.

Uma propriedade bastante usada que assegura a continuidade de uma função é dada no seguinte lema.

Lema 3.1 *Dada uma função $f : X \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, se existir $k > 0$ tal que, para todo $x \in X$*

$$\|f(x) - f(p)\| \leq k\|x - p\|$$

então f é contínua.

Demonstração: Dado $\epsilon > 0$, tome $\delta = \frac{\epsilon}{k}$. Se $\|x - p\| < \delta$, da desigualdade do lema obtemos $\|f(x) - f(p)\| < \epsilon$.$\square$

O seguinte resultado relaciona o conceitos de conexidade e continuidade.

Teorema 3.2 *Se $X \subset \mathbb{R}^2$ é um conjunto conexo e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, então $f(X) \subset \mathbb{R}$ é um intervalo.*

Observação: O teorema acima é um corolário de um teorema geral em topologia que estabelece que a imagem de um conjunto conexo por uma função contínua é um conjunto conexo, combinado com o fato que os conjuntos conexos da reta real são os intervalos.

Para questões de continuidade de funções, conexidade e outras questões de topologia utilizadas aqui indicamos a referência [5].

Corolário 3.3 (Teorema do Valor Intermediário)

Seja $X \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto conexo e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $a, b \in X$ e $f(a) < c < f(b)$, então existe $x \in X$ tal $f(x) = c$.

Demonstração: De acordo com o teorema 3.2, a imagem $f(X)$ de X por f é um intervalo contendo $f(a)$ e $f(b)$. Sendo c um ponto entre $f(a)$ e $f(b)$, o ponto c também está neste intervalo, isto é, $c \in f(X)$. Logo existe $x \in X$ tal que $f(x) = c$$\square$

Sobre o teorema do valor intermediário clique AQUI.

Corolário 3.4 *Se $S \subset \mathbb{R}^2$ é uma circunferência de centro na origem e $f : S \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, então existe $x \in S$ tal que $f(x) = f(-x)$.*

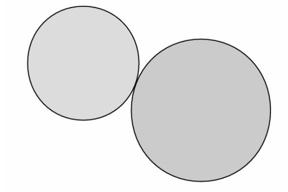
Demonstração: Seja $g : S \to \mathbb{R}$ a função dada por $g(x) = f(x) - f(-x)$. Como f é contínua, g também é contínua.

Se g é nula, então $f(x) = f(-x)$ para todo $x \in S$. Se g não é nula, devido a propriedade que $g(-x) = -g(x)$, existem $a, b \in S$ tais que $g(a) < 0 < g(b)$. Como S é um conjunto conexo, pelo corolário 3.3, existe $x \in S$ tal que $g(x) = 0$. Logo, $f(x) = f(-x)$$\square$

4 Enunciado em termos do modelo

O modelo matemático que adotaremos para uma panqueca é o de uma *região de interior conexo*.

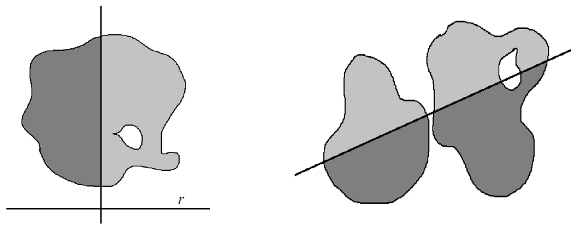
Observação: De acordo com este modelo, duas panquecas enconstadas uma na outra não devem ser confundidas como uma só panqueca.



Os dois seguintes teoremas correspondem aos dois problemas das panquecas.

Teorema 4.1 *Dada uma região de interior não vazio e conexo e uma reta r, existe uma única reta perpendicular a r que divide a região em duas regiões de mesma área.*

Teorema 4.2 *Dadas duas regiões, ambas de interior não vazio e conexo, existe uma reta que divide cada uma das regiões em duas regiões de mesma área.*



5 Demonstração dos teoremas

Para demonstrar o teorema 4.1, orientamos a reta r com origem O, escolhendo uma semi reta positiva. Isto provê coordenadas para os pontos de r. Cada $x \in \mathbb{R}$ determina um único ponto $\bar{x} \in r$ tal que x é a distância orientada do ponto $\bar{x}$ ao ponto O. Dado $x \in \mathbb{R}$, seja π_x o semiplano determinado pela perpendicular a r em $\bar{x}$ que contém a porção de r dos pontos de coordenada menor que x. (Veja a primeira das duas figuras abaixo).

Definimos uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $\quad f(x) = \mathcal{A}(R \cap \pi_x)$.

