Universidade Estadual de Maringá
Departamento de Matemática

Introoudção a Álgebra Linear

Notas de Aula

Marcos Roberto Teixeira Primo

Maringá, 2023

Resumo

Estas notas de aula são direcionadas para as disciplinas de Álgebra Linear dos cursos de Engenharia, Física e Química ofertadas pelo Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Maringá. Recomendamos fortemente que aos utilizá-las os(as) estudantes tenham sempre em mãos os livros que estão elencados nas Referências Bibliográficas, em especial os livros [1] e [2], nos quais este texto está baseado.

Sumário

Capítulo 1

Matrizes

O objetivo deste capítulo é introduzir o conceito de matriz e determinantes, estudar suas principais propriedades e operações entre elas, com o intuito de aplicá-las à resolução de sistemas lineares que será estudado no próximo capítulo.

1.1 Operações com Matrizes

Vamos definir formalmente o conceito de matrizes de números reais, formalizar as notações e alguns tipos especiais de matrizes que serão utilizadas ao longo do curso. Vamos também definir algumas operações com matrizes e apresentar algumas de suas principais propriedades.

Intuitivamente matriz é uma tabela de números dispotos em linha se colunas. Frequentemente encontramos exemplos de matrizes, como o preço de produtos, o horário dos filmes em um a cinema e na nossa vida acadêmica temos o seguinte exemplo que retrata muito bem um exemplo onde aparece o conceito de matriz:

	Nota 1	Nota 2	Nota 3	Média Final
Aluno 1	7,0	8,0	9,0	8,0
Aluno 2	5,0	6,0	7,0	6,0
Aluno 3	0,0	1,0	2,0	1,0

Ao observarmos a tabela acima, compreendemos que o primeiro aluno foi muito bem no curso, o segundo aluno não foi muito bem, porém foi aprovado na disciplina, enquanto que o terceiro aluno não foi bem e foi reprovado na disciplina. Esperamos que nessa disciplina todos sejam como o primeiro aluno ou no mínimo como o segundo.

Esquecendo por um momento o significado das "linhas"e das "colunas"da tabela acima temos a seguinte tabela de números

$$\begin{bmatrix} 7,0 & 8,0 & 9,0 & 8,0 \\ 5,0 & 6,0 & 7,0 & 6,0 \\ 0,0 & 1,0 & 2,0 & 1,0 \end{bmatrix}$$

Essa tabela de números, a partir de agora, será chamada de matriz com três linhas

$$\begin{bmatrix} 7,0 & 8,0 & 9,0 & 8,0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5,0 & 6,0 & 7,0 & 6,0 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} 0,0 & 1,0 & 2,0 & 1,0 \end{bmatrix}$$

e quatro colunas

$$\begin{bmatrix} 7,0 \\ 5,0 \\ 0,0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8,0 \\ 6,0 \\ 1,0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9,0 \\ 7,0 \\ 2,0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 8,0 \\ 6,0 \\ 1,0 \end{bmatrix}.$$

Dessa forma temos a seguinte definição

Definição 1.1. *Uma* **matriz** *de ordem $m \times n$ é uma tabela de números dispostos em m linhas e n colunas.*

Usaremos letras maísculas para dar "nomes" às matrizes e usaremos a seguinte notação para representar uma matriz A com m linhas e n colunas:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

ou, para economizarmos espaço, de forma resumida por:

$$A = [a_{ij}]_{m\times n}.$$

O elemento a_{ij} é chamando de termo geral da matriz A e vale a pena ressaltar que i varia de 1 até m $(i = 1, 2, \ldots, m)$ e j varia de 1 até n $(j = 1, 2, \ldots, n)$. Assim o elemento a_{ij} ocupa a posição na $i-$ésima linha e na $j-$ésima coluna.

Por exemplo se temos a matriz $A = [a_{ij}]_{7\times 5}$, com $a_{23} = 5$ sabemos que A é uma matriz que possui 7 linhas, 5 colunas e que o elemento da segunda linha e quinta coluna é igual a 5. Veja

$$A = \begin{bmatrix} \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \\ \bigcirc & \bigcirc & 5 & \bigcirc & \bigcirc \\ \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \\ \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \\ \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \\ \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \\ \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \end{bmatrix}.$$

Como está, nada sabemos sobre os demais elementos.

Agora, se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 4 & -3 & 2 \end{bmatrix},$$

então sabemos que A é uma matriz que possui duas linhas, três colunas e os elementos são:

$$a_{11} = 1 \quad a_{12} = 0 \quad a_{13} = -4$$
$$a_{21} = 4 \quad a_{22} = -3 \quad a_{23} = 2.$$

Vamos agora apresentar alguns tipos especiais de matrizes e algumas propriedades das matrizes que utilizaremos ao longo de todo o curso. Seja

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

uma matriz de ordem $m \times n$.

- quando $m = n$, isto é, quando o número de linhas for igual ao número de colunas a matriz A será chamada de quadrada de ordem n. Por exemplo, a matriz

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{3} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt[3]{9} \end{bmatrix}$$

é uma matriz quadrade de ordem 3, pois possui três linha e três colunas, enquanto que a matriz

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

é uma matriz quadrada de ordem 2;

- se $a_{ij} = 0$ para todo $i = 1, 2, \ldots, m$ e para todo $j = 1, 2, \ldots, n$, isto é se todo elemento da matriz for igual a zero, a matriz é chamanda de matriz nula de ordem $m \times n$ e denotaremos essa matriz por

$$\mathbb{O}_{m\times n} = [0]_{m\times n}.$$

Por exemplo

$$\mathbb{O}_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{O}_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbb{O}_{3\times 1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

são exemplos de matrizes nulas de várias ordens. Observemos que a segunda matriz é também uma matriz quadrada;

- se A for uma matriz quadrada de ordem n e $a_{ij} = 0$ para todo $i \neq j$, com $i = 1, 2, \ldots, m$ e $j = 1, 2, \ldots, n$, isto é, se a matriz A de ordem $m \times n$ for da forma

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{n-1n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix},$$

então A será chamada de matriz diagonal de ordem n. Vale apena observar aqui que eventualmente os elementos da diagonal podem ser nulos, o que não pode acontecer é um elemento fora da diagonal ser não nulo. Os elementos a_{ii}, $i = 1, 2, \ldots, n$ constituem a diagonal principal da matriz quadrada de ordem n.

Para ilustrarmos esses fatos vamos a alguns exemplos: as matrizes quadradas

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

são matrizes diagonais de ordem 2 e 3 com diagonais principais $2,\ -1$ e $2,\ 1, 0$ respectivamente, enquanto que a matrizes quadradas

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e } E = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

não são matrizes diagonais. Observemos ainda que um elemento a_{ij} de uma matriz quadrada de ordem n está na diagonal se, e somente se, $i = j$;

- um caso particular de matriz diagonal é quando $a_{ij} = 0$ para todo $i \neq j$ e $a_{ii} = 1$, com $i = 1, 2, \ldots, m$ e $j = 1, 2, \ldots, n$, isto é, a matriz quadrada de ordem n é da forma

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Neste caso a matriz será chamada de matriz identidade de ordem n e denotaremos por $\mathbb{I}_n$.

Por exemplo, a matriz quadrada

$$\mathbb{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

é a matriz identidade de ordem 2, enquanto que a matriz quadrada

$$\mathbb{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

é a matriz identidade de ordem 3.

Definição 1.2. *Sejam $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ duas matrizes de mesma ordem $m \times n$. Diremos que $A = B$ se, e somente se,*

$$a_{ij} = b_{ij},$$

para quaisquer $i = 1, 2, \ldots, m$ e $j = 1, 2, \ldots, n$.

Por exemplo as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

são matrizes iguais, pois ambas são matrizes de ordem 2×3 e $a_{ij} = b_{ij}$ para quaisquer $i = 1, 2$ e $j = 1, 2, 3$. Enquanto que as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

não são matrizes iguais, pois apesar de serem ambas matrizes de ordem 2×3, neste caso temos que

$$a_{23} = 3 \neq 0 = c_{23}$$

e as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

não são comparáveis, pois a primeira é de ordem 2×3 e a segunda é de ordem 2×2.

Exercício 1.3. *Sejam*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & x^2 \\ 2x-1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 2 & 2x-1 \\ x^2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Calcule o valor de x, para que $A = B$.

Definição 1.4. *Sejam* $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ *e* $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ *duas matrizes de mesma ordem* $m\times n$*. Definimos a soma da matriz* A *com a matriz* B *como sendo uma nova matriz, também de ordem* $m\times n$*,* $C = [c_{ij}]_{m\times n}$ *com elementos dados por*

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

para quaisquer $i = 1, 2, \ldots, m$ *e* $j = 1, 2, \ldots, n$*.*

Ao observarmos a definição de soma de matrizes dada acima vemos que ao somarmos duas matrizes, elas precisam ser necessariamente de mesma ordem, e o resultado é uma matriz de mesma ordem das duas originais e os elementos da soma são calculados somando-se os elementos de A com os elementos de B posição por posição. Por exemplo,

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Ainda, se

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbb{O}_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

então

$$A + \mathbb{O}_{2\times 3} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} = A.$$

Observemos que na soma da matriz A com a matriz nula de mesma ordem da matriz A resultou a matriz A. Veremos mais adiante que essa é uma propriedade que vale para matrizes de quaisquer ordem.

Ainda a título de exemplo temos que

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & -2 \\ -3 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 6 \\ 6 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 9 \end{bmatrix}.$$

Proposição 1.5. *Sejam* A*,* B *e* C *três matrizes de mesma ordem* $m \times n$*. Então valem as seguintes propriedades:*

1. $A + (B + C) = (A + B) + C$ *(propriedade associativa);*

2. *$A + B = B + A$ (propriedade comutativa);*

3. *$A + \mathbb{O}_{m\times n} = A$, onde $\mathbb{O}_{m\times n}$ é a matriz nula de ordem $m \times n$ (elemento neutro);*

4. *se $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, existe uma matriz, também de ordem $m \times n$ e chamada de matriz oposta de A, definida por $-A = [-a_{ij}]_{m\times n}$ tal que*

$$A + (-A) = \mathbb{O}_{m\times n},$$

onde $\mathbb{O}_{m\times n}$ é a matriz nula de ordem $m \times n$ (elemento oposto).

Para ilustrarmos a propriedade 4 acima, se

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

é uma matriz de ordem 4×3, então

$$-A = \begin{bmatrix} -5 & -(-2) & -3 \\ -2 & -1 & -(-4) \\ -1 & -0 & -2 \\ -3 & -(-1) & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 2 & -3 \\ -2 & -1 & 4 \\ -1 & -0 & -2 \\ -3 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

e, da soma de matrizes,

$$A + (-A) = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & 2 & -3 \\ -2 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbb{O}_{4\times 3}.$$

Se $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ são duas matrizes de mesma ordem $m \times n$, a propriedade 4 da proposição anterior nos permite definir a diferença entre A e B como sendo uma nova matriz C, de ordem $m \times n$, dada por

$$C = A - B = A + (-B).$$

Logo, se $C = [c_{ij}]_{m\times n}$, então

$$c_{ij} = a_{ij} - b_{ij},$$

para $i = 1, 2, \ldots, m$ e $j = 1, 2, \ldots, n$.

Por exemplo,

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -3 & -6 & -9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \\ -9 & -6 & -3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -3 & -6 & -9 \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} -3 & -2 & -1 \\ -6 & -4 & -2 \\ 9 & 6 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -4 & 0 & 4 \\ 6 & 0 & -6 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Definição 1.6. *Sejam $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ uma matriz de ordem $m \times n$ e $k \in \mathbb{R}$ um número real qualquer. Definimos o produto de k pela matriz A como sendo uma nova matriz, também de ordem $m \times n$, $C = [c_{ij}]_{m\times n}$ com elementos dados por*

$$c_{ij} = ka_{ij}$$

para quaisquer $i = 1, 2, \ldots, m$ e $j = 1, 2, \ldots, n$.

Ao observarmos a definição acima, vemos que a matriz resultante é uma matriz de mesma ordem da matriz original e os elementos dessa matriz são obtidos multiplicando-se cada elemento de A por k. Por exemplo,

$$3\begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 9 \end{bmatrix}.$$

Ainda, se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

então

$$-1A = -1\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} = -A.$$

Proposição 1.7. *Sejam A e B duas matrizes de mesma ordem $m \times n$ e $k,\ k_1,\ k_2 \in \mathbb{R}$ três números reais. Então valem as seguintes propriedades:*

1. $k(A+B) = kA + kB$ *(propriedade distributiva);*
2. $(k_1 + k_2)A = k_1A + k_2A$ *(propriedade distributiva);*
3. $k_1(k_2A) = (k_1k_2)A = (k_2k_1)A = k_2(k_1A)$;
4. $0A = \mathbb{O}_{m\times n}$, *onde* $\mathbb{O}_{m\times n}$ *é a matriz nula de ordem* $m \times n$ *;*
5. $-1A = -A$, *onde* $-A$ *é a matriz de ordem* $m \times n$ *chamada de matriz oposta de* A.

Exercício 1.8. *Sejam*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 6 & 4 & 2 \end{bmatrix} \quad e \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

matrizes de ordem em 2×3. *Calcule*

$$3(A - \frac{1}{2}B) + C.$$

Vamos agora aprender como multiplicar duas matrizes. A multiplicação de matrizes é um pouco diferente das operações que estávamos trabalhando até agora, para ser mais específico, para multiplicarmos duas matrizes precisamos que o número de colunas da primeira matriz e o número de linhas da segunda matriz sejam iguais. Caso contrário a multiplicação de matrizes não estará definida. Antes de definirmos formalmente essa definicção vejamos primeiro alguns exemplos.

Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Temos que A é uma matriz de ordem 1×3 e a matriz B tem ordem 3×1. Dessa forma o número de colunas de A é igual a 3 que é exatamente o número de linhas da matriz B. Para multiplicarmos A por B procederemos da seguinte forma. Primeiro o resultado será uma matriz C de ordem 1×1, isto é,

$$A_{1\times 3}B_{3\times 1} = C_{1\times 1}.$$

Segundo, o elemento c_{11} da matriz C é obtido da seguinte forma

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} = 1\,.\,1 + (-1)\,.\,2 + 2\,.\,3 = 1 - 2 + 6 = 5.$$

Logo,

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = [5] = C.$$

Ainda, sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Temos que A é uma matriz de ordem 2×3 e a matriz B tem ordem 3×1. Dessa forma o número de colunas de A é igual a 3 que é exatamente o número de linhas da matriz B. Para multiplicarmos A por B procederemos da seguinte forma. Primeiro, o resultado será uma matriz C de ordem 2×1, isto é

$$A_{2\times 3}B_{3\times 1} = C_{2\times 1}.$$

Segundo, os elemento c_{11} e c_{21} da matriz C são obtidos da seguinte forma

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} = 1\,.\,1 + (-1)\,.\,2 + 2\,.\,3 = 1 - 2 + 6 = 5$$

e

$$c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} = 3\,.\,1 + 1\,.\,2 + 3\,.\,3 = 3 + 2 + 9 = 14$$

Logo,

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 14 \end{bmatrix} = C.$$

Observemos que nos dois exemplos acima, os elementos c_{ij} da matriz produto de A por B possuem os fatores $a_{ik}b_{kj}$ e o k varia de acordo com o número de colunas da primeira matriz (A) que deve ser igual ao número de linhas da segunda matriz (B). Escrevendo de forma resumida temos

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} = \sum_{k=1}^{3} a_{1k}b_{k1}$$

e

$$c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} = \sum_{k=1}^{3} a_{2k}b_{k1}.$$

Definição 1.9. *Sejam $A = [a_{ik}]_{m\times n}$ uma matriz de ordem $m \times n$ e $B = [b_{kj}]_{n\times p}$ uma matriz de ordem $n \times p$. Definimos o produto de A por B como sendo uma matriz $C = [c_{ij}]_{m\times p}$ de ordem $m \times p$, onde cada elemento dessa matriz produto é calculado da seguintes maneira*

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj},$$

para quaisquer $i = 1, 2, \ldots, m$ e $j = 1, 2, \ldots, p$.

Ainda como ilustração, se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

então o produto de A por B é uma matriz de ordem 2×3 dada por

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{bmatrix} = C.$$

Observemos que neste exemplo não podemos, de forma alguma calcular o produto da matriz B pela matriz A, isto é, não existe o produto BA. Agora se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix},$$

então podemos calcular tanto AB, quanto BA. Temos que

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$$

enquanto que

$$BA = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}.$$

Observando os dois produtos acima vemos que mesmo sendo possível calcular tanto AB quanto BA o resultado não é o mesmo, isto é,

$$AB \neq BA.$$

Dessa forma vemos que não é válida a propriedade comutativa para o produto de matrizes. Uma pergunta que podemos fazer nesse ponto é por que definir uma operação que não satisfaz nem a propriedade comutativa, propriedade essa que todas as operações que conhecemos até o momento satisfazem? Veremos que a essa definição de multiplicação será muito útil quanto formos trabalha com sistemas lineares mais adiante.

Ainda a título de exemplo considere

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbb{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Então,

$$A\mathbb{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = A$$

e

$$\mathbb{I}_3 A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = A.$$

Neste exemplo vemos que

$$A\mathbb{I}_3 = \mathbb{I}_3 A = A.$$

Para facilitar o enunciado e para explicitar a ordem das matrizes envolvidas nos produtos, utilizaremos uma notação um pouco diferente da que vínhamos utilizando.

Proposição 1.10. *Com relação ao produto de matrizes valem as seguintes propriedades:*

1. $A_{m\times n}\mathbb{I}_{n\times n} = A_{m\times n}$;

2. $\mathbb{I}_{m\times m}A_{m\times n} = A_{m\times n}$;

3. $A_{n\times n}\mathbb{I}_{n\times n} = \mathbb{I}_{n\times n}A_{n\times n} = A_{n\times n}$;

4. $A_{m\times n}(B_{n\times p} + C_{n\times p}) = A_{m\times n}B_{n\times p} + A_{m\times n}C_{n\times p}$;

5. $(A_{m\times n}+B_{m\times n})C_{n\times p}=A_{m\times n}C_{n\times p}+B_{m\times n}C_{n\times p}$;

6. $(A_{m\times n}B_{n\times p})C_{p\times l}=A_{m\times n}(B_{n\times p}C_{p\times l})$;

Exercício 1.11. *Considere as matrizes*

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix},$$

$$B=\begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \quad e \quad C=\begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

1. *Mostre que* $AB=BA=\mathbb{O}$, $AC=A$ *e* $CA=C$.

2. *Use os resultados do item anterior para mostrar, sem cálculos numéricos, que*

$$ACB=CBA,\ A^2-B^2=(A-B)(A+B) \quad e \quad (A\pm B)^2=A^2+B^2.$$

Exercício 1.12. 1. *Se* A *e* B *são duas matrizes quadradas de ordem* n *tais que* $AB=BA$, *mostre, usando propriedades, que as seguintes afirmações são verdadeiras:*

   (a) $(A-B)^2=A^2-2AB+B^2$;

   (b) $(A-B)(A+B)=A^2-B^2$;

   (c) $(A-B)(A^2+AB+B^2)=A^3-B^3$.

2. *Se* A *e* B *são duas matrizes quadradas de ordem* 2 *tais que* $AB=\mathbb{O}_2$. *Podemos concluir que:*

   (a) $A=\mathbb{O}_2$ *ou* $B=\mathbb{O}_2$?

   (b) $BA=\mathbb{O}_2$?

   Nos dois itens dar exemplos para justificar a sua resposta.

Para finalizar esta parte de operações com matrizes, vamos introduzir o conceito de transposição de uma matriz e apresentar algumas de suas principais propriedades.

Definição 1.13. *Sejam $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ uma matriz de ordem $m \times n$. Definimos a transposta da matriz como sendo uma matriz de ordem $n \times m$, a qual denotaremos por $A^t = [b_{ij}]_{n\times m}$, cujos elementos são dados por*

$$b_{ij} = a_{ji},$$

para quaisquer $i = 1, 2, \ldots, n$ e $j = 1, 2, \ldots, m$.

Analisando a definição acima vemos que transpor uma determinada matriz é tão somente trocar suas linhas por suas colunas. Vejamos alguns exemplos. Se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix},$$

então a matriz transposta de será dada por

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Ainda, como exemplo, se

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix},$$

então

$$B^t = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Observemos que no exemplo acima a diagonal principal da matriz B não se alterou quando calculamos a transposta da matriz B. Listaremos agora algumas propriedades da transposição de matrizes relacionadas com as demais operações de matrizes vistas anteriormente.

Proposição 1.14. *Sejam A e B duas matrizes de mesma ordem $m\times n$ e $k \in \mathbb{R}$ um número real. Então valem as seguintes propriedades:*

1. $(A + B)^t = A^t + B^t$;

2. $(A^t)^t = A$;

3. $(kA)^t = kA^t$;

4. se C *é uma matriz de ordem* $n \times p$*, então* $(AC)^t = C^t A^t$.

Vejamos um agora alguns exemplos para ilustrar as propriedades 2 e 4. Se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

então

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } (A^t)^t = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = A.$$

Ainda, se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

então o produto de A por B é uma matriz de ordem 2×3 dada por

$$AC = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

e

$$(AC)^t = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Por outro lado,

$$C^t = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } A^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$C^t A^t = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

No exemplo anterior vimos que ao calcular a transposta da matriz A o resultado foi exatamente a matriz A. Essa é uma propriedade bastante importante no estudo que faremos neste curso. Na realidade temos a seguinte definição.

Definição 1.15. *Diremos que uma matriz quadrada de ordem n é uma matriz simétrica se, e somente se,*

$$a_{ij} = a_{ji},$$

para quaisquer $i = 1, 2, \ldots, n$ e $j = 1, 2, \ldots, n$.

As matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

são exemplos de matrizes simétricas de ordem 2 e 3 respectivamente,

enquanto que as matrizes

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

não são simétricas, a primeira pois

$$c_{21} = 1 \neq 0 = c_{12}$$

e a segunda por que ela não é uma matriz quadrada.

A relação entre simetria de matrizes e transposição de matrizes é dada no próximo teorema e sua prova pode ser encontrada no item 1 da bibliografia da disciplina.

Teorema 1.16. *Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Então A é simétrica se, e somente se, $A = A^t$.*

Exemplo 1.17. *Vamos mostrar que a soma de matrizes simétricas é uma matriz simétrica.*

De fato: Sejam A e B duas matrizes simétricas. Então o teorema anterior implica que

$$A^t = A \quad \text{e} \quad B^t = B.$$

Para mostrarmos que a soma $A + B$ é uma matriz simétrica temos

$$(A + B)^t = A^t + B^t = A + B$$

e, portanto, usando novamente o teorema anterior, obtemos que $A + B$ é uma matriz simétrica completando o exemplo. $\square$

Exercício 1.18. 1. *É sempre verdade que o produto de duas matrizes simétricas é ainda uma matriz simétrica? Dar exemplos para justificar a sua resposta.*

2. *Dizemos que uma matriz quadrada A de ordem n é uma matriz anti-simétrica se $A^t = -A$. Resolva os seguintes itens:*

   (a) *Dar exemplos de matrizes anti-simétricas*

   (b) *A soma de duas matrizes anti-simétricas é uma matriz anti-simétrica.*

1.2 Escalonamento de Matrizes

Nesta seção vamos introduzir o conceito de equivalência de matrizes e apresentar um técnica que associa a cada matriz uma nova matriz, equivalente à inicial, que possui uma forma um pouco mais simples e muito útil quando formos trabalhar com sistemas lineares e com o problema de encontrar a inversa de matrizes quadradas.

Sejam $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ uma matriz de ordem $m \times n$. Quando escrevemos a matriz na forma completa

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

vemos que a matriz A possui m linhas. Indicaremos cada uma dessas m linhas por L_i, $i = 1, 2, \dots, m$.

Assim,

$$L_1 = a_{11} \;\; a_{12} \;\; a_{13} \;\; \ldots \;\; a_{1n};$$
$$\vdots$$
$$L_i = a_{i1} \;\; a_{i2} \;\; a_{i3} \;\; \ldots \;\; a_{in};$$
$$\vdots$$
$$L_j = a_{j1} \;\; a_{j2} \;\; a_{j3} \;\; \ldots \;\; a_{jn};$$
$$\vdots$$
$$L_m = a_{m1} \;\; a_{m2} \;\; a_{m3} \;\; \ldots \;\; a_{mn}.$$

Por exemplo, se

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

então A possui três linhas:

$$L_1 = -1 \;\; 2 \;\; 1;$$
$$L_2 = 0 \;\; 1 \;\; 1;$$
$$L_3 = 1 \;\; 0 \;\; 1.$$

Vamos agora introduzir algumas operações sobres as linhas de uma matriz A que não alteram boa parte das propriedades e dos conceitos que utilizam matrizes, como por exemplo determinantes, soluções de sistemas lineares, entre outros. Essas operações são chamadas de operações elementares, são elas:

(i) Permutar linhas: trocar a linha L_i com a linha L_j. Por exemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \longleftrightarrow \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

obtemos a segunda matriz da primeira trocando a primeira linha com a terceira linha;

(ii) Multiplicar linhas por números: multiplicar um linha da matriz por um número não nulo. Como exemplo, veja as duas matrizes abaixo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \longleftrightarrow \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Vemos que a segunda matriz foi obtida da primeira substituindo a linha L_1 por $(-2)L_1$, isto é, $L_1 = (-2)L_1$;

(iii) Adicionar a uma linha um múltiplo de outra: substituir uma determinada linha L_i por ela própria adcionada com o produto de um número por outra linha. Veja:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Nesse caso, a segunda matriz foi obtida da primeira substituindo a segunda linha L_2 por ela mesma somada com -4 multiplicado pela primeira linha L_1, isto é, $L_2 = L_2 + (-4)L_1$.

Definição 1.19. *Duas matrizes $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ de mesma ordem $m \times n$ são ditas ser equivalentes (linha equivalentes) se uma puder ser obtida da outra através de um número finito de operações elementares sobre suas linhas. Nesse caso utilizaremos a seguinte notação:*

$$A \longrightarrow B \quad ou \quad A \sim B.$$

Como exemplo para essa definição, vamos verificar se as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

são matrizes equivalentes. Para isso primeiro vamos fazer as seguintes operações elementares $L_2 = L_2 + L_1(-4)$ e $L_3 = L_3 + L_1(3)$. Assim,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Agora vamos fazer as operações $L_2 = L_2(-1)$ e $L_3 = L_3 + L_2(4)$. Logo,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = B.$$

Dessa forma concluímos que A e B são semelhantes.

Vamos fazer o mesmo para as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Temos

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\;]{\substack{L_2 = L_2 + L_1(1) \\ L_3 = L_3 + L_1(-1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\;]{\substack{L_2 = L_2(1/2) \\ L_3 = L_3 + L_2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 = L_3(1/8)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\;]{\substack{L_2 = L_2 + L_3(-2)) \\ L_1 = L_1 + L_3(-1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 = L_1 + L_2(-2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = B.$$

Dessa forma concluímos que A e B são semelhantes.

Tentemos agora, verficar se as seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & -5 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

são equivalentes.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & -5 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{permutar\ L_1\ por\ L_2} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -5 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[]{\substack{L_2 = L_2 + L_1(-2) \\ L_3 = L_3 + L_1(-1)}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -9 & -1 \\ 0 & -9 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -9 & -1 \\ 0 & -9 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[]{\substack{L_2 = L_2(-1/9) \\ L_3 = L_3 + L_2(-1)}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 = L_1 + L_2(-4)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{14}{9} \\ 0 & 1 & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ao observarmos a matriz

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{14}{9} \\ 0 & 1 & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

vemos que qualquer outra operação que façamos para tornar zero o elemento c_{13} ou o elemento c_{23} fará com que posições já "transformadas"em zero voltem a ser números não nulos. Também ,notamos que esse mesmo fato vai ocorrer se tentarmos tornar 1 (um) o elemento c_{33}. Dessa forma, em princípio, nos parece que as matrizes A e B não são equivalentes, pois não conseguimos transformar a matriz C na matriz B. Apesar disso, a matriz C é uma matriz "boa", pois ela possui várias posições com zeros. Matrizes como a matriz B e a matriz C fazem parte de um grupo de matrizes que passamos a estudar agora.

Definição 1.20. *Diremos que uma matriz $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ de ordem $m \times n$ é uma matriz escalonada (na forma escada) se, e somente se, as quatro condições abaixo estão satisfeitas ao mesmo tempo:*

1. *o primeiro elemento não nulo de cada linha L_i da matriz é igual a 1 (um);*
2. *cada coluna da matriz que contém o primeiro elemento não nulo, 1 (um), de uma linha possui todos os demais elementos iguais a 0 (zero);*
3. *toda linha nula ocorre abaixo das linhas não nulas;*
4. *se k_i é a coluna do primeiro elemento não nulo, 1 (um), da linha L_i da matriz, então devemos ter*

$$k_1 < k_2 < k_3 < \ldots < k_r,$$

onde r é o número de linhas não nulas da matriz.

As três primeiras condições são fáceis de serem entendidas. A quarta condição, na prática ela quer dizer que o números de zeros nas linhas antes do primeiro elemento não nulo, que deve ser 1 (um), deve sempre aumentar. Como exemplo dessa quarta condição, para a matriz

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

temos que $k_1 = 1$, $k_2 = 3$ e $k_3 = 2$. Como $k_2 > k_3$, ou seja, o número de zeros antes do 1 (um) da segunda linha é maior que número de zeros antes do 1 (uma) da terceira linha, a matriz não satisfaz a quarta condição. Note que essa matriz B satisfaz as três primeiras condições.

Já para a matriz

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

temos que $k_1 = 1$ e $k_2 = 2$. Como $k_1 < k_2$, ou seja o número de zeros antes do 1 (um) sempre aumenta, a matriz satisfaz a condição 4. Note que essa matriz B_1 também satisfaz as três primeiras condições e, portanto, ela é uma matriz escalonada, ou na forma escada.

Vejamos mais alguns exemplos. Consideremos as seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Temos que

- A não é escalonada, pois falha 3;
- B não é escalonada, pois falham 1 e 4;
- C não é escalonada, pois falha 2;
- D é escalonada.

Teorema 1.21. *Toda matriz $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ de ordem $m \times n$ é equivalente a uma única matriz escalonada (na forma escada).*

Voltemos agora para a tentativa de verificar se as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & -5 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

são equivalentes. Vimos que

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & -5 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{14}{9} \\ 0 & 1 & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = C,$$

isto é, A é equivalente a matriz C. Observemos que tanto a matriz B quanto a matriz C são matrizes escalonadas (estão na forma escada). Logo A não pode ser equivalente à matriz B.

Exemplo 1.22. *Verifique, usando o escalonamento de matrizes, se as matrizes abaixo são equivalentes à matriz indentidade da respectiva ordem.*

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -2 & -5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1.3 Determinantes

Nesta seção vamos apresentar uma técnica, desenvolvida por Laplace, para o cálculo do determinante de uma matriz quadrada de qualquer ordem $n \times n$. Não faremos aqui a definição formal do determinante de uma matriz quadrada com ordem $n \times n$ usando o conceito de classes de permutações, pois estamos interessados apenas no cálculo do determinante de uma determinada matriz para depois, com esse determinante em mãos, obtermos na próxima seção, propriedades sobre matrizes inversas e sistemas de Cramer.

A idéia é apresentar uma técnica para o cálculo do determinante de uma matriz quadrada de ordem $n \times n$ usando recorrência sobre a ordem n da matriz, isto é, vamos definir o valor do determinante para matrizes de ordem 1, e ao definir o valor do determinante para matrizes de ordem 2 vamos relacionar essa definição com a definição de determinantes de ordem 1 e assim sucessivamente.

n=1: seja $A = [a_{11}]$ uma matriz de ordem 1×1. Definimos o determinante da matriz A como sendo o número real dado por

$$\det(A) = \det[a_{11}] = |a_{11}| = a_{11},$$

ou seja, quando temos uma matriz de ordem 1×1 seu determinate é exatamente igual ao seu único elemento;

n=2: seja $A = [a_{ij}]_{2\times 2}$, ou de forma completa

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

uma matriz de ordem 2×2.

Definimos o determinante da matriz A como sendo o número real dado por

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Por exemplo, se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix},$$

então

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (1)\,(4) - (2)\,(3) = 4 - 6 = -2.$$

Para relacionar a definição de determinante para matrizes quadradas de ordem 2×2 com matrizes quadradas de ordem 1×1, vamos, para simplificar a notação, adotar a primeira linha da matriz quadrada de ordem 2×2 como base. Temos

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}(a_{22}) - a_{12}(a_{21}) \\ &= a_{11}(\det[a_{22}]) - a_{12}(\det[a_{21}]). \end{aligned}$$

Observemos que conseguimos relacionar o cálculo do determinante de uma matriz quadrada de ordem 2×2 com o cálculo do determinante de matrizes quadradas de ordem 1×1 e, lembrando que tomamos por base a primeira linha da matriz de ordem 2×2.

Porém, ao olhar apenas a expressão

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}(\det[a_{22}]) - a_{12}(\det[a_{21}]),$$

para não fazermos uso da definição para calcular o determinante precisamos entender como aparecerem os sinais na fórmula do lado direito.

Notemos que na fórmula do lado direito, se olharmos para o índice do elemento que aparece no produto

$$a_{11}(\det[a_{22}])$$

a soma de seus índices é par e $(-1)^{\text{número par}}$ é positivo, enquanto que no produto

$$a_{12}(\det[a_{21}])$$

a soma de seus índices é ímpar e $(-1)^{\text{número ímpar}}$ é negativo. Assim,

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = (-1)^{1+1}a_{11}(\det[a_{22}]) + (-1)^{1+2}a_{12}(\det[a_{21}]).$$

Ainda, se olharmos para a matriz que aparece no produto

$$a_{11}(\det[a_{22}])$$

vemos que ela foi obtida da matriz A inical excluíndo-se a linha 1 e a coluna 1, que é exatamente a linha e a coluna do elemento a_{11}, enquanto que se olharmos para a matriz que aparece no produto

$$a_{12}(\det[a_{21}])$$

vemos que ela foi obtida da matriz A inical excluíndo-se a linha 1 e a coluna 2, que é exatamente a linha e a coluna do elemento a_{12}. Assim,

$$\begin{aligned}\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} &= (-1)^{1+1}a_{11}(\det[a_{22}]) + (-1)^{1+2}a_{12}(\det[a_{21}]) \\ &= (-1)^{1+1}a_{11}\det(A_{11}) + (-1)^{1+2}a_{12}\det(A_{12}),\end{aligned}$$

onde as matrizes A_{1j} que aparecem na fórmula acima são matrizes de ordem 1×1 e são obtidas da matriz inicial excluíndo-se a linha 1 e a coluna j, $j = 1, 2$.

Por exemplo, vamos calcular, usando a fórmula acima, o determinante da matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Temos

$$\begin{aligned}\det\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} &= (-1)^{1+1}(-1)\det([4]) + (-1)^{1+2}(2)\det([-3]) \\ &= (-1)4 + (-1)2(-3) \\ &= -4+6 \\ &= 2.\end{aligned}$$

Observemos que se tivéssemos cálculo usando direto a definição teríamos

$$\det\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = (-1)(4) - (2)(-3) = -4+6 = 2.$$

Aparentemente o segundo modo (usando a definição) é mais rápido, porém o primeiro modo (por recorrencia ou por Laplace) será útil pois poderemos calcular o determinante de matrizes de qualquer ordem.

Notemos ainda que poderíamos ter escolhido como base a segunda linha e, nesse caso, a fórmula fica

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = (-1)^{2+1}a_{21}(\det(A_{21}) + (-1)^{2+2}a_{22}\det(A_{22}),$$

onde as matrizes A_{2j} que aparecem na fórmula acima são matrizes de ordem 1×1 e são obtidas da matriz inicial excluíndo-se a linha 2 e a coluna j, $j = 1, 2$. O resultado final é o mesmo (Verifique isso!).

De forma geral para matrizes de ordem 2×2, tomando por base uma linha i para $i = 1$ ou $i = 2$, temos que

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = (-1)^{i+1}a_{i1}(\det(A_{i1}) + (-1)^{i+2}a_{i2}\det(A_{i2}),$$

onde as matrizes A_{ij} que aparecem na fórmula acima são matrizes de ordem 1×1 e são obtidas da matriz inicial excluíndo-se a linha i,$i = 1$ ou $i = 2$, e a coluna j, $j = 1, 2$;

n=3: seja $A = [a_{ij}]_{3\times 3}$, ou na forma completa

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

uma matriz de ordem 3×3.

Definimos o determinante da matriz A como sendo o número real dado por

$$\begin{aligned}
\det(A) = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}
&= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
&= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\
&\quad - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.
\end{aligned}$$

A fórmula acima, em princípio, parece não ser muito fácil de entender. Essa definição decorre das classes de permutação e, para o caso de matrizes quadradas de ordem 3×3, temos uma regra para calcular o determinante de matrizes quadradas de ordem 3×3 chamada de **Regra de Sarrus** que funciona da seguinte forma:

> *Para calcularmos o determinante de uma matriz quadrada de* **ordem 3 × 3** *construímos um matriz auxiliar de ordem* 3×5 *formada pelas três colunas da matriz* A *e pelas duas primeiras colunas da matriz* A*. Após isso calculamos a soma de produtos dos elementos que estão em uma diagonal contendo exatamente três elementos, sendo positivo os que aparecem no sentido da diagonal principal e negativo os que aparecem no sentido oposto ao da diagonal principal.*

$$\begin{aligned}
\det(A) = \det \left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right| \\
= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\
- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.
\end{aligned}$$

Por exemplo, se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

então

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \left| \begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{matrix} \right| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{matrix} \right| \\
&= (1)\,(0)\,(1) + (0)\,(3)\,(2) + (1)\,(2)\,(2) \\
&\quad - (1)\,(0)\,(2) - (1)\,(3)\,(2) - (0)\,(2)\,(1) \\
&= 0 + 0 + 4 - 0 - 6 - 0 \\
&= -2.
\end{aligned}$$

Vamos agora tentar relacionar a definição de determinante para matrizes quadradas de ordem 3×3 com matrizes quadradas de ordem 2×2. Para simplificar nossos cálculos, vamos adotar a primeira linha da matriz quadrada de ordem 3×3 como base.

$$\begin{aligned}
\det(A) = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}
&= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
&= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\
&\quad - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \\
&= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} \\
&\quad - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}).
\end{aligned}$$

A idéia agora é fazermos aparecer a soma de três fatores onde aparecem os termos $(-1)^{\text{soma do índices}}$ multiplicados pelos determinantes de matrizes de ordem 2×2 obtidas da matriz A suprimindo-se a linha e a colunas dos índices dos elementos a_{11}, a_{12} e a_{13}. Assim,

$$\begin{aligned}
\det(A) = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}
&= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) \\
&\quad + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\
&= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(-a_{23}a_{31} + a_{21}a_{33}) \\
&\quad + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\
&= (-1)^{1+1}a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + (-1)^{1+2}a_{12}(-a_{23}a_{31} + a_{21}a_{33}) \\
&\quad + (-1)^{1+3}a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}).
\end{aligned}$$

Agora, observemos que

$$\det \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32},$$

$$\det\begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}$$

e

$$\det\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\det(A) = \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}
&= (-1)^{1+1}a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + (-1)^{1+2}a_{12}(-a_{23}a_{31} + a_{21}a_{33}) \\
&\quad + (-1)^{1+3}a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\
&= (-1)^{1+1}a_{11}\det\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + (-1)^{1+2}a_{12}\det\begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} \\
&\quad + (-1)^{1+3}a_{13}\det\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

ou de forma resumida

$$\begin{aligned}
\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} &= (-1)^{1+1}a_{11}\det(A_{11}) \\
&\quad + (-1)^{1+2}a_{12}\det(A_{12}) + (-1)^{1+3}a_{13}\det(A_{13}),
\end{aligned}$$

onde as matrizes A_{1j}, $j = 1, 2, 3$ são matrizes quadradas de ordem 2×2 obtidas da matriz inicial A suprimindo-se a linha 1 e a coluna j, $j = 1, 2, 3$.

Poderíamos, para fazermos essa relação, ter escolhido como base a segunda ou a terceira linha da matriz A que o resultado final do determinante não se alteraria (verifique isso!).

Nesse caso, de forma geral teríamos

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = (-1)^{i+1}a_{i1}\det(A_{i1})$$
$$+ (-1)^{i+2}a_{i2}\det(A_{i2}) + (-1)^{i+3}a_{i3}\det(A_{i3}),$$

onde, para $i = 1$ ou $i = 2$ ou $i = 3$, as matrizes A_{ij}, $j = 1, 2, 3$ são matrizes quadradas de ordem 2×2 obtidas da matriz inicial A suprimindo-se a linha i e a coluna j, para$j = 1, 2, 3$.

Por exemplo, se A é a sguinte matriz quadrada de ordem 3×3

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

vamos calcular o seu determinante.