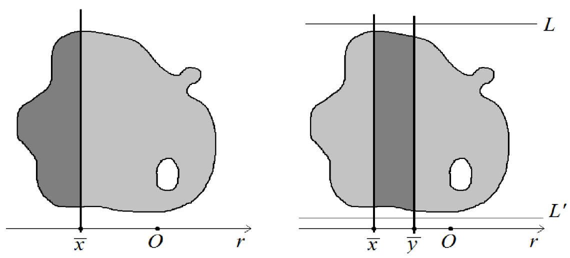


Figura 1: Ilustração do teorema

Sendo limitada a região R, existem $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$, tais que $f(a) = 0$ e $f(b) = \mathcal{A}(R)$. Provaremos que a função f é contínua e seguirá do teorema do valor intermediário que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(c) = \frac{1}{2}\mathcal{A}(R)$. Assim, a reta perpendicular a r no ponto $\bar{c}$ divide a região R em duas regiões de mesma área.

Provemos agora a unicidade da reta encontrada acima.

Suponha que duas retas distintas e perpendiculares a reta r dividam, cada uma delas, a região R em duas regiões de mesma área. Considere a faixa limitada por estas retas. A região R se expressa como união de três regiões sem ponto interior comum. A saber, a porção de R na faixa e as duas porções de R exteriores a faixa. Da hipótese que cada uma destas retas divide R em duas regiões de mesma área deduzimos que cada uma das porções de R exteriores a faixa tem área medindo $\frac{1}{2}\mathcal{A}(R)$. Além disto, como R tem interior não vazio, do axioma 3.1 temos que $\mathcal{A}(R) > 0$ e, portanto, cada uma destas porções tem interior não vazio. Por outro lado, da propriedade aditiva da área, a soma das áreas das três porções é igual a área de R. Logo, a área da porção de R na faixa é nula, tendo, pelo axioma 3.1, interior vazio. Isto mostra que o interior de R está contido no exterior da faixa que consiste da união de dois abertos disjuntos cada um deles, além disto, contendo uma porção não trivial do interior de R. Isto fornece uma desconexão para o interior a região R, contradizendo a hipótese do teorema e completando nosso argumento.

Agora vamos provar a continuidade da função f:

Por ser limitada, a região R está entre duas retas paralelas a reta r (Veja a segunda das duas figuras acima). Se c a distância entre estas retas, então, dados $x, y \in \mathbb{R}$ com $x < y$, $|f(x) - f(y)|$ é a área da porção de R entre as retas perpendiculares a r em $\bar{x}$ e $\bar{y}$ respectivamente. Ora, esta porção de R está contida no retângulo limitado pelas perpendiculares e pelas paralelas já mencionadas o qual tem área $c \cdot |x - y|$. Logo

$$|f(x) - f(y)| \leq c \cdot |x - y|$$

Aplicando o lema 3.1 concluímos que a função f é contínua.

Para demonstrar o teorema 4.2, considere uma região R. Sendo R limitada, existe uma circunferência S de centro na origem O do plano cartesiano tal que a região R está no interior do círculo limitado por S.

Dado um ponto $x \in S$, de acordo com o teorema 4.1, existe um único ponto $\overline{x}$ na reta Ox tal que a reta perpendicular a Ox em $\overline{x}$ divide a região R em duas regiões de mesma área. Seja x' a coordenada do ponto $\overline{x}$ em relação ao sistema de coordenadas determinado na reta Ox pela semi reta Ox.

Definimos a função $f : S \to \mathbb{R}$ por $f(x) = x'$.

Note que para cada $x \in S$ temos também que $-x \in S$. Por construção, a função f tem a seguinte propriedade:

$$f(-x) = -f(x). \tag{5.1}$$

A propriedade da função f dada no seguinte lema acarreta, de acordo com o lema 3.1, sua continuidade:

Lema 5.1 *Dado $p \in S$, se $x \in S$ é tal que o ângulo $\theta = p\hat{O}x$ é agudo, então,*

$$|f(x) - f(p)| \leq 2\|x - p\|.$$

A demonstração deste Lema está no final desta seção.

Passamos a demonstrar agora o teorema 4.2.

Dadas duas regiões de interior conexo R_1 e R_2, considere uma circuferência S de centro na origem tal que as regiões estão contidas no interior do círculo limitado por S. Considere as funções f_1 e f_2 definidas pelas regiões R_1 e R_2 respectivamente como acima e seja $\phi : S \to \mathbb{R}$ definidada por