Temos que

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \det\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \\
&= (-1)^{1+1}a_{11}\det(A_{11}) + (-1)^{1+2}a_{12}\det(A_{12}) \\
&\quad + (-1)^{1+3}a_{13}\det(A_{13}) \\
&= 1 + \det\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - 0\det\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + 1\det\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \\
&= 1(0-6) - 0(2-6) + 1(4-0) \\
&= -6 + 4 \\
&= -2.
\end{aligned}$$

Fica como exercício calcular o determinante da matriz acima usando a segunda linha e depois a terceira linha.

Com o raciocínio acima, transformamos o cálculo do do determinante de uma matriz quadrada de ordem $n \times n$ no cálculo de vário determinates de matriz de ordem $(n-1) \times (n-1)$ e temos então a seguinte definição:

Definição 1.23. *Seja $A = [(a_{ij}]_{n \times n}$ uma matriz quadrada de ordem $n \times n$. Definimos, por recorrência, o determinante da matriz A como sendo o número real dado por*

$$\begin{aligned}\det A = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \\ = (-1)^{i+1} a_{i1} \det(A_{i1}) + (-1)^{i+2} a_{i2} \det(A_{i2}) \\ + \dots + (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}) + \dots + (-1)^{i+n} a_{in} \det(A_{in}),\end{aligned}$$

onde, para algum i fixado entre $1, 2, 3, \dots, n$, as matrizes A_{ij}, $j = 1, 2, 3, \dots, n$ são matrizes quadradas de ordem $(n-1) \times (n-1)$ obtidas da matriz inicial A suprimindo-se a linha i e a coluna j, para $j = 1, 2, 3, \dots, n$.

Algumas observações importantes:

(1) o cálculo do determinante independe da linha escolhida, isto é, na prática podemos escolher a linha mais conveniente para calcular o determinante de uma determinada matriz;

(2) podemos tomar como base uma coluna qualquer para o cálculo do determinate de uma matriz A. Nesse caso temos

$$\begin{aligned}\det A = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \\ = (-1)^{1+j} a_{1j} \det(A_{1j}) + (-1)^{2+j} a_{2j} \det(A_{2j}) \\ + \dots + (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}) + \dots + (-1)^{n+j} a_{nj} \det(A_{nj}),\end{aligned}$$

onde, para algum j fixado entre $1, 2, 3, \ldots, n$, as matrizes A_{ij}, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ são matrizes quadradas de ordem $(n-1) \times (n-1)$ obtidas da matriz inicial A suprimindo-se a coluna j e a linha i $i = 1, 2, 3, \ldots, n$;

(3) o cálculo do determinante também independe da coluna escolhida, isto é, na prática podemos escolher a coluna mais conveniente para calcular o determinante de uma determinada matriz.

Como exemplo, vamos calcular o determinante da seguinte matriz quadrada

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

de ordem 4×4.

Para calcular o determinante dessa matriz vamos usar o método acima e transformar o cálculo do determinante de uma matriz de ordem 4×4 no cálculo de determinantes de matrizes 3×3. Ainda, como podemos escolher a linha para tomarmos como base, vamos escolher a primeira linha da matriz, pois essa linha contém vários zeros e isso facilitará as nossas contas.

$$\begin{aligned}
\det \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 6 \end{bmatrix} &= (-1)^{1+1} 3 \begin{vmatrix} 1 & 9 & 8 \\ 6 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 6 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}(0)\det(A_{12}) \\
&+ (-1)^{1+3}(0)\det(A_{13}) + (-1)^{1+4}(0)\det(A_{14}) \\
&= 3 \left| \begin{array}{ccc|cc} 1 & 9 & 8 & 1 & 9 \\ 6 & 7 & 2 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 6 & 1 & 4 \end{array} \right| \\
&= 3(42 + 18 + 192 - 324 - 8 - 42) \\
&= 3(-122) \\
&= -366.
\end{aligned}$$

Observemos que nem calculamos os determinantes das matrizes A_{12}, A_{13} e A_{14}, pois esses estavam multiplicados por zero.

Usando a "definição"de determinante dada acima podemos, por indução sobre a ordem da matriz, mostrar as seguintes propriedades sobre determinantes. Não faremos as demonstrações, pois estamos interessados apenas na técnica e nas propriedades em si.

Seja $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ uma matriz quadrada de ordem $n \times n$. Então valem as seguintes propriedades sobre determinantes:

(1) se todo os elementos de uma linha (ou coluna) da matriz são nulos, então $\det(A) = 0$;

(2) se A possui duas linhas (ou colunas) iguais, então $\det(A) = 0$;

(3) se B é uma matriz obtida da matriz A pela multiplicação de uma linha (ou coluna) da matriz A por um número real (nulo ou não), então $\det(B) = c\det(A)$;

(4) se B é uma matriz obtida da matriz A pela troca de duas linhas (ou colunas), então $\det(B) = -\det(A)$;

(5) se B é uma matriz obtida da matriz A pela troca de uma linha por essa mesma linha adicionada com outra ($L_i = L_i + L_j$), então $\det(B) = \det(A)$;

(6) $\det(A) = \det(A^t)$;

(7) se A é uma matriz triangular superior, isto é, $a_{ij} = 0$ sempre que $i > j$, ou na forma completa

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

então $\det(A) = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$;

(8) se B é uma matriz quadrada de ordem $n \times n$, então $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Algumas observações importantes que decorrem das propriedades acima:

- Se B é uma matriz equivalente à matriz A, então a propriedades 3 4 e 5 implicam que

$$\det(A) = 0 \iff \det(B) = 0.$$

Essa informação nos diz em princípio quando uma matriz poder ser equivalente a outra.

Como exemplo vamos verificar se as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & -5 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

podem ser equivalentes, essa matrizes já foram estudadas no final da seção sobre matrizes escalonadas.

Temos

$$\det B = 1 \quad \text{e} \quad \det A = 8 - 2 - 15 - 12 + 1 + 20 = 0.$$

Logo A e B não podem ser equivalentes. Vimos no final da seção sobre matrizes escalonadas que na verdade A é equivalente à matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{14}{9} \\ 0 & 1 & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Não é verdade que $\det(A+B) = \det(A)+\det(B)$. Para vermos esse fato consideremos as seguintes matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 8 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Temos rapidamente que

$$\det(B) = 8(-5) = -40$$

e

$$\det(A) = -30 + 8 - 10 - 8 = -40.$$

Logo,

$$\det(A) + \det(B) = -40 + (-40) = -80.$$

Por outro lado,

$$A + B = \begin{bmatrix} 6 & -4 & 2 \\ 4 & 10 & 0 \\ 10 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

e

$$\det(A + B) = -120 + 32 - 200 - 32 = -320.$$

Portanto, neste caso

$$\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B).$$

1.4 Inversão de Matrizes

O principal objetivo desta seção é encontrar condições para que uma determinada matriz quadrada de ordem $n \times n$ seja inversível e nesse caso usar a técnica de escalonamento de matrizes para encontrar a inversa dessa matriz.

Quando um número real $a \in \mathbb{R}$ é não nulo podemos dividir por esse número e dessa forma produzimos um outro número real $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$, chamado inverso de a, tal que

$$a\ a^{-1} = a^{-1}\ a = a\,\frac{1}{a} = \frac{1}{a}\,a = 1.$$

Lembrando que a matriz identidade $\mathbb{I}_n$ é uma matriz quadrada de ordem $n \times n$ tal que

$$A_{n\times n}\mathbb{I}_n = \mathbb{I}_n A_{n\times n} = A_{n\times n}$$

para todo matriz quadrada $A_{n\times n}$, ou seja, a matriz identidade está fazendo o papel que o número 1 (um) faz no conjunto dos números reais. A idéia agora é dada uma matriz A, quadrada de ordem $n \times n$, encontrar uma matriz B, também quadrada de ordem $n \times n$, tal que

$$B\ A = A\ B = \mathbb{I}_n.$$

Neste caso temos a

Definição 1.24. *Uma matriz quadrada de ordem $n \times n$ é inversível se existir uma matriz quadrada B, também de ordem $n \times n$, tal que*

$$B\ A = A\ B = \mathbb{I}_n.$$

A matriz B será chamada de matriz inversa de A e será denotada por

$$B = A^{-1}.$$

Observemos que para A ser inversível devemos ter necessariamente que A seja uma matriz quadrada e sua inversa deve ser uma matriz quadrada de mesma ordem para que estejam definidos os produtos

$$AA^{-1} = A^{-1}A = \mathbb{I},$$

onde $\mathbb{I}$ denota a matriz identidade. Por exemplo se A é a matriz quadrada de ordem 2 dada por

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Vamos verficar se a matriz

$$\begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

é uma matriz inversa de A. De fato, calculando o produto de matrizes, temos

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(\frac{4}{5}) + 3(-\frac{1}{5}) & 2(-\frac{3}{5}) + 3(\frac{2}{5}) \\ 1(\frac{4}{5}) + 4(-\frac{1}{5}) & 1(-\frac{3}{5}) + 4(\frac{2}{5}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8}{5} - \frac{3}{5} & -\frac{6}{5} + \frac{6}{5} \\ \frac{4}{5} - \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} + \frac{8}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Da mesma forma temos

$$\begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Logo A é inversível e

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}.$$

Os problemas que aparecem aqui e que queremos resolver nessa seção são os seguintes:

1. quando uma matriz é inversível, sua inversa é única?

2. como encontrar a inversa de uma matriz?

3. existe uma jeito rápido de descobrir quando uma matriz será inversível?

A resposta da primeira pergunta é fácil de ser dada, bastando para isso usarmos algumas propriedade das matrizes:

Proposição 1.25. *A inversa de uma matriz quadrada A de ordem $n \times n$, quando existe, é única.*

Demonstração: Sejam B e C duas matrizes quadradas de ordem $n \times n$ que são inversas da matriz A, isto é,

$$AB = BA = \mathbb{I}_n \quad \text{e} \quad AC = CA = \mathbb{I}_n.$$

Vamos mostrar que $B = C$. De fato, usando propriedades do produto de matrizes, temos que

$$B = B\mathbb{I}_n = B(AC) = (BA)C = \mathbb{I}_n C = C,$$

provando o desejado. ■

O resultado acima nos diz que a inversa quando existir é única, porém veremos mais adiante que existem vária matrizes que não são inversíveis. Já sabemos então que quando uma matriz é inversível, sua inversa é única. Vamos agora tentar encontrar um método rápido para encontrar a inversa de uma matriz inversível A. Comecemos tentanto calcular a inversa da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 11 & 4 \end{bmatrix}.$$

Devemos encontrar uma matriz quadrada B de ordem 2×2 tal que $AB = BA = \mathbb{I}_2$. Seja

$$B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$$

e tentemos descobir os valores x, y, z e w para que B seja a inversa de A. Temos

$$AB = \mathbb{I}_2 \iff \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 11 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} 6x + 2z = 1 \\ 6y + 2w = 0 \\ 11x + 4z = 0 \\ 11y + 4w = 1. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema obtemos que

$$x = 2, \quad y = -1, \quad z = -\frac{11}{2} \ \text{ e } \ w = 3.$$

Logo, uma candidata a inversa da matriz A é a matriz

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{11}{2} & 3 \end{bmatrix}.$$

Para verificar se de fato B é a inversa da matriz A observemos que calculando o produto das matrizes

$$AB = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 11 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{11}{2} & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$BA = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{11}{2} & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 11 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ou seja, B de fato é a inversa de A e, portanto, A é inversível e

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{11}{2} & 3 \end{bmatrix}.$$

Infelizmente, nem toda matriz é inversível. Por exemplo, se

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Para A ser inversível deveria existir uma matriz

$$B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$$

de tal forma que

$$AB = \mathbb{I}_2 \implies \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e isso seria possível se, e somente se,

$$\begin{cases} 3x + 6z = 1 \\ 3y + 6w = 0 \\ x + 2z = 0 \\ y + 2w = 1. \end{cases}$$

Vemos facilmente que o sistema acima é incompatível, pois se esse sistema tivesse uma solução, ao utilizarmos a primeira e a terceira equações desse sistema obteríamos que $0 = 1$, o que é impossível. Isso mostra que existem matrizes que não são inversíveis.

No "método" usado acima para o cálculo de uma candidata a inversa de matrizes quadradas de ordem 2×2 precisamos resolver sistemas com 4 equações e 4 variáveis. Se fossemos usar esse método para calcular a candidata a inversa de uma matriz quadrada de ordem 3×3 teríamos que resolver um sistema com 9 equações e 9 variáveis. Como vimos na seção sobre sitemas lineares resolver sistemas lineares com muitas equaçõs e muitas variávies é bastante trabalhoso e também podemos no final descobrir que o sistema é incompatível e, dessa forma, fizemos um grande esforço para nada. Assim vamos agora tentar descobrir uma maneira rápida de determinar quando uma matriz quadrada de ordem $n \times n$ possui inversa. Depois vamos apresentar dois métodos, usando o escalonamento de matriz e usando matrizes adjuntas, para o cálculo da matriz inversa, quando soubermos que esta existe.

Primeiramente observemos que se uma matriz quadrada A de ordem $n \times n$ for inversível, então existiria uma matriz quadrada A^{-1}, também de ordem $n \times n$, tal que

$$A\ A^{-1} = A^{-1}\ A = \mathbb{I}_n,$$

onde $\mathbb{I}_n$ denota a identidade de ordem $n \times n$. Ainda, sabemos, das propriedades de deteminantes, que

- $\det(\mathbb{I}_n) = 1$
- $\det(A\ A^{-1}) = \det(A)\ \det(A^{-1})$.

Juntando esses três fatos obtemos que se A for inversível, então

$$1 = \det(\mathbb{I}_n) = \det(A\ A^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1}),$$

ou seja, se A for inversível, então

$$\det(A) \neq 0, \quad \det(A^{-1}) \neq 0 \quad \text{e} \quad \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

Mostramos então o seguinte resultado

Proposição 1.26. *Seja A uma matriz quadrada de ordem $n \times n$. Se A for inversível, então*

$$\det(A) \neq 0 \quad e \quad \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

Observemos que a proposição anterior nos diz que se o determinante de uma matriz é nulo, então ela não será inversível. Porém, se o determinante de uma matriz for não nulo, não podemos afirmar se ela será ou não inversível. Como aplicação desse resultado, considere as seguintes matrizes quadradas:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Temos que

$$det(A) = 0, \quad \det(B) = 45 + 96 + 84 - 105 - 72 - 48 = 0 \quad \text{e} \quad \det(C) = 3 - 2 = 1 \neq 0.$$

Logo concluímos que as matrizes A e B não são inversíveis, ou seja, não precisamos procurar candidatos a inversa de A e de B. Com relação à matriz C nada podemos afirmar, uma vez que o seu determinante é não nulo. Para resolver esse problema, isto é, se o determinante de uma matriz for não nulo, o que dizer sobre a inversa dessa matriz (existe ou não existe), vamos introduzir um tipo especial de matriz, a matriz adjunta de uma determinada matriz quadrada.

Para definirmos a matriz adjunta de uma matriz quadrada de ordem $n \times n$ considere inicialmente a seguinte matriz quadrada

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -5 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & 7 \end{bmatrix}.$$

Como vimos na seção anterior, podemos calcular o determinante da matriz A tomando por base qualquer linha da matriz A que o resultado não se altera. Temos

$$\begin{aligned} det(A) &= a_{11}(-1)^{1+1}\det(A_{11}) + a_{12}(-1)^{1+2}\det(A_{12}) + a_{13}(-1)^{1+3}\det(A_{13}) \\ &= a_{21}(-1)^{2+1}\det(A_{21}) + a_{22}(-1)^{2+2}\det(A_{22}) + a_{23}(-1)^{2+3}\det(A_{23}) \\ &= a_{31}(-1)^{3+1}\det(A_{31}) + a_{32}(-1)^{3+2}\det(A_{32}) + a_{33}(-1)^{3+3}\det(A_{33}), \end{aligned}$$

onde, as matrizes A_{ij}, $i, j = 1, 2, 3$, são matrizes quadradas de ordem 2×2 obtidas da matriz inicial A suprimindo-se a linha i e a coluna j, $i, j = 1, 2, 3$. Se definirmos

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j}\det(A_{ij}),$$

para todo $i, j = 1, 2, 3$, produzimos uma nova matriz, também quadrada de ordem 3×3, dada por

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{13} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \Delta_{23} \\ \Delta_{31} & \Delta_{32} & \Delta_{33} \end{bmatrix},$$

onde, para todo $i, j = 1, 2, 3$,

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij}),$$

com A_{ij}, $i, j = 1, 2, 3$ sendo matrizes quadradas de ordem 2×2 obtidas da matriz inicial A suprimindo-se a linha i e a coluna j para $i, j = 1, 2, 3$. Para produzirmos os produtos que nos dão, usando como base cada uma das linhas da matriz, o valor do determinante devemos considerar a transposta da matriz $\overline{A}$,

$$\overline{A}^t = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \Delta_{31} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \Delta_{32} \\ \Delta_{13} & \Delta_{23} & \Delta_{33} \end{bmatrix}.$$

Denominamos

- $\overline{A}$ de **matriz dos cofatores** da matriz A;
- $\overline{A}^t$ de **matriz adjunta** da matriz A.

Vale a pena observarmos aqui que da maneira como foi construída a matriz adjunta, quando multiplicamos a linha i da matriz A com a coluna i da matriz adjunta $\overline{A}^t$ obtemos o valor do determinante da matriz A, para quaisquer $i = 1, 2, 3$. Vamos, então, calcular a matriz dos cofatores e a matriz adjunta de A. Temos que

$$\Delta_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 40 \quad \Delta_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -5 & -6 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = 35 \quad \Delta_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -5 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -10,$$

$$\Delta_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = -11 \quad \Delta_{11} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = 21 \quad \Delta_{13} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -6,$$

$$\Delta_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = 2 \quad \Delta_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -5 & -6 \end{vmatrix} = 28 \quad \Delta_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} = 17.$$

Logo,

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 40 & 35 & -10 \\ -11 & 21 & -6 \\ 2 & 28 & 17 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \overline{A}^t = \begin{bmatrix} 40 & -11 & 2 \\ 35 & 21 & 28 \\ -10 & -6 & 17 \end{bmatrix}$$

são, respectivamente, as matrizes dos cofatores e adjunta da matriz A. Observemos que

$$A\overline{A}^t = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -5 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 40 & -11 & 2 \\ 35 & 21 & 28 \\ -10 & -6 & 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 175 & 0 & 0 \\ 0 & 175 & 0 \\ 0 & 0 & 175 \end{bmatrix} = 175 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e, portanto, $\det(A) = 175$, ou ainda,

$$A\overline{A}^t = \det(A)\mathbb{I}_3.$$

Da mesma forma,

$$\overline{A}^t A = \begin{bmatrix} 40 & -11 & 2 \\ 35 & 21 & 28 \\ -10 & -6 & 17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -5 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 175 & 0 & 0 \\ 0 & 175 & 0 \\ 0 & 0 & 175 \end{bmatrix} = 175 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$\overline{A}^t A = \det(A)\mathbb{I}_3.$$

Para matrizes quadradas de ordem $n \times n$ temos então a seguinte definição:

Definição 1.27. *Dada uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ de ordem $n \times n$. Definimos a matriz dos cofatores de A como sendo a matriz quadrada de ordem $n \times n$ dada por*

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \dots & \Delta_{1n} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \dots & \Delta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{n1} & \Delta_{n2} & \dots & \Delta_{nn} \end{bmatrix},$$

onde, para todo $i, j = 1, 2, 3, \dots, n$

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij}),$$

com A_{ij}, $i, j = 1, 2, 3, \ldots, n$ sendo matrizes quadradas de ordem $(n-1) \times (n-1)$ obtidas da matriz inicial A suprimindo-se a linha i e a coluna j para $i, j = 1, 2, 3, \ldots, n$. Definimos também a matriz adjunta de A como sendo a transposta da matriz $\overline{A}$,

$$\overline{A}^t = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \ldots & \Delta_{n1} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \ldots & \Delta_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{1n} & \Delta_{2n} & \ldots & \Delta_{nn} \end{bmatrix}.$$

E, como antes, temos o seguinte resultado:

Teorema 1.28. *Se $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ é uma matriz quadradade ordem $n \times n$. Então*

$$A\overline{A}^t = \overline{A}^t A = \det(A)\mathbb{I}_n.$$

Demonstração: Fica como exercício fazer a demonstração deste teorema quando $n = 3$. ■

Vamos calcular a adjunta da seguinte matriz quadrada de ordem 3×3 :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 5 \end{bmatrix}.$$

Temos que

$$\Delta_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = -19 \quad \Delta_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 19 \quad \Delta_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = -19,$$

$$\Delta_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = -5 \quad \Delta_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 10 \quad \Delta_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = -11,$$

$$\Delta_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 4 \quad \Delta_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = -8 \quad \Delta_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 5.$$

Logo,

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} -19 & 19 & -19 \\ -5 & 10 & -11 \\ 4 & -8 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \overline{A}^t = \begin{bmatrix} -19 & -5 & 4 \\ 19 & 10 & -8 \\ -19 & -11 & 5 \end{bmatrix}$$

são, respectivamente, as matrizes dos cofatores e adjunta da matriz A. Observemos que

$$A\overline{A}^t = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -19 & -5 & 4 \\ 19 & 10 & -8 \\ -19 & -11 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -19 & 0 & 0 \\ 0 & -19 & 0 \\ 0 & 0 & -19 \end{bmatrix} = -19 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e, portanto, $\det(A) = -19$, ou ainda,

$$A\overline{A}^t = \det(A)\mathbb{I}_3.$$

Da mesma forma,

$$A\overline{A}^t = \begin{bmatrix} -19 & -5 & 4 \\ 19 & 10 & -8 \\ -19 & -11 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -19 & 0 & 0 \\ 0 & -19 & 0 \\ 0 & 0 & -19 \end{bmatrix} = -19 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ou seja,

$$\overline{A}^t A = \det(A)\mathbb{I}_3.$$

Seja agora A uma matriz quadrada de ordem $n \times n$ tal que

$$\det(A) \neq 0.$$

Pela construção da matriz adjunta (Teorema 1.28) temos que

$$A\ \overline{A}^t = \overline{A}^t\ A = \det(A)\mathbb{I}_n.$$

Usando propriedades do produto de matrizes (por matrizes e por números reais) e lembrando que $\det(A) \neq 0$, temos que

$$A\ (\frac{1}{\det(A)}\overline{A}^t) = (\frac{1}{\det(A)}\overline{A}^t)\ A = \mathbb{I}_n.$$

Chamando

$$B = \frac{1}{\det(A)}\overline{A}^t,$$

temos então que

$$A\ B = B\ A = \mathbb{I}_n,$$

ou seja, A é inversível e

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\overline{A}^t.$$

Dessa forma provamos o seguinte resultado:

Proposição 1.29. *Se A é uma matriz quadrada de ordem $n \times n$ tal que* $\det(A) \neq 0$, *então A é inversível e*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \overline{A}^t.$$

Levando-se em contar as proposições 1.26 e 1.29 obtemos o seguinte resultado que é um critério, usando determinantes, para determinar quando uma matriz quadrada é inversível e também nos fornece um método para o cálculo, usando determinantes, da inversa de uma matriz.

Teorema 1.30. *Seja A uma matriz quadrada de ordem $n \times n$. Então A é inversível se, e somente se, o determinante de A é não nulo e nesse caso*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \overline{A}^t.$$

Como exemplo para este teorema vamos calcular, se possível, a inversa da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Primeiro observemos que

$$\left| \begin{array}{ccc|cc} 2 & -3 & 7 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 2 \end{array} \right| = (2)(0)(-1) + (-3)(3)(0) + (7)(1)(2) - (-3)(1)(-1) - (2)(3)(2) - (7)(0)(0)$$

$$= 14 - 3 - 12 = -1.$$

Assim, A tem o determinante não nulo e, portanto, é uma matriz inversível. Vamos então calcular a sua inversa e, para isso vamos calcular a sua adjunta. Temos que

$$\Delta_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -6 \quad \Delta_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \quad \Delta_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2,$$

$$\Delta_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -3 & 7 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 11 \quad \Delta_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 \quad \Delta_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4,$$

$$\Delta_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -3 & 7 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -9 \quad \Delta_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \quad \Delta_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3.$$

Logo,

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} -6 & 1 & 2 \\ 11 & -2 & -4 \\ -9 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \overline{A}^t = \begin{bmatrix} -6 & 11 & -9 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

são, respectivamente, as matrizes dos cofatores e adjunta da matriz A. Logo a inversa da matriz A é dada por

$$A^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} -6 & 11 & -9 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -11 & 9 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & -3 \end{bmatrix}.$$

Vamos repetir o processo acima para a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 12 \end{bmatrix}.$$

Temos que

$$\det(A) = \det\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 12 \end{bmatrix} = (-1)^{1+1}1\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 12 \end{vmatrix} = -8.$$

Assim, A é uma matriz inversível. Vamos calcular então a sua inversa. Temos que

$$\Delta_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 12 \end{vmatrix} = -8 \quad \Delta_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 12 \end{vmatrix} = 0 \quad \Delta_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\Delta_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 12 \end{vmatrix} = -16 \quad \Delta_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 12 \end{vmatrix} = 12 \quad \Delta_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -4,$$

$$\Delta_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 \quad \Delta_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 \quad \Delta_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Logo,

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} -8 & 0 & 0 \\ -16 & 12 & -4 \\ 6 & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \overline{A}^t = \begin{bmatrix} -8 & -16 & 6 \\ 0 & 12 & -2 \\ 0 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

são, respectivamente, as matrizes dos cofatores e adjunta da matriz A. Logo a inversa da matriz A é dada por

$$A^{-1} = \frac{1}{-8} \begin{bmatrix} -8 & -16 & 6 \\ 0 & 12 & -2 \\ 0 & -4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -\frac{3}{4} \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Vejamos agora algumas propriedades sobre a inversa de matrizes inversíveis.

Proposição 1.31. *Sejam A e B matrizes quadradas de mesma ordem $n \times n$. Temos:*

(1) *se A e B são inversíveis, então $A\ B$ é inversível e*

$$(A\ B)^{-1} = B^{-1}A^{-1};$$

(2) *se A é inversível, então A^{-1} é inversível e*

$$(A^{-1})^{-1} = A;$$

(3) *se A é inversíveis, então A^t é inversível e*

$$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t;$$

(4) *se A é uma matriz inversível tal que existe uma matriz quadrada C de ordem $n \times n$ tal que*

$$A\ C = \mathbb{I}_n,$$

então

$$C\ A = \mathbb{I}_n \quad e \quad A^{-1} = C.$$

A propriedade dada no item **(4)** será usada da seguinte maneira: quando sabemos que a matriz é inversível (isto é, $\det(A) \neq 0$) e temos uma candidata a inversa de A, denotada por C, para checar se essa candidata é de fato a inversa de A precisamos checar apenas se $A\ C = \mathbb{I}_n$. Essa propriedade será usada na próxima aula quando apresentarmos um método prático para o cálculo da inversa de matrizes. Ainda, não é verdade que se A e B são matrizes inversíveis então $A + B$ é uma matriz inversível. Para vermos esses fato consideremos as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Temos que

$$\det(A) = 1 \quad \text{e} \quad \det(B) = -1.$$

Logo A e B são matrizes inversíveis. Porém,

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

e, como

$$\det(A + B) = 0,$$

temos que $A + B$ não é uma matriz inversível.

Vamos agora introduzir um método rápido, utilizando as operações usadas para o escalonamento de matrizes, para encontrar a inversa de matrizes, quando estas forem inversíveis. Esse método consiste em colocarmos a matriz, A, matriz que queremos calcular a inversa, ao lado da matriz identidade, de mesma ordem da matriz inicial, e efetuarmos operações elementares em A de modo a transformá-la na identidade e efetuarmos essas mesmas operações na identidade e, dessa forma a transformando em uma matriz equivalente B. A matriz B obtida é uma candidata a inversa da matriz A. Vejamos um exemplo. Vamos calcular a inversa, se existir, da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Antes de fazermos qualquer esforço, vamos verificar primeiro se a matriz A é inversível. Temos

$$\det(A) = 1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1-1) - (-1+1) + (-1-1) = -2 - 2 = -4.$$

Portanto, a matriz A é inversível. Vamos então calcular a sua inversa:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 = L_3 + L_1(-1)]{L_2 = L_2 + L_1(-1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \longleftrightarrow L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 = L_2(-1/2)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 = L_3(-1/2)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[L_1 = L_1 + L_3(-1)]{L_2 = L_2 + L_3(-1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 = L_1 + L_2(-1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right].$$

Assim, uma candidata a inversa da matriz A é

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Mas,

$$A\ B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbb{I}_3.$$

Como A é inversível e $A\ B = \mathbb{I}_3$, a propriedade 4 da Proposição 1.31 implica que B é a inversa de A, isto é,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

1.5 Exercícios Propostos

1. Sejam $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 6 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ matrizes de ordem em 2×3. Calcule $3(A - 1/2B) + C$.

2. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}$. Encontre $A+B$, AC, BC, CD, DA, DB, $-A$ e $-D$.

3. Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & x^2 \\ 2x-1 & 0 \end{bmatrix}$. Se $A^t = A$, calcule o valor de x.

4. Se A é uma matriz simétrica de ordem n, calcule $A - A^t$.

5. Seja $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ uma matriz quadrada de ordem n. Dizemos que A é uma matriz triangular superior se $a_{ij} = 0$ sempre que $i > j$. Dar exemplos de matrizes triangulares superiores.

6. Se A é uma matriz triangular superior de ordem n, encontre A^t.

7. Com base na Definição dada no Exercício 7, defina matriz triangular inferior.

8. Seja $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ uma matriz quadrada de ordem n. Dizemos que A é uma matriz diagonal se $a_{ij} = 0$, para todo $i \neq j$. Dar exemplos de matrizes diagonais.

9. Se A é uma matriz diagonal de ordem n, encontre A^t.

10. Se $A^2 = AA$, para toda matriz quadrada de ordem n, calcule $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}^2$.

11. Se A é uma matriz triangular superior de ordem n, encontre A^2.

12. Dadas $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, mostre que $AB = AC$.

13. Suponha que $A \neq \mathbb{O}$ e $AB = AC$, onde A, B e C são matrizes tais que as multiplicações estejam definidas.

    (a) É sempre verdade que $B = C$? Dar exemplos.

    (b) Se existir uma matriz Y tal que $YA = I$, onde I é a matriz identidade, então $B = C$?

14. Explique por que, em geral, $(A + B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$ e $(A + B)(A - B) \neq A^2 - B^2$. Dar exemplos de matrizes A e B que satisfazem e que não satisfazem as expressões acima.

15. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$.

    (a) Mostre que $AB = BA = \mathbb{O}$, $AC = A$ e $CA = C$.

    (b) Use os resultados do item anterior para mostrar que $ACB = CBA$, $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$ e $(A^2 \pm B)^2 = A^2 + B^2$.

16. É sempre verdade que o produto de duas matrizes simétricas é ainda uma matriz simétrica? Dar exemplos para justificar a sua resposta.

17. Dizemos que uma matriz quadrada A de ordem n é uma matriz anti-simétrica se $A^t = -A$. Resolva os seguintes itens:

    (a) Dar exemplos de matrizes anti-simétricas

(b) A soma de duas matrizes anti-simétricas é uma matriz anti-simétrica.

18. Se A e B são duas matrizes quadradas de ordem n tais que $AB = BA$, mostre, usando propriedades, que as seguintes afirmações são verdadeiras:

(a) $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$;

(b) $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$;

(c) $(A - B)(A^2 + AB + B^2) = A^3 - B^3$.

19. Se A e B são duas matrizes quadradas de ordem 2 tais que $AB = \mathbb{O}_2$. Podemos concluir que:

(a) $A = \mathbb{O}_2$ ou $B = \mathbb{O}_2$?

(b) $BA = \mathbb{O}_2$?

Nos dois itens dar exemplos para justificar a sua resposta.

20. Mostrar que as matrizes $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{y} \\ y & 1 \end{bmatrix}$, onde y é um número real não nulo, verificam a seguinte equação matricial: $X^2 = 2X$.

21. Verifique, usando o escalonamento de matrizes, se as matrizes abaixo são equivalentes à matriz indentidade da respectiva ordem.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & -8 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 8 & -1 & 13 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 6 \\ -3 & -2 & 7 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -2 & -5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \; \text{e} \; D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

22. Descreva todas as matrizes 2×2, que estão na forma escada.

23. Reduza à forma escada as seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \; \text{e} \; C = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

24. Calcular o determinante das seguintes matrizes A, B e C abaixo.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 8 & 9 & 0 \end{pmatrix}.$$

25. Calcule $\det \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & 7 \end{bmatrix}$.

26. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, calcule $\det A + \det B$ e $\det(A + B)$.

27. Sejam A e B matrizes de ordem $n \times n$. Verifique se as colocações abaixo são verdadeiras ou falsas. Justifique a sua resposta apresentado uma demonstração rápida ou dando um contra-exemplo.

    (a) $\det(AB) = \det(BA)$;

    (b) $\det(A^t) = \det A$;

    (c) $\det(2A) = 2 \det A$;

    (d) $\det(A^2) = (\det A)^2$.

28. Mostre para uma matriz geral de ordem 4×4 que o determinante de uma matriz triangular A é igual ao produto dos elementos de sua diagonal.

29. Mostre que $\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix} = (a - b)(b - c)(c - a)$.

30. Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & -2 \\ 5 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$, calcule A_{23}, $\det(A_{23})$, Δ_{23}, $\det A$, $\bar{A}$, $\operatorname{adj} A$ e A^{-1}.

31. Se A ou B é uma matriz não inversível, então AB também não é inversível. Prove este fato sem usar determinantes.

32. Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, calcule $\operatorname{adj} A$, $\det A$ e A^{-1}.

33. Dizemos que A e B são matrizes semelhantes se existe uma matriz inversível P tal que $B = P^{-1}AP$. Mostre que se A e B são semelhantes então $\det A = \det B$.

34. Verifique se as colocações abaixo são verdadeiras ou falsas. Justifique a sua resposta apresentado uma demonstração rápida ou dando um contra-exemplo.

    (a) Se $\det A = 1$, então $A^{-1} = A$.

    (b) Se A é uma matriz triangular superior e A^{-1} existe, então A^{-1} será uma matriz triangular superior.

    (c) Se A é uma matriz $n \times n$ da forma kI_n, então $\det A = k^n$.

35. Sejam A e B matrizes inversíveis de ordem $n \times n$. Mostre que $A + B$ também é uma matriz inversível e calcule $(A + B)^{-1}$.

36. Sejam A, B e C matrizes de ordem $n \times n$. Se A é inversível, mostre que $AB = AC \Rightarrow B = C$.

37. Se A, B e C matrizes inversíveis de ordem $n \times n$, encontre uma matriz X de maneira que $A(B^{-1}X) = C^{-1}A$.

38. Seja A uma matriz inversível de ordem $n \times n$. Mostre que A^{-1} também é uma matriz inversível e calcule $(A^{-1})^{-1}$.

39. Seja A uma matriz inversível de ordem $n \times n$. Mostre que A^t é inversível e calcule $(A^t)^{-1}$.

40. Verifique se as matrizes abaixo são inversíveis. Em caso afirmativo, calcule a sua inversa usando

o método direto (escalonamento).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & -8 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 8 & -1 & 13 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 6 \\ -3 & -2 & 7 \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -2 & -5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \ \text{ e } \ D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

41. Seja A uma matriz inversível. Mostre que kA é uma matriz inversível quando $k \neq 0$ e calcule $(kA)^{-1}$.

42. Mostre que a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{bmatrix}$ é inversível para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$ e que $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ ac-b & -c & 1 \end{bmatrix}$.

43. Existe alguma matriz inversível A tal que $A^2 = \mathbb{O}$, justifique a sua resposta.

Capítulo 2

Sistemas Lineares

Neste capítulo vamos aplicar o escalonamento de matrizes estudado na seção anterior para classificar e resolver sistemas lineares.

Definição 2.1. *Uma* **equação linear** *é uma equação da forma:*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n = b,$$

onde

- $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots\ x_n$ *são as variáveis da equação;*
- $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ a_n$ *são os respectivos coeficientes das variáveis da equação;*
- b *é o termo independente.*

Diremos que uma $n-$*upla* $(c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n)$, *onde cada* $c_i \in \mathbb{R}$ *para* $i = 1, 2, \ldots, n$ *são números reais, é uma solução da equação linear se* $(c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n)$ *satisfaz a equação linear, isto é, se*

$$a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 + \ldots + a_nc_n = b.$$

Por exemplo, se considerarmos a equação linear

$$2x - y + z = 1,$$

temos que

- as variáveis são x, y e z;
- os respectivos coeficientes das variáveis são 2, -1 e 1;
- o termo independente é igual a 1.

Nesse caso podemos encontrar várias soluções para a equação linear, bastando para isso atribuir valores, por exemplo, para as variáveis x e y e encontrar o valor da variável z tal que a tripla (x, y, z) satisfaça a equação. Se $x = 1$ e $y = 2$, então devemos ter que

$$2(1) - 1(2) + z = 1 \iff z = 1.$$

Assim a tripla $(1, 2, 1)$ é uma solução da equação linear.

Uma observação importante que colocamos nesse ponto é que a posição que um número está na $n-$upla de uma solução é essencial, pois essa posição indica que o número está associado a uma determinada variável da equação, e se trocarmos essa posição a $n-$upla pode não ser solução da equação. Por exemplo se considerarmos a tripla $(2, 1, 1)$, então

$$2(2) - 1(1)1 + 1(1) = 4 - 1 + 1 = 4 \neq 1,$$

ou seja $(2, 1, 1)$ não é solução da equação $2x - y + z = 1$, e vimos que a tripla $(1, 2, 1)$ é solução da equação.

Definição 2.2. *Um* **sistema de** m **equações lineares com** n **variáveis** *é um conjunto de* m *equações lineares, cada uma delas com* $n-$ *variáveis, consideradas simultâneamente. Denotaremos tal sistema por*

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_2 \\ \qquad \vdots \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_m, \end{cases}$$

onde

- $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots\ x_n$ *são as variáveis do sistema* S*;*

- *para* $i = 1, 2, \ldots, m$ *e* $j = 1, 2, \ldots, n$, a_{ij} *são os respectivos coeficientes das variáveis do sistema* S*;*

- *para* $b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_m$ *são os termos independentes do sistema* S*.*

Definição 2.3. *Diremos que uma* $n-$*upla* $(c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n)$*, onde cada* $c_i \in \mathbb{R}$ *para* $i = 1, 2, \ldots, n$ *são números reais, é uma solução do sistema linear* S *se* $(c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n)$ *satisfazem todas as* m *equações lineares de sistema linear* S *ao mesmo tempo, isto é, se*

$$S\ :\ \begin{cases} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + a_{13}c_3 + \ldots + a_{1n}c_n = b_1 \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + a_{23}c_3 + \ldots + a_{2n}c_n = b_2 \\ a_{31}c_1 + a_{32}c_2 + a_{33}c_3 + \ldots + a_{3n}c_n = b_2 \\ \qquad\quad \vdots \\ a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + a_{m3}c_3 + \ldots + a_{mn}c_n = b_m. \end{cases}$$

O conjunto de todas as soluções do sistema S *será denotado por*

$$V = \{(c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n;\ (c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n)\ \ \textit{é solução de}\ \ S\}.$$

Por exemplo, se considerarmos o sistema linear com 2 equações e 3 variáveis

$$\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ \qquad x + 2y = 6 \end{cases}$$

temos que

- o número de equações é $m = 2$;

- o número de variáveis é $n = 3$;

- as variáveis são
$$x$$
$$y$$
$$z;$$

- os coeficientes são
$$\begin{array}{lll} a_{11} = 2 & a_{12} = -1 & a_{11} = 1 \\ a_{21} = 1 & a_{22} = 2 & a_{23} = 0; \end{array}$$

- os termos independentes são

$$b_1 = 1$$
$$b_2 = 6.$$

Para encontrarmos soluções desse sistema precisamos encontrar soluções das duas equações lineares ao mesmo tempo. Vimos que a tripla $(1, 2, 1)$ é uma solução da primeira equação, mas

$$1(1) + 2(2) + 0(1) = 5 \neq 6,$$

ou seja a tripla $(1, 2, 1)$ não é uma solução da segunda equação. O problema que aparece aqui é que o sistema linear poder não ter solução, pode ter uma única solução ou ter mais que uma solução. O objetivo dessa seção é encontrar, quando possível, todas e exatamente todas as soluções de um sistema linear. Por exemplo a tripla $(0, 3, 4)$ é uma solução do sistema, pois

$$2(0) - (3) + 1(4) = -3 + 4 = 1$$

ou seja, é solução da primeira equação e

$$1(0) + 2(3) + 0(4) = 0 + 6 + 0 = 6,$$

ou seja, também é solução da segunda equação. Logo, $(0, 3, 4)$ é uma solução do sistema. Porém, um cálculo rápido mostra que a tripla $(\frac{8}{5}, \frac{11}{5}, 0)$ também é uma solução do sistema. Uma pergunta que fica é se existem outras soluções e também, quantas são as soluções desse sistema. Veremos mais adiante que como conseguimos apresentar duas soluções para o sistema, então o sistema possuirá infinitas soluções.