$$\phi(x) = f_1(x) - f_2(x).$$

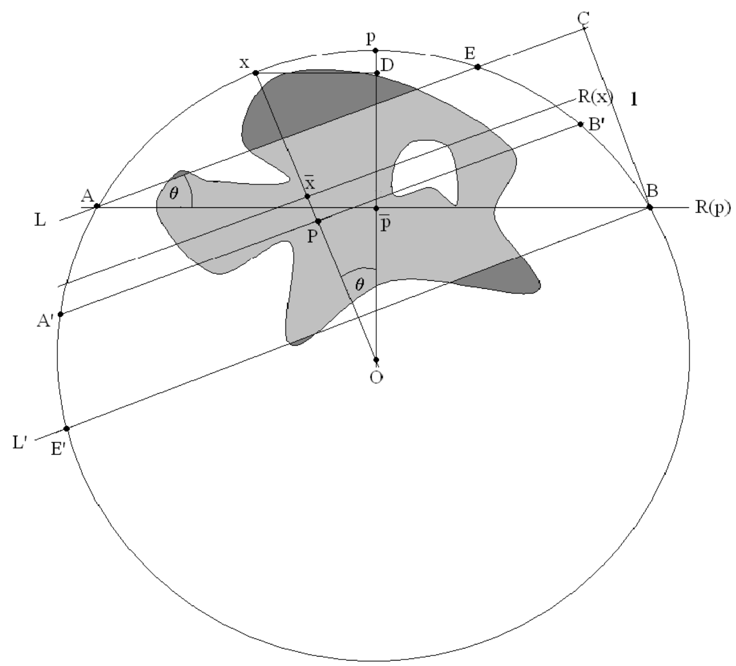
De acordo com o lema 5.1 as funções f_1 e f_2 são contínuas. Logo também é contínua a função ϕ. Além disto, as funções f_1 e f_2 tem, ambas, a propriedade 5.1. Isto acarreta para a função ϕ a mesma propriedade, isto é,

$$\phi(-x) = -\phi(x) \tag{5.2}$$

Usamos o corolário 3.4 para encontrar $c \in S$ tal que $\phi(c) = \phi(-c)$. Da propriedade 5.2 concluímos que $\phi(c) = 0$ e, portanto $f_1(c) = f_2(c) = \lambda$. Logo, a reta perpendicular a Oc no ponto de coordenada λ divide cada uma das regiões R_1 e R_2 em duas regiões de mesma área.

Demonstração do lema 5.1:

Considere a figura abaixo na qual as retas $R(p)$ e $R(x)$ são perpendiculares as retas Op e Ox nos pontos $\overline{p}$ e $\overline{x}$ respectivamente, ambas dividindo a região R em duas regiões de mesma área. Além disto, as retas L e L' são paralelas a reta $R(x)$; Dx é perpendicular Op; CB é perpendicular a AC e a rotação de centro O e ângulo θ que leva p em x transforma o ponto $\overline{p}$ no ponto P e a reta AB na reta $A'B'$. Observe que a reta $A'B'$ é paralela a reta $R(x)$.



Considere as duas porções da região R exteriores a faixa entre as retas L e L'. Observe que elas estão em lados opostos tanto em relação a reta $R(p)$ como em relação a reta $R(x)$.

Como a reta $R(p)$ divide a região em duas regiões de mesma área, a área de cada uma destas porções é, no máximo, a metade da área da região. Por outro lado, a reta $R(x)$ também divide a região em duas regiões de mesma área. Isto mostra que a reta $R(x)$ está nesta faixa.

Seja $l = \|B - C\|$ a largura da faixa. Observe que os ângulos $p\hat{O}x$ e $C\hat{A}B$ são iguais. Logo, os triângulos retângulos xDO e ACB são semelhantes. Assim

$$\frac{\|x - D\|}{\|x - O\|} = \frac{l}{\|A - B\|}$$

Agora $\|x - O\| = r$ é o raio da circunferência, $\|A - B\| \leq 2r$ e $\|x - D\| \leq |x - p\|$. Assim,

$$l \leq 2\|x - p\|. \tag{5.3}$$

O ponto P é a imagem do ponto $\overline{p}$ pela rotação de centro O que leva p em x, a coordenada de P na reta Ox é a mesma de $\overline{p}$ na reta Op. Assim,

$$|f(x) - f(p)| = \|\overline{x} - P\|. \tag{5.4}$$

O ponto $\overline{x}$ está na faixa pois nela está a reta $R(x)$.

Afirmamos que o ponto P também está na faixa.

De fato: Sendo o ângulo $E\hat{A}B$, inscrito na circunferência, correspondente ao ângulo central $E\hat{O}B$, $\quad E\hat{O}B = 2\theta$. Por outro lado B' é a imagem de B pela rotação de ângulo θ. Logo $B'\hat{O}B = \theta < E\hat{O}B$. Logo, o ponto B' está na faixa e, como P está na reta $A'B'$ que é paralela a $R(x)$, deduzimos que o ponto P está na faixa.

Assim temos:

$$\|\overline{x} - P\| \leq l. \tag{5.5}$$

Combinando as relações 5.3, 5.4 e 5.5 temos

$$|f(x) - f(p)| \leq 2\|x - p\|.$$

Referências

[1] M. Gardner, Martin Gardner's New Mathematical Diversions from Scientific American, New York: Simon and Schuster, 1966, pp. 235–239.

[2] F. S. Roberts, Applied Combinatorics, New Jersey: Prentice-Hall, 1984, pp. 198–200.

[3] Gates W.H.; Papadimitriou, C.H. Bounds for sorting by prefix reversal. Discrete Math. 27 (1979), 47–57.

[4] J. R. Gerônimo, V. S. Franco, Geometria Plana e Espacial: Um estudo axiomático, 2ª Ed., Maringá: EDUEM, 2010.

[5] E. L. Lima, Espaços Métricos, 2ª Ed., Rio de Janeiro, IMPA, CNPQ, 1977.