Dessa forma o objetivo dessa seção é dizer quantas soluções um sistema linear possui e encontrar, quando possível, todas as soluções desse sistema linear.

Antes de prosseguirmos faremos duas observações importantes.

- Se considerarmos as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \; X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \; e \; B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

usando o produto de matrizes podemos ver que o sistema S pode ser escrito usando a seguinte equação envolvendo matrizes

$$AX = B,$$

a matriz A será chamada de matriz dos coeficientes do sistema linear, a matriz X é chamada matriz das variáveis e a matriz B é chamada a matriz dos termos independentes e, portanto, resolver o sistema S é o mesmo que encontrar uma matriz X que resolve a equação matricial. A partir de agora usaremos essa notação;

- No sistema S, quando todos os termos independentes são nulos, isto é, $b_i = 0$ para todo $i = 1, 2, \ldots, m$, o sistema será chamado de sistema linear homogêneo e denotaremos por

$$SH : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = 0 \\ \quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = 0. \end{cases}$$

  Observando o sistema homogêneo acima vemos que a $n-$upla $(0, 0, 0, \ldots, 0)$ é sempre uma solução do sistema. então para sistemas homogêneos, só precisamos dizer se o sistema possui uma única solução, neste caso a solução nula, ou se possui soluções não nulas, quantas e quais.

Para exemplificar a última observação acima vamos resolver o seguinte sistema linear homogêneo usando a técnica da eliminação gaussiana. Consideremos então o sistema

$$\begin{cases} 2x + z = 0 \\ y + z = 0 \\ 2x - y = 0. \end{cases}$$

O sistema acima é um sistema homogêneo, pois todos os coeficientes independentes são nulos, com 3 equações e 3 variáveis. As matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \ X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \ \text{ e } \ B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

são as matrizes dos coeficientes, das variáveis e dos termos independentes. Imediatamente vemos que a tripla $(0, 0, 0)$ é uma solução do sistema. Para obtermos outras, observemos que da primeira equação do sistema obtemos que

$$z = -2x$$

e da terceira equação obtemos que

$$y = 2x.$$

Logo, (x, y, z) é uma solução do sistema homogêneo acima se, e somente se,

$$y = 2x \quad \text{e} \quad z = -2x,$$

ou seja, a tripla $(x, 2x, -2x)$ é uma solução do sistema homogêneo para qualquer valor que atribuamos à variável x. Assim, o sistema homogêneo possui infinitas soluções e seu conjunto solução é dado por

$$V = \{(x, 2x, -2x) \in \mathbb{R}^3;\ x \in \mathbb{R}\}.$$

Definição 2.4 **(Classificação de um Sistema).** *Seja S um sistema linear com m equações e n variáveis. Então*

(a) *diremos que o sistema S é* **incompatível** *(ou impossível) se ele não possuir nenhuma solução. Nesse caso seu conjunto solução será*

$$V = \{\ \} \quad ou \quad V = \emptyset;$$

(b) *diremos que o sistema S é* **compatível determinado** *(ou possível determinado) se ele possuir uma única solução $(c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n$. Nesse caso seu conjunto solução será*

$$V = \{(c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n)\};$$

(c) *diremos que o sistema S é* **compatível indeterminado** *(ou possível indeterminado) se ele possuir mais que uma solução (infinitas soluções). Nesse caso seu conjunto solução será*

$$V = \{(c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n;\ \ \textit{condições sobre } (c_1, c_2, c_3,\ \ldots, c_n) \textit{ para ser solução de } S\}.$$

2.1 Resolução de Sistemas Lineares Via Escalonamento

Agora, para começarmos a resolver sistemas lineares mais gerais vamos introduzir uma técnica, que utiliza o escalonamento de matrizes. Seja S um sistema linear com m equações e n variáveis

$$S\ :\ \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_2 \\ \qquad\vdots \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_m. \end{cases}$$

Associado ao sistema temos

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix},\ X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\ e\ B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

a matriz dos coeficientes do sistema linear, que é uma matriz de ordem $m \times n$, a matriz das variáveis e a matriz dos termos independentes, que são matrizes de ordem $n \times 1$ e $m \times 1$, respectivamente. Também associado ao sistema temos a seguinte matriz de ordem $m \times (n+1)$:

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right],$$

que é denominada matriz ampliada associada ao sistema linear S. Observemos que na matriz $\tilde{A}$ os termos que estão antes do traço são os coeficientes da matriz dos coeficientes A e, após o traço são os termos independentes. A idéia agora é transformar a matriz ampliada $\tilde{A}$, usando somente as operações elementares introduzidas na seção anterior, em uma nova matriz, $\tilde{A}_1$ de ordem $m \times (n+1)$, de tal forma que a parte associada à matriz A (de ordem $m \times n$) dentro de $\tilde{A}_1$ seja uma matriz escalonada (na forma escada). Seja S_1 o novo sistema, cuja matriz ampliada seja essa nova matriz $\tilde{A}_1$. Como os coeficientes da matriz ampliada $\tilde{A}_1$ são em sua maioria zeros, resolvermos o novo sistema fica muito mais fácil. Antes de começarmos a fazer alguns exemplos dessa técnica, uma pergunta que deveríamos fazer e/ou responder é se as soluções do novo sistema obtido S_1 são também soluções do sistema inicial S e vice-versa, se todas as soluções do sistema inicial S são soluções do novo sistema S_1. A resposta nos dois casos são verdadeiras e na realidade temos o seguinte teorema:

Teorema 2.5. *Sistemas lineares associados a matrizes ampliadas equivalentes (linha equivalentes) possuem exatamente as mesmas soluções.*

Não faremos a prova deste teorema, mas vale a pena fazermos algumas considerações sobre essa prova. Lembrando que matrizes equivalentes são matrizes que são obtidas uma da outra através de um número finito de operações elementares. Náo é difícil ver que quando realizamos qualquer uma das três operações elementares sobre as linhas da matriz não alteramos as soluções dos respectivos sistemas lineares associados:

- se $\tilde{A}_1$ é obtida de $\tilde{A}$ pela troca de duas linhas, claramente os dois respectivos sistemas associadas continuam tendo as mesmas soluções, pois só trocamos as posições das equações;

- e $\tilde{A}_1$ é obtida de $\tilde{A}$ pela multiplicação de uma linha por um número não nulo, então os dois respectivos sistemas associadas continuam tendo as mesmas soluções, pois multiplicamos os dois lados de uma equação linear pelo mesmo número não nulo;

- se $\tilde{A}_1$ é obtida de $\tilde{A}$ pela troca de uma linha por essa mesma linha somada com uma outra linha multiplicada por um número não nulo, então os dois respectivos sistemas associadas continuam tendo as mesmas soluções, pois uma solução do sistema satisfaz todas as equações ao mesmo tempo e quando somamos duas equações a $n-$upla (solução) também satisfaz essa "nova equação", multiplicar por um número não nulo já vimos que não altera a solução.

Baseado neste teorema temos as seguintes definições

Definição 2.6. *Dois sistemas lineares de m equações e n variáveis são equivalentes se eles possuírem o mesmo conjunto solução.*

Definição 2.7. *Diremos que um sistema está na forma escalonada (na forma escada), se a sua matriz ampliada estiver na forma escalonada (na forma escada).*

Exemplo 2.8. *Usando o método do escalonamento de matrizes vamos, se possível, resolver o seguinte sistema linear:*

$$S: \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x - y + z = 4 \\ x - 2y + 2z = 0. \end{cases}$$

De fato: Associado a este sistema temos as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}, \ X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \ e \ B = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix},$$

dos coeficientes, das variáveis e dos termos independentes respecitvamente. Também a matriz ampliada do sistema fica

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right].$$

Vamos então escalonar a matriz ampliada $\tilde{A}$ do sistema. Temos

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 = L_3 + L_1(-1)]{L_2 = L_2 + L_1(-2)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 = L_3 + L_2(1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 = L_1 + L_2(1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \tilde{A}_1.$$

A parte associada à matriz A (de ordem 3×3) dentro da matriz $\tilde{A}_1$ está escalonada (na forma escada) e o sistema associado à $\tilde{A}_1$ fica então da forma

$$S_1 : \begin{cases} x + 0y + 0z = 3 \\ 0x + y - z = 2 \\ 0x + 0y + 0z = 1. \end{cases}$$

Como a terceira equação do sistema S_1 não será satisfeita para qualquer tripla $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ de números reais, então o sistema S_1 é um sistema incompatível e, portanto, como $\tilde{A}_1$ é equivalente a $\tilde{A}$, obtemos que o sistema S é um sistema incompatível e seu conjunto solução fica

$$V = \{\ \} \quad \text{ou} \quad V = \emptyset,$$

completando o exemplo. Observemos que neste exemplo a matriz $\tilde{A}_1$ não está escalonada, enquanto que a parte da matriz associada à matriz dos coeficientes A está escalonada. □

Exemplo 2.9. *Vamos fazer o mesmo que no exemplo anterior para o seguinte sistema linear:*

$$S : \begin{cases} 2x + 5y + 4z = 4 \\ x + 4y + 3z = 1 \\ x - 3y - 2z = 5. \end{cases}$$

De fato: Associado a este sistema temos as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \end{bmatrix}, \ X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \ e \ B = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix},$$

dos coeficientes, das variáveis e dos termos independentes respecitvamente. Também a matriz ampliada do sistema fica

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 & 5 \end{array}\right].$$

Vamos então escalonar a matriz ampliada $\tilde{A}$ do sistema. Temos

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{trocar } L_2 \text{ por } L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 4 \\ 1 & -3 & -2 & 5 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 4 \\ 1 & -3 & -2 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 = L_3 + L_1(1)]{L_2 = L_2 + L_1(-2)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & -7 & -5 & 4 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & -7 & -5 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 = L_2(-1/3)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & -7 & -5 & 4 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & -7 & -5 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 = L_3 + L_3(7)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 = L_3(-3)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[L_2 = L_2 + L_3(-2/3)]{L_1 = L_1 + L_3(-3)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 = L_1 + L_2(-4)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] = \tilde{A}_1.$$

A matriz $\tilde{A}_1$ está na forma escalonada e seu sistema associado fica então da forma

$$S_1 : \begin{cases} x + 0y + 0z = 3 \\ 0x + y + 0z = -2 \\ 0x + 0y + 1z = 2. \end{cases}$$

Assim, vemos que a única solução do sistema S_1 é a tripla $(3, -2, 2) \in \mathbb{R}^3$ de números reais, então o sistema S_1 é um sistema compatível determindado e, como $\tilde{A}_1$ é equivalente a $\tilde{A}$, obtemos que o sistema S é um sistema compatível determinado e seu conjunto solução fica

$$V = \{(3, -2, 2)\},$$

completando o exemplo. Observemos que neste exemplo, tanto $\tilde{A}_1$ quanto a parte associada à matriz dos coeficientes estão escalonadas. $\square$

Exemplo 2.10. *Vamos fazer o mesmo do exemplo anterior para o seguinte sistema linear:*

$$S : \begin{cases} x - 2y - z = 1 \\ 2x + y - 3z = 0 \\ x - 7y = 3. \end{cases}$$

De fato: Associado a este sistema temos as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & -7 & 0 \end{bmatrix}, \; X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \; e \; B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix},$$

dos coeficientes, das variáveis e dos termos independentes respecitvamente. Também a matriz ampliada do sistema fica

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & -7 & 0 & 3 \end{array}\right].$$

Vamos então escalonar a matriz ampliada $\tilde{A}$ do sistema. Temos

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & -7 & 0 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 = L_3 + L_1(-1)]{L_2 = L_2 + L_1(-2)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & -2 \\ 0 & -5 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & -2 \\ 0 & -5 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 = L_3 + L_2(1)]{L_2 = L_2(1/5)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 = L_1 + L_2(2)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{7}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \tilde{A}_1.$$

A matriz $\tilde{A}_1$ está na forma escalonada e seu sistema associado fica então da forma

$$S_1 : \left\{\begin{array}{r} x + 0y - \frac{7}{5}z = \frac{1}{5} \\ 0x + y - \frac{1}{5}z = -\frac{2}{5} \\ 0x + 0y + 0z = 0. \end{array}\right.$$

Observemos que a última equação linear do sistema S_1 não nos fornece nenhuma informação e é satisfeita para toda tripla $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ de números reais e das outras duas equações lineares obtemos que

$$x = \frac{7}{5}z + \frac{1}{5} \quad \text{e} \quad y = \frac{1}{5}z - \frac{2}{5},$$

ficando a variável $z \in \mathbb{R}$ livre e variando em todo o conjunto dos números reais. Então o sistema S_1 é um sistema compatível indetermindado e, como $\tilde{A}_1$ é equivalente a $\tilde{A}$, obtemos que o sistema S é um sistema compatível indterminado e seu conjunto solução fica

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x = \frac{7}{5}z + \frac{1}{5} \ \text{ e } \ y = \frac{1}{5}z - \frac{2}{5} \ \text{ com } \ z \in \mathbb{R}\},$$

completando este exemplo. Observemos que neste exemplo, tanto $\tilde{A}_1$ quanto a parte associada à matriz dos coeficientes estão escalonadas. $\square$

2.2 Classificação e Discussão de Sistemas Lineares

Vimos nos três exemplos acima que um determinado sistema pode ter uma única solução, pode ter mais que uma solução (neste caso sempre possuirá infinitas soluções) e, também, pode não ter solução alguma. Estas três possibilidades são as únicas com relação às soluções de um sistema. Temos assim a

Definição 2.11 (**Classificação de um Sistema).** *Seja S um sistema linear com m equações e n variáveis. Então*

(a) *diremos que o sistema S é* **incompatível** *(ou impossível) se ele não possuir nenhuma solução. Nesse caso seu conjunto solução será*

$$V = \{\ \} \quad ou \quad V = \emptyset;$$

(b) *diremos que o sistema S é* **compatível determinado** *(ou possível determinado) se ele possuir uma única solução $(c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n$. Nesse caso seu conjunto solução será*

$$V = \{(c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n)\};$$

(c) *diremos que o sistema S é* **compatível indeterminado** *(ou possível indeterminado) se ele possuir mais que uma solução (infinitas soluções). Nesse caso seu conjunto solução será*

$$V = \{(c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n; \quad \textit{condições sobre } (c_1, c_2, c_3,\ \ldots, c_n) \textit{ para ser solução de } S\}.$$

No ítem (c) as condições para que a $n-$upla $(c_1, c_2, c_3,\ \ldots, c_n)$ seja uma solução do sistema S, em geral, é dada como sendo um determinado número de variáveis, denominadas variáveis dependentes, em função das demais, chamadas de variáveis livres. O número de variáveis livres é denominado grau de liberdade do sistema linear S.

Ainda sobre as soluções de um sistema linear com m equações e n variáveis, para finalizar esta seção, vamos discutir o sistema com relação à quantidade de suas soluções, observando algumas propriedades das matrizes ampliadas e das matrizes dos coeficientes. Seja

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_2 \\ \qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

e considere a matriz ampliada associado ao sistema:

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_n \end{array}\right].$$

Após um número finito de operações elementares transformamos a matriz ampliada $\tilde{A}$ na seguinte matriz

$$\tilde{A}_1 = \left[\begin{array}{cccc|c} \tilde{a_{11}} & \tilde{a_{12}} & \ldots & \tilde{a_{1n}} & \tilde{b_1} \\ \tilde{a_{21}} & \tilde{a_{22}} & \ldots & \tilde{a_{2n}} & \tilde{b_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \tilde{a_{p1}} & \tilde{a_{p2}} & \ldots & \tilde{a_{pn}} & \tilde{b_p} \\ -- & -- & -- & -- & -- \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \tilde{b_{p+1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \tilde{b_m} \end{array}\right],$$

que é equivalente a $\tilde{A}$ e é matriz ampliada de um determinado sistema S_1 equivalente ao sistema S. Observemos que $\tilde{A}_1$ pode não estar escalonada (na forma escada), mas com mais um número finito de operações elementares podemos transformá-la em um matriz escalonada, isto é,

$$\tilde{A} \longrightarrow \tilde{A}_1 \longrightarrow \tilde{B}.$$

Já a matriz A está escalonada (na forma escada) e

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \tilde{a_{11}} & \tilde{a_{12}} & \dots & \tilde{a_{1n}} \\ \tilde{a_{21}} & \tilde{a_{22}} & \dots & \tilde{a_{2n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a_{p1}} & \tilde{a_{p2}} & \dots & \tilde{a_{pn}} \\ -- & -- & -- & -- \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = B.$$

Sejam

- p o número de linhas não nulas de B,
- $\tilde{p}$ o número de linhas não nulas de $\tilde{B}$.

Temos que

$$0 \leq p \leq n \ \text{ e } \ 0 \leq \tilde{p} \leq n+1.$$

Os números p e $\tilde{p}$ são chamados de posto das matrizes A e $\tilde{A}$, respectivamente. Por exemplo, no Exemplo 2.8 vimos que

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \tilde{A}_1 \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \tilde{B}$$

e

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B$$

Neste caso temos que

- o posto p de A é igual a 2, isto é $p = 2 < 3 = n$;
- o posto $\tilde{p}$ de $\tilde{A}$ é igaul a 3, isto é $\tilde{p} = 3 = n$

e vimos que o sistema associado matriz ampliada $\tilde{A}$ foi um sisstema incompatível.

No Exemplo 2.9 vimos que

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 & 5 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] = \tilde{A}_1 = \tilde{B},$$

pois $\tilde{A}_1$ já está escalonada. Ainda,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = B.$$

Neste caso temos que

- o posto p de A é igual a 3, isto é $p = 3 = n$;
- o posto $\tilde{p}$ de $\tilde{A}$ é igaul a 3, isto é $\tilde{p} = 3 = n$

e vimos que o sistema associado matriz ampliada $\tilde{A}$ foi um sisstema compatível determinado.

Por fim, vimos no Exemplo 2.10 que

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & -7 & 0 & 3 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{7}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \tilde{A}_1 = \tilde{B},$$

pois $\tilde{A}_1$ já está escalonada. Ainda,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & -7 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{7}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B.$$

Neste exemplo temos que

- o posto p de A é igual a 2, isto é $p = 2 < 3 = n$;
- o posto $\tilde{p}$ de $\tilde{A}$ é igaul a 2, isto é $\tilde{p} = 2 < 3 = n$

e vimos que o sistema associado matriz ampliada $\tilde{A}$ foi um sisstema compatível indeterminado, e a razão para isso é que o o posto das matrizes A e $\tilde{A}$ são menores que n, que é o número de variáveis (colunas) do sistema linear (da matriz dos coeficientes).

Com base nessas observações acima temos o seguinte critério para classificar o sistema quanto ao número de soluções. Sejam S um sistema linear com m equações e n variáveis, A a matriz dos coeficientes e $\tilde{A}$ a matriz ampliada associado ao sistema S. Se p denota o posto de A e $\tilde{p}$ denota o posto da matriz ampliada $\tilde{A}$, temos que

(a) se $p < \tilde{p}$, então o sistema será incompatível;

(b) se $p = \tilde{p} = n$, então o sistema será compatível determinado;

(c) se $p = \tilde{p} < n$, então o sistema será compatível indetermindado, e neste caso poderemos escolher $n - p$ variáveis para ser livres (grau de liberdade é igual a $n - p$) e deixar as outras p variáveis em função destas.

Como exemplo deste critério vamos discutir e classificar, em função do parâmetro $a \in \mathbb{R}$, e depois resolver, quando possível, o seguinte sistema:

$$S : \left\{ \begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & + & w & = & 1; \\ x & + & 2y & + & 2z & + & 2w & = & 3 \\ x & + & y & + & 2z & + & 2w & = & 4 \\ x & + & y & + & z & + & (a+1)w & = & 4. \end{array} \right.$$

A matriz ampliada associada a este sistema é

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & (a+1) & 4 \end{array} \right].$$

Temos

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & (a+1) & 4 \end{array} \right] \xrightarrow[\substack{L_2 = L_2 + L_1(-1) \\ L_3 = L_3 + L_1(-1) \\ L_4 = L_4 + L_1(-1)}]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & a & 3 \end{array} \right].$$

Observando a segunda matriz acima vemos que quando a for igual a zero um linha da parte da matriz correspondente à matriz dos coeficientes será nula. Dessa forma vamos separar em dois casos:

<u>**a=0**</u> Quando $a = 0$ vemos que

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{L_4 = L_4(1/3)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[]{\substack{L_1 = L_1 + L_4(-1) \\ L_2 = L_2 + L_4(-2) \\ L_3 = L_3 + L_4(-3)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[]{\substack{L_1 = L_1 + L_3(-1) \\ L_2 = L_2 + L_3(-1)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 = L_1 + L_2(-1)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \tilde{B}.$$

Assim, quando $a = 0$ a matriz ampliada do sistema será equivalente a

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \tilde{B}$$

e a matriz dos coeficientes do sistema será equivalente a

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B.$$

Logo,

$$p = 3 < 4 = \tilde{p},$$

ou seja, o posto da matriz dos coefecientes é menor que o posto da matriz ampliada e, portanto, quando $a = 0$ o sistema é incompatível.

$\underline{\mathbf{a} \neq 0}$ Quando $a \neq 0$ obtemos que

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & a & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{L_4 = L_4(1/a)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{a} \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{a} \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{L_1 = L_1 + L_4(-1) \\ L_2 = L_2 + L_4(-1) \\ L_3 = L_3 + L_4(-1)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 - \frac{3}{a} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 - \frac{3}{a} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 - \frac{3}{a} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{a} \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 - \frac{3}{a} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 - \frac{3}{a} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 - \frac{3}{a} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{a} \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{L_1 = L_1 + L_3(-1) \\ L_2 = L_2 + L_3(-1)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 - \frac{3}{a} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{a} \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 - \frac{3}{a} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{a} \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 = L_1 + L_2(-1)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 - \frac{3}{a} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{a} \end{array}\right].$$

Assim, quando $a \neq 0$ a matriz ampliada do sistema será equivalente a

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & a+1 & 4 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3-\frac{3}{a} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{a} \end{array}\right] = \tilde{B}$$

e a matriz dos coeficientes do sistema será equivalente a

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & a+1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = B.$$

Logo,

$$p = \tilde{p} = 4,$$

ou seja, o posto da matriz dos coefecientes é igual ao o posto da matriz ampliada e, ambos são iguais ao número de variáveis do sistema. Portanto, quando $a \neq 0$ o sistema é compatível determinado.

Para resolvermos o sistema, temos que quando $a = 0$ o conjunto solução do sistema é

$$V = \{\ \} \ \text{ ou } \ V = \emptyset$$

e, quando $a \neq 0$, o conjunto solução do sistema é

$$V = \{(-1, -1, 3 - \frac{3}{a}, \frac{3}{a}) \in \mathbb{R}^4;\ a \in \mathbb{R}^*\}.$$

2.3 Regra de Cramer

Nesta seção vamos usar a inversa de uma matriz para resolver sistemas lineares onde o número de equações e o número de variáveis são os mesmos.

Recordemos que se S é um sistema linear com n equações e n variáveis da forma

$$S\ :\ \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_2 \\ \qquad\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

então associado a esse sistema temos as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix},\ X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\ e\ B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

que são, respectivamente, a matriz dos coeficientes do sistema linear, que é uma matriz quadrada de ordem $n \times n$, a matriz das variáveis e a matriz dos termos independentes, que são matrizes de ordem $n \times 1$. Assim, resolver o sistema S é equivalente a encontrar uma matriz X de ordem $n \times 1$ que resolver a seguinte equação matricial:

$$AX = B.$$

Definição 2.12. *Diremos que um sistema S com n equações e n variáveis é um* **sistema de Cramer** *se o deteminante da matriz dos coeficientes de S é não nulo, isto é,*

$$\det(A) \neq 0.$$

Como já vimos na seção anterior se o determinante de uma matriz é não nulo, então ela é inversível. Dessa forma se S é um sistema de Cramer, então a equação matricial associada a esse sistema possui uma única solução dada por

$$AX = B \iff A^{-1}(AX) = A^{-1}B \iff (A^{-1}A)X = A^{-1}B \iff (\mathbb{I}_3)X = A^{-1}B,$$

ou seja,

$$X = A^{-1}B$$

e, portanto, S é um sistema compatível determinado e sua solução pode ser obtida da matriz X. Por exemplo, consideremos o sistema

$$S: \begin{cases} x+y+z=3 \\ x+y-z=1 \\ x-y-z=1. \end{cases}$$

Associado ao sistema temos a matriz dos coeficientes que é dada por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Vimos no final da seção anterior que A é inversível e

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo, a solução da equação matricial $AX = B$ associada ao sistema é

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto, a única solução do sistema é a tripla $(2,0,1)$, ou seja,

$$V = \{(2,0,1)\}.$$

Vimos também na seção anterior que se $\det(A) \neq 0$, temos uma expressão para a inversa da matriz A que é

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \dots & \Delta_{n1} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \dots & \Delta_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{1n} & \Delta_{2n} & \dots & \Delta_{nn} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \overline{A}^{\,t},$$

onde, para todo $i, j = 1, 2, 3, \dots, n$,

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij}),$$

com A_{ij}, $i, j = 1, 2, 3, \ldots, n$, sendo matrizes quadradas de ordem $(n-1) \times (n-1)$ obtidas da matriz inicial A suprimindo-se a linha i e a coluna j para $i, j = 1, 2, 3, \ldots, n$. Logo, se o sistema é um sistema de Cramer, então a solução da equação matricial associada ao sistema fica da seguinte forma:

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \ldots & \Delta_{n1} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \ldots & \Delta_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{1n} & \Delta_{2n} & \ldots & \Delta_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} b_1\Delta_{11} + b_2\Delta_{21} + \ldots + b_n\Delta_{n1} \\ b_1\Delta_{12} + b_2\Delta_{22} + \ldots + b_n\Delta_{n2} \\ \vdots \\ b_1\Delta_{1n} + b_2\Delta_{2n} + \ldots + b_n\Delta_{nn} \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = X = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} b_1\Delta_{11} + b_2\Delta_{21} + \ldots + b_n\Delta_{n1} \\ b_1\Delta_{12} + b_2\Delta_{22} + \ldots + b_n\Delta_{n2} \\ \vdots \\ b_1\Delta_{1n} + b_2\Delta_{2n} + \ldots + b_n\Delta_{nn} \end{bmatrix}$$

e, portanto, a $n-$upla $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ que é solução do sistema é dada por

$$x_1 = \frac{b_1\Delta_{11} + b_2\Delta_{21} + \ldots + b_n\Delta_{n1}}{\det(A)},$$

$$x_2 = \frac{b_1\Delta_{12} + b_2\Delta_{22} + \ldots + b_n\Delta_{n2}}{\det(A)},$$

$$\vdots$$

$$x_n = \frac{b_1\Delta_{1n} + b_2\Delta_{2n} + \ldots + b_n\Delta_{nn}}{\det(A)}.$$

Recordando que quando calculamos o determinante de matrizes usando o desenvolvimento de Laplace podemos tanto utilizar linhas quanto colunas, sem alterar o valor final do determinante, e observando as fórmulas acima vemos que

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1\,i-1} & a_{1i} & a_{1\,i+1} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2\,i-1} & a_{2i} & a_{2\,i+1} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \ldots & a_{n\,i-1} & a_{ni} & a_{n\,i+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\det(A)};$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1\,i-1} & a_{1i} & a_{1\,i+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2\,i-1} & a_{2i} & a_{2\,i+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{n\,i-1} & a_{ni} & a_{n\,i+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\det(A)};$$

$$\vdots$$

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\,i-1} & b_1 & a_{1\,i+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\,i-1} & b_2 & a_{2\,i+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n\,i-1} & b_n & a_{n\,i+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\det(A)};$$

$$\vdots$$

$$x_n = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\,i-1} & a_{1i} & a_{1\,i+1} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\,i-1} & a_{2i} & a_{2\,i+1} & \dots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n\,i-1} & a_{ni} & a_{n\,i+1} & \dots & b_n \end{vmatrix}}{\det(A)}.$$

Nos numeradores acima aparecem o determinante de uma matriz que é obtida a partir da matriz inicial A substituindo a coluna i pela coluna dos termos independentes para todo $i = 1, 2, \dots, n$. Vejamos alguns exemplos. Primeiro considere o seguinte sistema linear

$$S: \begin{cases} 2x - 3y + 7z = 1 \\ x + 3z = 5 \\ 2y - z = 0. \end{cases}$$

A matriz dos coeficientes é dada por

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

e, portanto,

$$\det(A) = -2\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2(6-7) - 1(0-(-3)) = 2 - 3 = -1.$$

Assim, o sistema é um sistema de Cramer e sua única solução (x, y, z) é dada por

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 5 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{49}{-1} = -49,$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{-9}{-1} = 9,$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{-18}{-1} = 18.$$

Portanto,

$$V = \{(-49, 9, 18)\}.$$

2.4 Exercícios Propostos

1. Dado o sistema $\begin{cases} 3x + 5y = 1 \\ 2x + z = 3 \\ 5x + y - z = 0 \end{cases}$ escreva a matriz ampliada associada ao sistema e reduza-a à forma escada para resolver o sistema original.

2. Encontre todas as soluções do sistema $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 7x_5 = 14 \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 - 2x_4 + 5x_5 = -2 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_5 = -1 \end{cases}$

3. Resolver os seguintes sistemas achando as matrizes ampliadas e as reduzindo à forma escada.

$$\{x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 1 \qquad \begin{cases} x + y + z &= 4 \\ 2x + 5y - 2z &= 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 2y + 3z &= 0 \\ 2x + 5y + 6z &= 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 4 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= -4 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \end{cases}$$

4. Um sistema homogêneo admite pelo menos uma solução? Qual é essa solução. Encontre os valores de k, tais que o sistema homogêneo $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 2x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + kx_3 &= 0 \end{cases}$ tenha uma solução diferente da solução nula.

5. Considere dois sistemas escritos na sua forma matricial: $AX = \mathbb{O}$ e $AX = B$.

   (a) Mostre que se X_0 é solução de $AX = \mathbb{O}$ e X_1 é solução de $AX = B$, então $X_0 + X_1$ é solução de $AX = B$.

   (b) Se X_1 e X_2 são soluções de $AX = B$, então $X_1 - X_2$ é solução de $AX = \mathbb{O}$.

   (c) Usando os dois itens acima, conclua que toda solução de $AX = B$ é a soma de uma solução de $AX = \mathbb{O}$ com uma solução particular de $AX = B$.

6. Resolver os seguinte sistemas usando o método de Cramer.

$$\begin{cases} x - y = 4 \\ x + y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - y + z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$$

7. Determine $m \in \mathbb{R}$ de modo que o sistema $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + 2z = 1 \\ x + 2y + mz = 0 \end{cases}$ seja de Cramer e, depois resolva, se possível, o sistema.

8. Calcule, se possível, a inversa da seguinte matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

9. Resolver o sistema abaixo usando o método de Cramer.

$$\begin{cases} x - y + z + t = 0 \\ x + y - z + t = 1 \\ -x + y + z - t = 0 \\ 2x - y - z + 3t = 1 \end{cases}$$

10. Discuta os sistemas lineares abaixo, dizendo qual o posto da matriz dos coeficientes, qual o posto da matriz ampliada e depois, quando possível, resolva o sistema.

$$S_1 : \begin{cases} 5x - 2y + 2z = 2 \\ 3x + y + 4z = -1 \\ 4x - 3y + z = 3 \end{cases} \qquad S_2 : \begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ x + y - z + 2t = 0 \end{cases} \qquad S_3 : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y - z = 2 \\ 2x + y + z = 3 \end{cases}$$

$$S_4 : \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - y - z = -3 \\ 2x + y + 2z = 1 \\ 3x + 2y + 3z = 3 \end{cases} \qquad S_5 : \begin{cases} 3x + 3y - 2z - t = 2 \\ 5x + 2y + z - 2t = 1 \\ 2x - y + 3z - t = -1 \end{cases} \qquad S_6 : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + 2z = 2 \\ x + 6y + 3z = 3. \end{cases}$$

$$S_7 : \begin{cases} x - 2y - 3z = 0 \\ x + 4y - z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases} \qquad S_8 : \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x + y - 2z + t = 0 \\ 2x + y + 2z - t = 0 \end{cases} \qquad S_9 : \begin{cases} 3x - y + 2z - t = 0 \\ 3x + y + 3z + t = 0 \\ x - y - z - 5t = 0 \end{cases}$$

$$S_{10} : \begin{cases} x + y + z + w - t = 0 \\ x - y - z + 2w - t = 0 \end{cases} \qquad S_{11} : \begin{cases} 4x + 3y - z + t = 0 \\ x - y + 2z - t = 0 \end{cases} \qquad S_{12} : \begin{cases} 3x + 2y - 12z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ 2x - 3y + 5z = 0 \end{cases}$$

11. Discuta os sistemas lineares abaixo, dizendo qual o posto da matriz dos coeficientes, qual o posto da matriz ampliada e depois, quando possível, resolva o sistema.

$$S: \begin{cases} x + 2y - 2z - t = 1 \\ 2x - 2y - 2z - 3t = -1 \\ 2x - 2y - z - 5t = 9 \\ 3x - y + z - mt = 0. \end{cases}$$

12. Determinar os valores de a e b que tornam o sistema

$$S: \begin{cases} 3x - 7y = a \\ x + y = b \\ 5x + 3y = 5a + 2b \\ x + 2y = a + b - 1 \end{cases}$$

compatível determinado. Em seguida resolver o sistema.

13. Discutir os sistemas lineares (em função de a) abaixo.

$$S_1: \begin{cases} x + y - az = 0 \\ ax + y - z = 2 - a \\ x + ay - z = -a \end{cases} \qquad S_2: \begin{cases} ax + 2y = 6 \\ 3x - y = -2 \\ x + y = 0. \end{cases}$$

Capítulo 3

Espaços Vetoriais

Em várias aplicações físicas aparecem quantidades que só podem ser representadas utilizando um conceito matemático chamado vetor, o qual possui direção, sentido e comprimento (módulo). Na disciplina de Geometria Analítica foram estudados os vetores em espaços bidimensionais e em espaços tridimensionais. Em ambos os casos, ao ser considerado o conjunto desses vetores, juntamente com as operações de adição de vetores, e de multiplicaçao de vetores por um escalar, diversas propriedades eram satisfeitas. Por ser de suma importância para o conteúdo deste livro, vamos recordá-las. Temos

$$\vec{u},\ \vec{v} \in \mathbb{R}^2 \Longrightarrow \vec{u} = (u_1, u_2) \ \text{ e } \ \vec{v} = (v_1, v_2), \quad u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathbb{R};$$
$$\vec{u},\ \vec{v} \in \mathbb{R}^3 \Longrightarrow \vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \ \text{ e } \ \vec{v} = (v_1, v_2, v_3), \quad u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}.$$

Definimos a soma de dois vetores como sendo

$$\text{em } \ \mathbb{R}^2; \quad \vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2) \in \mathbb{R}^2$$
$$\text{em } \ \mathbb{R}^3; \quad \vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Tanto em $\mathbb{R}^2$ quanto em $\mathbb{R}^3$ a adição (soma) de vetores satisfaz, para quaisquer vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, as seguintes propriedades abaixo:

$\mathbf{A_1}$. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ (propriedade comutativa);

$\mathbf{A_2}$. $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ (propriedade associativa);

$\mathbf{A_3}$. existe $\vec{0} = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$ ou $\vec{0} = (0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ tal que $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$ para todo vetor $\vec{u}$ (existência do elemento neutro);

A_4. para todo vetor $\vec{u}$ existe um vetor $-\vec{u} = (-u_1, -u_2) \in \mathbb{R}^2$ ou $-\vec{u} = (-u_1, -u_2, -u_3) \in \mathbb{R}^3$ tal que $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$ (existência do elemento oposto).

Definimos a multiplicação de um número real por um vetor como sendo

$$\text{em } \mathbb{R}^2; \quad \alpha\vec{u} = (\alpha u_1, \alpha u_2) \in \mathbb{R}^2$$
$$\text{em } \mathbb{R}^3; \quad \alpha\vec{u} = (\alpha u_1, \alpha u_2, \alpha u_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Tanto em $\mathbb{R}^2$ quanto em $\mathbb{R}^3$ a multiplicação de um número real por um vetor satisfaz, para quaisquer vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e para quaisuer números reais α e β, as seguintes propriedades:

M_1. $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$ (propriedade distributiva);

M_2. $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$ (propriedade distributiva);

M_3. $(\alpha\beta)\vec{u} = \alpha(\beta\vec{u})$;

M_4. $1(\vec{u}) = \vec{u}$.

A partir destes fatos, podemos fazer algumas perguntas:

1. Será que apenas o conjunto dos vetores com essas operações possui estas oito propriedades?

2. Será que apenas nos espaços de dimensão 2 ou de dimensão 3, os vetores satisfazem estas oito propriedades?

Observamos aqui que devemos nos acostumar quando falarmos de espaços de dimensão maior que 3. É certo que o mundo onde vivemos é tridimensional, mas inúmeros são os problemas que podem ser resolvidos utilizando dimensões maiores, conforme veremos nesta disciplina e em várias outras de nosso curso. Ainda, muitos são os cientistas que estudam teorias utilizando espaços com dimensões muito grandes. Outro fato que devemos observar é que iremos utilizar a nomenclatura escalar para denotar número. A palavra escalar no contexto de espaços vetoriais é um elemento de um corpo, que é um conjunto que possui duas operações internas que satisfazem determinadas propriedades. Nesta disciplina estaremos utilizando, na maior parte do tempo, o corpo dos números reais. Porém, em algumas oportunidades faremos uso do número complexo. Muitas vezes mencionaremos o conjunto dos números reais ou o conjunto dos números complexos como um corpo $\mathbb{K}$. Estamos denotando o conjunto do números reais por $\mathbb{R}$ e denotaremos o conjunto dos números complexos por $\mathbb{C}$. Quando dissermos escalar, estamos pensando em um número real ou em um número complexo. Quando formos particularizar o estudo para um desses dois conjuntos, faremos uma observação nesse sentido.

3.1 Definição, Exemplos e Propriedades

Nesta seção vamos definir o conceito de espaços vetoriais, apresentar alguns exemplos de espaços vetoriais que iremos utilizar ao longo da disciplina e mostrar algumas propriedades fundamentais dos espaços vetoriais.

Definição 3.1. *Sejam* V *um conjunto* **não vazio** *e um corpo de escalares* $\mathbb{K}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. *Diremos que* V *é um espaço vetorial sobre* $\mathbb{K}$ *se existirem duas operaçãoes definidas em* V*, a saber:*

- *a adição, que pega dois elementos* $u, v \in V$ *de* V *e associa um único elemento* $u + v \in V$ *de* V;
- *a multiplicação por escalar, que pega um elemento* $k \in \mathbb{K}$ *do corpo* $\mathbb{K}$ *e um elemento* $u \in V$ *de* V *e associa um único elemento* $ku \in V$ *de* V*,*

satisfazendo as seguintes propriedades, para quaisquer $u, v, w \in V$ *e* $k, k_1, k_2 \in \mathbb{K}$:

$\mathbf{A_1}$. $u + v = v + u$ *(propriedade comutativa);*

$\mathbf{A_2}$. $u + (v + w) = (u + v) + w$ *(propriedade associativa);*

$\mathbf{A_3}$. *existe* $0 \in V$ *tal que* $u + 0 = u$ *para todo elemento* $u \in V$ *(existência do elemento neutro);*

$\mathbf{A_4}$. *para todo elemento* $u \in V$, *existe um elemento* $-u \in V$ *tal que* $u+(-u) = 0$ *(existência do elemento oposto);*

$\mathbf{M_1}$. $k(u + v) = ku + kv$ *(propriedade distributiva);*

$\mathbf{M_2}$. $(k_1 + k_2)u = k_1u + k_2u$ *(propriedade distributiva);*

$\mathbf{M_3}$. $(k_1k_2)u = k_1(k_2u)$*;*

$\mathbf{M_4}$. $1(u) = u$.

Segue imediatamente das propriedades $\mathbf{A}_1$ e $\mathbf{A}_2$, que a soma de elementos de um espaço vetorial V, não precisa da utilização de parêntesis e independe da ordem das parcelas.

Pela similaridade com os vetores estudados na Geometria Analítica, os elementos de qualquer espaço vetorial serão, eventualmente, chamados de vetores.

Nesse momento, algumas observações são muito importantes:

1. o elemento neutro $0 \in V$ é um elemento do espaçco vetorial e não o número (real ou complexo) zero;

2. em $\mathbf{M}_2$ no lado esquerdo o símbolo "+"é uma soma de escalares em $\mathbb{K}$ e no lado direito é uma soma de elementos, vetores, em V;

3. da mesma forma em $\mathbf{M}_3$ temos o produto entre dois escalares k_1 e k_2, o produto de escalares (números) por elementos de V : $(k_1k_2)v$, k_2v e $k_1(k_2v)$;

4. as operações são essenciais na definição de um espaço vetorial, como veremos nos exemplos que faremos ainda nesta seção;

5. ao observarmos a definição de espaço vetorial, demos nome, 0, ao elemento neutro para a adição e para cada elemento $x \in V$ demos nome, $-x$, ao elemento oposto de x. Para fazermos isso precisamos necessáriamente saber se esses elementos são únicos. Temos assim o seguinte resultado:

Proposição 3.2. *Seja $(V, +\,, \,.\,)$ um espaço vetorial sobre um corpo ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Então, valem as seguintes propriedades:*

(i) *o elemento neutro $0 \in V$ é único;*

(ii) *para cada $u \in V$, o elemento oposto $-u \in V$ é único.*

Demonstração: Sejam $0^* \in V$ um outro elemento neutro em V. Temos então que

$$u + 0 = u \quad \text{e} \quad u + 0^* = u,$$

para todo $u \in V$. Agora, usando que tanto 0, quanto 0^* são elementos de V temos, usando primeiro que 0^* é um elemento neutro e depois que 0 é outro elemento neutro, que

$$0 = 0 + 0^* = 0^* + 0 = 0^*,$$

provando que $0 = 0^*$ e, mostrando que o elemento neutro é único.

Seja agora $u \in V$ um elemento qualquer em V e suponhamos que exista um outro elemento $\overline{u} \in V$ que também é um elemento oposto de u em V, isto é,

$$u + (-u) = 0 \quad \text{e} \quad u + \overline{u} = 0.$$

Esses fatos juntamente com as propriedades comutativa e associativa implicam que

$$-u = -u + 0 = -u + (u + \overline{u}) = (-u + u) + \overline{u} = (u + (-u)) + \overline{u} = 0 + \overline{u} = \overline{u} + 0 = \overline{u},$$

provando que $-u = \overline{u}$, mostrando que o elemento oposto é único e completando a demonstração desta proposição. ■

Vamos agora apresentar exemplos de espaços vetoriais sobre um corpo de escalares e de conjuntos que não são espaços vetoriais. Como primeiro exemplo, se considerarmos o conjunto

$$V = \mathbb{R}^2 = \{(x, y); \quad x, y \in \mathbb{R}\}$$

munido das operações consideradas no início desse capítulo, aquelas estudadas na disciplina de Geometria Analítica:

$$x + y = (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \in \mathbb{R}^2$$

e

$$kx = k(x_1, x_2) = (kx_1, kx_2) \in \mathbb{R}^2$$

é claramente um espaço vetorial sobre o corpo do números reais, conhecido como o conjunto dos vetores no plano. Da mesma forma, se considerarmos

$$V = \mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3); \quad x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

com as operações definidas no começo deste capítulo e estudadas na disciplina de Geometria Analítica:

$$x + y = (x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) \in \mathbb{R}^3$$

e

$$kx = k(x_1, x_2, x_3) = (kx_1, kx_2, kx_3) \in \mathbb{R}^3,$$

então $\mathbb{R}^3$ é um espaço vetorial sobre o corpo dos números reais, conhecido como o conjunto de vetores no espaço.

Antes de generalizarmos esses dois exemplos para dimensões maiores, vamos apresentar exemplos onde as operações definidas no conjunto V vão implicar que esses conjuntos não sejam espaços vetoriais.

Exemplo 3.3. *Consideremos*

$$V = \mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3); \quad x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

e neste conjunto vamos definir as seguintes operações:

$$x + y = (x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_2, x_2 + y_1, x_3 + y_3)$$

e

$$kx = k(x_1, x_2, x_3) = (kx_1, kx_2, kx_3).$$

Vamos mostrar que com essas operações o conjunto $\mathbb{R}^3$ não é um espaço vetorial.

De fato: Inicialmente observemos que:

- claramente $V = \mathbb{R}^3$ é um conjunto não vazio;
- para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^3$ e $k \in \mathbb{R}$ temos que

$$x + y = (x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_2, x_2 + y_1, x_3 + y_3) \in \mathbb{R}^3$$

  e

$$kx = k(x_1, x_2, x_3) = (kx_1, kx_2, kx_3) \in \mathbb{R}^3,$$

  mostrando que os resultados dessas duas operações são, de fato, elementos em $\mathbb{R}^3$ e, quando isso acontece diremos que as operações são fechadas neste conjunto. Assim, as operações estão bem definidas.

Vamos então verificar se essas duas operações satisfazem as oito condições da Definição 3.1 para que $V = \mathbb{R}^3$ seja um espaço vetorial. Para fazermos isso sejam $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$ e $z = (z_1, z_2, z_3)$ tres elementos em $\mathbb{R}^3$ e $k, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ tres números reais.

1. Verifiquemos se a operação de soma é comutativa. Temos

$$x + y = (x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_2, x_2 + y_1, x_3 + y_3)$$

e

$$y + x = (y_1, y_2, y_3) + (x_1, x_2, x_3) = (y_1 + x_2, y_2 + x_1, y_3 + x_3).$$

Observemos que na terceira coordenada, usando que a soma de números reais é comutativa, obtemos que

$$x_3 + y_3 = y_3 + x_3.$$

Porém nas duas primeiras coordenadas teremos problemas, pois se

$$x_1 \neq y_1 \quad \text{ou} \quad x_2 \neq y_2,$$

não poderemos verificar as seguintes igualdades

$$x_1 + y_2 = y_1 + x_2$$

e

$$x_2 + y_1 = y_2 + x_1.$$

Por exemplo, se tomarmos $x = (1, 2, 3)$ $y = (1, 5, 6)$ teremos que

$$x + y = (1, 2, 3) + (1, 5, 6) = (1 + 5, 2 + 1, 3 + 6) = (6, 3, 9)$$

e, por outro lado,

$$y + x = (1, 5, 6) + (1, 2, 3) = (1 + 2, 5 + 1, 6 + 3) = (3, 6, 9).$$

E, portanto, $x + y \neq y + x$.

Como a adição definida acima não satisfez a propriedade $\mathbf{A}_1$, então $V = \mathbb{R}^3$ com as operações definidas neste exemplo não será um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. $\square$

Antes de apresentarmos o próximo exemplo, observemos que no exemplo anterior quando mudamos uma das operações, o conjunto $\mathbb{R}^3$ deixou de ser um espaço vetorial sobre o corpo dos números reais.

Ainda, como a adição não satisfez a primeira propriedade exigida na Definição 3.1, nem precisamos verificar as outras sete propriedades exigidas.

É muito importante observarmos que para mostrarmos uma determinanda propriedade precisamos utilizar um elemento genérico qualquer e não apenas alguns elementos particulares, enquanto que para mostar que uma determinada propriedade não é válida precisamos necessariamente apresentar elementos do conjunto que não satisfazem essa propriedade, ou seja, precisamos apresentar um **contra-exemplo**. Vejamos o próximo exemplo:

Exemplo 3.4. *Consideremos*

$$V = \mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2); \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$$

e neste conjunto vamos definir as seguintes operações:

$$x + y = (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

e

$$kx = k(x_1, x_2) = (kx_1, 0).$$

Vamos mostrar que com essas operações o conjunto $\mathbb{R}^2$ *não é um espaço vetorial.*

De fato: Inicialmente observemos que:

- claramente $V = \mathbb{R}^2$ é um conjunto não vazio;
- para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^2$ e $k \in \mathbb{R}$ temos que

  $$x + y = (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \in \mathbb{R}^2$$

  e

  $$kx = k(x_1, x_2) = (kx_1, 0) \in \mathbb{R}^2,$$

  mostrando que os resultados dessas duas operações são, de fato, elementos em $\mathbb{R}^2$, ou seja, essas operações são fechadas em $\mathbb{R}^2$. Assim, as operações estão bem definidas.

Vamos então verificar se essas duas operações satisfazem as oito condições da Definição 3.1 para que $V = \mathbb{R}^2$ seja um espaço vetorial. Como a operação de soma de vetores é a mesma utilizada para vetores na disciplina de Geometria Analítica e já lembrada no começo deste capítulo, temos que a adição satisfaz as propriedades **$\mathbf{A_1}$.**, **$\mathbf{A_2}$.**, **$\mathbf{A_3}$.** e **$\mathbf{A_4}$.**. Sejam então $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ dois elementos em $\mathbb{R}^2$ e $k, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ tres escalares reais.

1. Usando a definição de multiplicação por escalar, a distributividade de números reais e a definição de adição, temos que

$$\begin{aligned}
(k_1 + k_2)x &= (k_1 + k_2)(x_1, x_2) \\
&= ((k_1 + k_2)x_1, 0) \\
&= (k_1x + k_2x_1, 0) \\
&= (k_1x_1, 0) + (k_2x_1, 0) \\
&= k_1(x_1, x_2) + k_2(x_1, x_2) \\
&= k_1x + k_2x,
\end{aligned}$$

mostrando a propriedade **$\mathbf{M_1}$.**;

2. novamente, usando a definição de multiplicação por escalar, a distributividade de números reais e a definição de adição, temos que

$$\begin{aligned}
k(x + y) &= k((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) \\
&= k(x_1 + y_1, x_2 + y_2) \\
&= (k(x_1 + y_1), 0) \\
&= (kx_1 + ky_1, 0) \\
&= (kx_1, 0) + (ky_1, 0) \\
&= k(x_1, x_2) + k(y_1, y_2) \\
&= kx + ky,
\end{aligned}$$

mostrando a propriedade **$\mathbf{M_2}$.**;

3. usando a definição de multiplicação por escalar e a associatividade de números reais, temos que

$$\begin{aligned}(k_1k_2)x &= (k_1k_2)(x_1, x_2)\\ &= ((k_1k_2)x_1, 0)\\ &= (k_1(k_2x_1), 0)\\ &= k_1(k_2x_1, 0)\\ &= k_1(k_2(x_1, x_2))\\ &= k_1(k_2x),\end{aligned}$$

mostrando a propriedade $\mathbf{M_3}$.;

4. considerando $k = 1 \in \mathbb{R}$ temos que

$$1x = 1(x_1, x_2) = (1x_1, 0) = (x_1, 0).$$

Observando a fórmula acima vemos que $1x = x$ se, e somente se, $x_2 = 0$. Assim, tomando $(1, 2) \in \mathbb{R}^2$ teremos que

$$1x = 1(1, 2) = (1 \,.\, 1, 0) = (1, 0) \neq (1, 2),$$

mostrando a propriedade $\mathbf{M_4}$. não está satisfeita.

Portanto, como a propriedade $\mathbf{M_4}$. não está satisfeita obtemos que o conjunto $\mathbb{R}^2$, munido das operações definidas para este exemplo, não é um espaço vetorial sobre o corpo dos números reais. □

O exemplo anterior, mostra que apesar de não satisfazer apenas a última condição, o conjunto apresentado não é um espaço vetorial. Ressaltando de novo que para mostrarmos que a última condição não estava satisfeita foi preciso apresentar um **contra exemplo**, enquanto que para mostrar as demais propriedades trabalhamos com elementos genéricos quaisquer do conjunto $\mathbb{R}^2$.

Exemplo 3.5. *Consideremos o conjunto bidimensional*

$$V = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$$

munido das seguintes operações:

$$x + y = (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1y_1 - x_2y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$$

e

$$kx = k(x_1, x_2) = (kx_1, kx_2).$$

Vamos mostrar que com essas operações o conjunto V não é um espaço vetorial sobre o corpo dos números reais.

De fato: Primeiramente observemos que $(1, 1) \in V = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ e, portanto, $V \neq \emptyset$.

Agora tomando $k = 0 \in \mathbb{R}$ temos, para todo $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, que

$$0x = 0(x_1, x_2) = (0x_1, 0x_2) = (0, 0) \notin \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\},$$

mostrando que a multiplicação por escalar não é uma operação bem definida em $V = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, pois ela não é fechada neste conjunto, isto é, tomando $(1, 1) \in V = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, temos que

$$0(1, 1) = (0\,1 0\,1) = (0, 0) \notin \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$$

e, portanto, $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ não pode ser um espaço vetorial sobre o corpo dos números reais. Nem precisamos checar se as demais propriedades estão satisfeitas.

Para se familiarizar com a definição de espaço vetorial, o leitor deve verificar se as demais condições exigidas na Definição 3.1 estão satisfeitas para esse caso. Uma verificação dessa propriedade se encontra feita no livro texto. $\square$

O exemplo anterior nos diz que precisamos tomar cuidado e ler com atenção o que estamos nos propondo a fazer, pois essa leitura com atenção nos poupa tempo e evita de cometermos erros bobos. Novamente, nos três exemplos anteriores, para mostrar que uma determinada propriedade não está satisfeita, foi necessário a apresentação de um **contra-exemplo**.

Vamos agora apresentar um exemplo que generaliza, para dimensões maiores, o conjunto de vetores no plano e no espaço vistos na disciplina de Geometria Analítica e relembrado no começo deste capítulo. Para os próximos exemplos vamos mostrar que conjuntos munidos de determinadas operações são de fato espaços vetoriais sobre o corpo dos números reais e para isso não podemos, de forma alguma, particularizar o elementos que estamos utilizando, precisamos necessáriamente verificar a propriedade em questão para elementos genéricos do conjunto que estamos trabalhando.

Exemplo 3.6. *Vamos construir o conjunto*

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R},$$

no qual, qualquer um de seus elementos são $n-$uplas ordenadas de números reais da forma

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n),$$

onde $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ são números reais. Daremos a esses elementos, por analogia ao $\mathbb{R}^2$ e ao $\mathbb{R}^3$, o nome de vetor, e aos termos $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ o nome de coordenadas do vetor. Vamos nos referir a essas coordenadas, respectivamente, como 1^a coordenada, 2^a coordenada, 3^a coordenada e assim sucessivamente até a $n-$ésima coordenada. Neste conjunto, introduzimos duas operações, de adição e de multiplicação por escalar, como definimos para $n = 2$ e $n = 3$, a saber: $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots, y_n)$ e $k \in \mathbb{R}$, então definimos

$$x + y = (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

e

$$kx = k(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n) = (kx_1, kx_2, kx_3, kx_4, \ldots, kx_n).$$

Com essas operações o conjunto $\mathbb{R}^n$ é um espaço vetorial real denominado espaço euclideano de dimensão n.

De fato: Para fazermos isso, inicialmente observemos que $\mathbb{R}^n$ é trivialmente um conjunto não vazio, e que $x + y$ e kx são $n-$uplas ordenadas de números reais e, portanto, são vetores de $\mathbb{R}^n$, ou seja, as operações de adição e multiplicação por escalar são fechadas em $\mathbb{R}^n$. Para finalizarmos nossa verificação, devemos mostrar que as operações satisfazem as oito propriedades exigidas na Definição 3.1. Sejam então

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \text{ e } z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$$

tres elementos (vetores) quaisquer de $\mathbb{R}^n$ e k, k_1, k_2 tres escalares quaisquer de $\mathbb{R}$. Temos:

$\mathbf{A_1}$. usando que as coordenadas dos vetores são número reais e que a adição de números reais é comutativa obtemos que

$$\begin{aligned}
x + y &= (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) \\
&= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) \\
&= (y_1 + x_1, y_2 + x_2, \ldots, y_n + x_n) \\
&= y + x,
\end{aligned}$$

mostrando que a adição é comutativa em $\mathbb{R}^n$ e mostrando a propriedade $\mathbf{A_1}$.;

$\mathbf{A_2}$. usando que as coordenadas dos vetores são número reais e que a adição de números reais é associativa obtemos que

$$\begin{aligned}
(x + y) + z &= ((x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n)) + (z_1, z_2, \ldots, z_n) \\
&= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) + (z_1, z_2, \ldots, z_n) \\
&= ((x_1 + y_1) + z_1, (x_2 + y_2) + z_2, \ldots, (x_n + y_n) + z_n) \\
&= (x_1 + (y_1 + z_1), x_2 + (y_2 + z_2), \ldots, x_n + (y_n + z_n)) \\
&= (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1 + z_1, y_2 + z_2, \ldots, y_n + z_n) \\
&= (x_1, x_2, \ldots, x_n) + ((y_1, y_2, \ldots, y_n) + (z_1, z_2, \ldots, z_n)) \\
&= x + (y + z),
\end{aligned}$$

mostrando que a adição é associativa em $\mathbb{R}^n$ e mostrando a propriedade $\mathbf{A_2}$.;

$\mathbf{A_3}$. queremos encontrar $0 = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n) \in \mathbb{R}^n$, onde cada $\theta_i \in \mathbb{R}$ para $i = 1, 2, \ldots, n$, de tal forma que

$$x + 0 = x,$$

para qualquer $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, ou seja,

$$\begin{aligned}
x + 0 = x \Longleftrightarrow\ & (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n) = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \\
\Longleftrightarrow\ & (x_1 + \theta_1, x_2 + \theta_2, \ldots, x_n + \theta_n) = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \\
\Longleftrightarrow\ & \begin{cases} x_1 + \theta_1 = x_1 \\ x_2 + \theta_2 = x_2 \\ \vdots \\ x_n + \theta_n = x_n \end{cases} \\
\Longleftrightarrow\ & \begin{cases} \theta_1 = x_1 - x_1 = 0 \\ \theta_2 = x_2 - x_2 = 0 \\ \vdots \\ \theta_n = x_n - x_n = 0 \end{cases} \\
\Longleftrightarrow\ & 0 = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n) = (0, 0, \ldots, 0).
\end{aligned}$$

Assim, $0 = (0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$ é tal que

$$x + 0 = (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (0, 0, \ldots, 0) = (x_1 + 0, x_2 + 0, \ldots, x_n + 0) = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = x,$$

mostrando a propriedade $\mathbf{A_3}$.;

$\mathbf{A_4}$. para todo $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, considerando $-x = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$ que também é um elemento (vetor) em $\mathbb{R}^n$ temos que

$$\begin{aligned}
x + (-x) &= (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n) \\
&= (x_1 + (-x_1), x_2 + (-x_2), \ldots, x_n + (-x_n)) \\
&= (0, 0, \ldots, 0) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

mostrando que $-x = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n) \in \mathbb{R}^n$ é o oposto de $x \in \mathbb{R}^n$ e, provando a propriedade $\mathbf{A_4}$.;

$\mathbf{M_1}$. usando a propriedade distributiva de números reais temos que

$$\begin{aligned} k(x+y) &= k((x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n)) \\ &= k(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) \\ &= (k(x_1 + y_1), k(x_2 + y_2), \ldots, k(x_n + y_n)) \\ &= (kx_1 + ky_1, kx_2 + ky_2, \ldots, kx_n + ky_n) \\ &= (kx_1, kx_2, \ldots, kx_n) + (ky_1, ky_2, \ldots, ky_n) \\ &= k(x_1, x_2, \ldots, x_n) + k(y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ &= kx + ky, \end{aligned}$$

provando a propriedade $\mathbf{M_1}$.;

$\mathbf{M_2}$. usando novamente a propriedade distributiva de números reais temos que

$$\begin{aligned} (k_1 + k_2)x &= (k_1 + k_2)(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &= ((k_1 + k_2)x_1, (k_1 + k_2)x_2, \ldots, (k_1 + k_2)x_n) \\ &= (k_1x_1 + k_2x_1, k_1x_2 + k_2x_2, \ldots, k_1x_n + k_2x_n) \\ &= (k_1x_1, k_1x_2, \ldots, k_1x_n) + (k_2x_1, k_2x_2, \ldots, k_2x_n) \\ &= k_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) + k_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &= k_1x + k_2x, \end{aligned}$$

provando a propriedade $\mathbf{M_2}$.;

$\mathbf{M_3}$. usando a associatividade de números reais temos que

$$\begin{aligned} (k_1k_2)(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= ((k_1k_2)x_1, (k_1k_2)x_2, \ldots, (k_1k_2)x_n) \\ &= (k_1(k_2x_1), k_1(k_2x_2), \ldots, k_1(k_2x_n)) \\ &= k_1(k_2x_1, k_2x_2, \ldots, k_2x_n) \\ &= k_1(k_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)) \\ &= k_1(k_2x), \end{aligned}$$

provando a propriedade $\mathbf{M_3}$.;

$\mathbf{M_4}$. usando que $1 \in \mathbb{R}$ temos que

$$1(x) = 1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (1\,x_1, 1\,x_2, \ldots, 1\,x_n) = (x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

provando a propriedade $\mathbf{M_4}$..

Portanto o conjunto $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n); \;\; x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$ com as operações acima é um espaço vetorial sobre o corpo dos números reais, denominado doravante de espaço euclideano $n-$dimensional. $\square$

Exemplo 3.7. *Seja V o conjunto de todas as matrizes de ordem $m \times n$, cujos elementos pertencem a um corpo de escalares $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Considerando em V as operações de adição de matrizes e multiplicação de uma matriz por um escalar, estudadas no capítulo anterior, temos que V é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$. Para simplificidade estaremos assumindo sempre que o corpo de escalares é $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e, a partir de agora, denotaremos esse espaço vetorial por $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.*

De fato: Como estudamos com alguns detalhes as operações com matrizes no capítulo anterior não demonstraremos aqui que $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ com as operações usuais satisfaz as condições para ser um espaço vetorial sobre o corpo de escalares $\mathbb{R}$. Só recordemos que a matriz nula

$$\mathbb{O}_{m\times n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

de ordem $m \times n$ é o elemento neutro da adição de matrizes. E para toda matriz $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ dada por

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

a matriz oposta, $-A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, de A é dada por

$$-A = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \dots & -a_{mn} \end{bmatrix}.$$

□

Como último exemplo apresentaremos agora um exemplo de espaço vetorial que, conforme veremos mais adiante, será um espaço vetorial com dimensão infinita.

Exemplo 3.8. *Sejam A um conjunto qualquer, não vazio, e $\mathbb{R}$ o corpo dos números reais. Considere o conjunto F de todas as funções que tem como domínio o conjunto A e como contradomínio o conjunto $\mathbb{R}$, ou seja,*

$$F := \{f : A \to \mathbb{R}; \quad f \quad \text{é uma função}\}.$$

Vamos definir a operação de adição de elementos de F do seguinte modo, se $f, g \in F$ são duas funções em F, definimos a soma dessas duas funções como sendo a função $f + g$ definida da seguinte maneira:

$$f + g : A \to \mathbb{R}$$

e para todo $x \in A$,

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

Para definirmos a operação de multiplicação por um escalar, sejam $f \in F$ uma função e $k \in \mathbb{R}$. Definimos o produto de k por f, como sendo a função em F, kf definida da seguinte maneira:

$$kf : A \to \mathbb{R}$$

e para todo $a \in A$,

$$(kf)(x) = k\ f(x).$$

O conjunto de funções F munido dessas duas operações é um espaço vetorial sobre o corpo dos números reais.

De fato: Primeiro observermos que como A é um conjunto não vazio, então A pode ser domínio de funções. Definindo $\overline{f} : A \to \mathbb{R}$ por

$$\overline{f}(x) = 1$$

para todo $x \in A$, temos que $\overline{f} \in F$ é uma função em F e, portanto, $F \neq \emptyset$. Ainda, pela própria construção de $f+g$ e kf, estes elementos são funções em F. Assim, para que F seja um espaço vetorial, devemos mostrar que as oito propriedades da Definição 3.1, são verdadeiras. Sejam então $f, g, h : A \to \mathbb{R}$ tres funções em F e $k, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ tres números reais. Temos:

$\mathbf{A_1}$. usando a comutatividade de números reais obtemos que

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g+f)(x),$$

para todo $x \in A$, mostrando que $f + g = g + f$, ou seja, mostrando que a adição de funções é comutativa em F e mostrando a propriedade $\mathbf{A_1}$.;

$\mathbf{A_2}$. usando a associatividade de números reais temos que

$$\begin{aligned}((f+g)+h)(x) &= (f+g)(x) + h(x)\\ &= (f(x)+g(x)) + h(x)\\ &= f(x) + (g(x)+h(x))\\ &= f(x) + ((g+h)(x))\\ &= (f+(g+h))(x),\end{aligned}$$

para todo $x \in A$, mostrando que $(f+g)+h = f+(g+h)$, ou seja, mostrando que a adição de funções é associativa e provando a propriedade $\mathbf{A_2}$.;

$\mathbf{A_3}$. definamos a função constante igual a zero $\mathbb{O} : A \to \mathbb{R}$ por

$$\mathbb{O}(x) = 0,$$

para todo $x \in A$. Temos que $\mathbb{O} \in F$ e para toda $f \in F$ temos então que

$$(f+\mathbb{O})(x) = f(x) + \mathbb{O}(x) = f(x) + 0 = f(x),$$

ou seja, $f + \mathbb{O} = f$, para toda $f \in F$, mostrando que a função constante igual a zero é o elemento neutro da adição de funções e provando a propriedade $\mathbf{A_3}$.;

$\mathbf{A_4}$. para cada $f \in F$ definamos $-f : A \to \mathbb{R}$ por

$$(-f)(x) = -f(x),$$

para todo $x \in A$. Temos assim que

$$(f + (-f))(x) = f(x) + (-f)(x) = f(x) + (-f(x)) = f(x) - f(x) = 0 = \mathbb{O}(x),$$

para todo $x \in A$, mostrando que $-f \in F$ é a função oposta de $f \in F$ e, provando a propriedade $\mathbf{A_4}$.;

$\mathbf{M_1}$. usando a propriedade distributiva de números reais temos que

$$(k(f+g))(x) = k((f+g)(x)) = k(f(x)+g(x)) = kf(x)+kg(x) = (kf)(x)+(kg)(x) = (kf+kg)(x),$$

para todo $x \in A$. Portanto, $k(f + g) = kf + kg$, provando a propriedade $\mathbf{M_1}$.;

$\mathbf{M_2}$. usando a propriedade distributiva de números reais temos que

$$((k_1 + k_2)f)(x) = (k_1 + k_2)f(x) = k_1 f(x) + k_2 f(x) = (k_1 f)(x) + (k_2 f)(x) = (k_1 f + k_2 f)(x),$$

para todo $x \in A$. Portanto, $(k_1 + k_2)f = k_1 f + k_2 f$, provando a propriedade $\mathbf{M_2}$.;

$\mathbf{M_3}$. usando a associatividade de números reais temos que

$$((k_1 k_2)f)(x) = (k_1 k_2)f(x) = k_1(k_2 f(x)) = k_1((k_2 f)(x)) = (k_1(k_2 f))(x),$$

para todo $x \in A$. Portanto, $(k_1 k_2)f = k_1(k_2 f)$, provando a propriedade $\mathbf{M_3}$.;

$\mathbf{M_4}$. usando que $1 \in \mathbb{R}$ temos que

$$(1f)(x) = 1f(x) = f(x),$$

para todo $x \in A$. Portanto, $1f = f$, provando a propriedade $\mathbf{M_4}$..

Portanto o conjunto F das funções de A em $\mathbb{R}$ com as operações usuais de soma e multiplicação de um número por uma função é um espaço vetorial sobre o corpo dos números reais. $\square$

Para finalizar esta seção vamos mostrar algumas propriedades adicionais dos espaços vetoriais que nos serão úteis ao longo desta disciplinas. Para facilitar o entendimento no próximo resultado vamos chamar de 0_V o elemento neutro do espaço vetorial V.

Proposição 3.9. *Seja $(V, +, .)$ um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{R}$ (ou sobre $\mathbb{C}$). Então valem as seguintes propriedades:*

(i) *se $u, v, w \in V$ são tais que $u + w = v + w$, então $u = v$ (lei do cancelamento da adição);*

(ii) *para todo $v \in V$ temos que $0\,v = 0_V$;*

(iii) *para todo $k \in \mathbb{R}$ temos que $k0_V = 0$;*

(iv) *se $k \in \mathbb{R}$ e $v \in V$ são tais que $kv = 0_V$, então devemos ter que $k = 0$ ou $v = 0_V$;*

(v) *para todo $v \in V$, temos que $(-1)v = -v$.*

Demonstração: Sejam $u, v, w \in V$ tai que

$$u + w = v + w,$$

então adicionando $-w \in V$, o inverso de $w \in V$ em ambos os lados da igualdade obtemos que

$$(u+w)+(-w) = (v+w)+(-w) \implies u+(w+(-w)) = u+(w+(-w)) \implies u+0_V = v+0_V \implies u = v,$$

provando o item **(i).**

Para o item **(ii)** observemos que

$$0_V + 0\,v = 0\,v = (0 + 0)v = 0\,v + 0\,v$$

e, usando o item **(i)**, com $w = 0\,v$, obtemos que

$$0_V = 0\,v,$$

provando o item **(ii)**.

O item **(iii)** prova-se da mesma maneira que o item **(ii)** e fica como exercício a sua demonstração.

Para provarmos o item **(iv)** suponnhamos que $kv = 0_V$ para $k \in \mathbb{R}$ e $v \in V$ e que $k \neq 0$. Devemos mostrar, necessariamente, que $v = 0_V$. Já que $k \neq 0$, então o item **(iii)** implica que

$$0_v = \frac{1}{k}(0_v) = \frac{1}{k}(kv) = (\frac{1}{k}\ k)v = v,$$

provando que $v = 0_V$ e mostrando o item **(iv)**.

Finalmente, a propriedade $\mathbf{M}_4$ da definição de espaço vetorial e a propriedade distributiva implicam que

$$v + (-1)v = 1\,v + (-1)v = (1 + (-1))v = 0v = 0_V.$$

Logo, como o oposto de um elemento de V é único concluímos que

$$-v = (-1)v,$$

provando **(v)** e completando a prova da proposição ■

3.2 Subespaços Vetoriais

Como vimos na seção anterior, para mostrarmos que um determinado conjunto não vazio, munido de duas operações fechadas neste conjunto é, um espaço vetorial sobre o corpo dos números reais (ou sobre o corpo dos números complexos) precisamos verificar que essas operações satisfazem oito propriedades. O objetivo dessa seção é utilizar os espaços vetoriais já conhecidos para construir, de uma forma mais rápida, novos espaços vetoriais.

Definição 3.10. *Sejam V um espaço vetorial sobre um corpo de escalares $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) e U um subconjunto de V. Diremos que U é um subespaço vetorial de V se U, munido das operações de adição e multiplicação por escalar definidas em V, for um espaço vetorial sobre o mesmo corpo de escalares $\mathbb{K}$.*

Antes começarmos a apresentar exemplos vamos demonstrar um resultado que exibe um critério bastante simples para verificar quando determinados conjuntos são subespaços vetoriais de espaços vetoriais já conhecidos.

Teorema 3.11. *Sejam V um espaço vetorial sobre um corpo de escalares $\mathbb{K}$ e U um subconjunto de V. Então, U é um subespaço vetorial de V se, e somente se, as seguintes condições estão satisfeitas:*

(i) $U \neq \emptyset$;

(ii) *se* $u_1, u_2 \in U$, *então* $u_1 + u_2 \in U$;

(iii) *se* $u \in U$ *e* $k \in \mathbb{K}$*, então* $ku \in U$.

Demonstração: Antes de iniciarmos a demonstração deste resultado, devemos observar que as operações que aparecem tanto no item **(ii)**, quanto no item **(iii)** são as operações do espaço vetorial V e dessa forma U será um espaço vetorial sobre o mesmo corpo $\mathbb{K}$ e munido das mesmas operações de V.

($\Longrightarrow$) Suponhamos, nesse caso, que U seja um subespaço vetorial de V. Assim, a definição de subespaço vetorial implica que U é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$ com as operações de adição e multiplicação por escalar de V. Desta forma, segue imediatamente que $U \neq \emptyset$ e que as operações de adição e multiplicação por escalar são fechadas em U, provando os itens **(i), (ii)** e **(iii)**.

($\Longleftarrow$) Suponhamos agora que U seja um subconjunto do espaço vetorial V satisfazendo as condições **(i), (ii)** e **(iii)** deste teorema. Vamos mostrar que U munido das operações de adição e multiplicação por escalar de V é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$.

O item **(i)** implica que $U \neq \emptyset$ e os itens **(ii)** e **(iii)** implicam que as operações de adição e multiplicação por escalar são fechadas em U e, portanto, estão bem definidas em U. Vamos agora mostrar que essas operações satisfazem as oito propriedades exigidas para um conjunto ser um espaço vetorial, Definição 3.1.

As propriedades $\mathbf{A_1}$., $\mathbf{A_2}$., $\mathbf{M_1}$., $\mathbf{M_2}$., $\mathbf{M_3}$. e $\mathbf{M_4}$. são imediatamente satisfeitas pois todo elemento de U é um elemento de V e no espaço vetorial V essas propriedades estão satisfeitas.

Para mostramos a propriedade $\mathbf{A_3}$., observemos que como $U \neq \emptyset$, então existe $u_0 \in U \subset V$ e, portanto, o item **(iii)** deste teorema e o item **(ii)** da Proposição 3.9 implicam que

$$0 = 0u_0 \in U$$

e para todo $u \in U$, usando que $u \in U \subset V$ e 0 é o elemento neutro para a adição em V, obtemos que

$$u + 0 = u,$$

mostrando que o elemento neutro 0 de V também é o elemento neutro da adição em U, provando $\mathbf{A_3}$..

Para mostramos a propriedade $\mathbf{A_4}$., seja $u \in U$. Então $u \in V$ e, portanto, existe $-u \in V$ tal que

$$u + (-u) = 0.$$

Usando o item **(v)** da Proposição 3.9 e o item **(iii)** deste teorema implicam que

$$-u = (-1)u \in U$$

e, portanto, para cada $u \in U$ existe $-u \in U$ tal que

$$u + (-u) = 0,$$

provando o item $\mathbf{A_4}$. e completando a prova deste teorema. ■

Observemos que os itens **(ii)** e **(iii)** nos dizem que as operações de adição e multiplicação por escalar definidas no espaço vetorial V são fechadas no subespaço vetorial U. Ainda mais, o item **(iii)** do teorema anterior e o item **(ii)** da Proposição 3.9 implicam que se U for um subespaço vetorial de V, então necessariamente devemos ter que o elemento neutro de V deve necessariamente pertencer ao subespaço U. Assim, quando formos mostrar que um conjunto U, candidato a subespaço vetorial de V, é não vazio sempre tentamos mostrar que $0 \in U$ e, se conseguirmos provar que $0 \notin U$, então esse conjunto U não será subespaço vetorial de V.

Antes de apresentarmos alguns exemplos de conjuntos que são subespaços vetoriais de espaços vetoriais já conhecidos, consideremos incialmente V um espaço vetorial qualquer sobre um corpo de escalares $\mathbb{K}$, então os conjuntos

$$U_1 = \{0\} \quad \text{e} \quad U_2 = V$$

são subespaços vetoriais de V denominados **subespaços triviais** de V. Que $U_2 = V$ é um subespaço vetorial dele mesmo segue imediatamente da definição de subespaço vetorial. Para mostrarmos que U_1 é um subespaço vetorial de V observemos que

- como $0 \in U_1$, então $U_1 \neq \emptyset$;

- se $u, v \in U_1$, então $u = v = 0$ e, portanto,

$$u + v = 0 + 0 = 0 \in U_1;$$

- se $k \in \mathbb{K}$ e $u \in U_1$, então $u = 0$ e o item **(ii)** da Proposição 3.9 implica que

$$ku = k0 = 0 \in U_1.$$

Com os tres itens acima, o Teorema 3.11 implica que U_1 é um subespaço vetorial de V.

Exemplo 3.12. *Seja $V = \mathbb{R}^2$ o espaço euclideano bidimensional, isto é, o espaço vetorial bidimensional munido das operações usuais vistas no Exemplo 3.6. Consideremos*

$$U_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2;\ x_1 = 0\},$$

que é uma reta, no espaço bidimensional, contida no eixo Oy e,

$$U_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2;\ x_2 = 0\},$$

que é uma reta, também no espaço bidimensional, contida no eixo Ox. Então U_1 e U_2 são subespaços vetoriais de $V = \mathbb{R}^2$.

De fato: Como $(0, 0) \in U_1$, então

- $U_1 \neq \emptyset$.

Sejam agora $u, v \in U_1$ e $k \in \mathbb{R}$. Como $u \in U_1$ temos que

$$u = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ \text{ e } \ x_1 = 0 \Longrightarrow u = (0, x_2).$$

Também, como $v \in U_1$ temos que

$$v = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \ \text{ e } \ y_1 = 0 \Longrightarrow v = (0, y_2).$$

Logo,

- $u + v = (0, x_2) + (0, y_2) = (0 + 0, x_2 + y_2) = (0, y_1 + y_2)$, ou seja, $u + v \in U_1$;
- $ku = k(0, x_2) = (k0, kx_2) = (0, kx_2)$, ou seja, $ku \in U_1$.

Portanto, concluímos que U_1 é um subespaço vetorial do espaço euclideano bidimensional $\mathbb{R}^2$.

Para U_2 temos novamente que $(0, 0) \in U_2$, então

- $U_2 \neq \emptyset$.

Sejam agora $u, v \in U_2$ e $k \in \mathbb{R}$. Como $u \in U_2$ temos que

$$u = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ \text{ e } \ x_2 = 0 \Longrightarrow u = (x_1, 0).$$

Também, como $v \in U_2$ temos que

$$v = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \ \text{ e } \ y_2 = 0 \Longrightarrow v = (y_1, 0).$$

Logo,

- $u + v = (x_1, 0) + (y_1, 0) = (x_1 + y_1, 0 + 0) = (x_1 + y_1, 0)$, ou seja, $u + v \in U_2$;
- $ku = k(x_1, 0) = (kx_1, k0) = (kx_1, 0)$, ou seja, $ku \in U_2$.

Portanto, concluímos que U_2 é um subespaço vetorial do espaço euclideano bidimensional $\mathbb{R}^2$ e completamos o exemplo. $\square$

Exemplo 3.13. *Seja $V = \mathbb{R}^3$ o espaço euclideano tridimensional, isto é, o espaço vetorial tridimensional munido das operações usuais vistas no Exemplo 3.6 e consideremos*

$$U = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3;\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0\},$$

que é um plano, no espaço tridimensional, passando pela origem. Então U é subespaço vetorial de $V = \mathbb{R}^3$.

De fato: Como $(0, 0, 0) \in U$, então

- $U \neq \emptyset$.

Sejam agora $u, v \in U$ e $k \in \mathbb{R}$. Como $u \in U$ temos que

$$u = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ \text{ e } \ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0.$$

Também, como $v \in U$ temos que

$$v = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 \ \text{ e } \ y_1 + 2y_2 + y_3 = 0.$$

Logo,

- $u+v=(x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3)$ e

$$\begin{aligned}(x_1+y_1)+2(x_2+y_2)+(x_3+y_3) &= (x_1+y_1)+(2x_2+2y_2)+(x_3+y_3)\\ &= (x_1+2x_2+x_3)+(y_1+2y_2+y_3)\\ &= 0+0\\ &= 0,\end{aligned}$$

ou seja, $u+v \in U$;

- $ku = k(x_1, x_2, x_3) = (kx_1, kx_2, kx_3)$ e

$$(kx_1)+2(kx_2)+(kx_3) = k(x_1+2x_2+x_3) = k(0) = 0,$$

ou seja, $ku \in U$.

Portanto, concluímos que U é um subespaço vetorial do espaço euclideano tridimensional $\mathbb{R}^3$ e completando o exemplo. □

Exemplo 3.14. *Seja $V = \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ o espaço vetorial das matrizes quadradas de ordem 2×2, munido das operações usuais de adição de matrizes e de multiplicação de uma matriz por um escalar. Consideremos*

$$U_1 = \{A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R});\ \ A \ \ \textit{é uma matriz simétrica}\ \}$$

e

$$U_2 = \{A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R});\quad b = c = 0\},$$

que é o cojunto das matrizes diagonais de ordem 2×2. Então U_1 e U_2 são subespaço vetoriais de $V = \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$.

De fato: Como a matriz nula de ordem 2×2

$$\mathbb{O}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

que é o elemento neutro do espaço vetorial real $\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \equiv \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ das matrizes quadradas de ordem 2×2, é uma matriz simétrica, então

- $U_1 \neq \emptyset$.

Sejam agora $A, B \in U_1$ e $k \in \mathbb{R}$. Como $A, B \in U_1$ então A e B são matrizes simétricas e, portanto, temos que

$$A^t = A \ \text{ e } \ B^t = B.$$

Logo,

- $(A+B)^t = A^t + B^t = A + B$, ou seja, $A+B$ é uma matriz simétrica e, portanto, $A+B \in U_1$;

- $(kA)^t = k(A)^t = kA$, ou seja, kA é uma matriz simétrica e, portanto, $kA \in U_1$.

Assim, concluímos que U_1 é um subespaço vetorial de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ o espaço das matrizes quadradas de ordem 2×2.

Para o subconjunto U_2, o elemento neutro do espaço vetorial real $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ é

$$\mathbb{O}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

que claramente é matriz diagonal e, portanto, é um elemento de U_2, então

- $U_2 \neq \emptyset$.

Sejam agora $A, B \in U_2$ e $k \in \mathbb{R}$. Como $A, B \in U_2$ então devemos ter

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad \text{com} \quad a_{12} = a_{21} = 0,$$

ou seja,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}$$

que é uma matriz diagonal. Também,

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}, \quad \text{com} \quad b_{12} = b_{21} = 0,$$

ou seja,

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{21} \end{bmatrix}$$

que também é uma matriz diagonal. Logo,

- a soma
$$(A+B) = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & 0 \\ 0 & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix}$$
é uma matriz diagonal e, portanto, $A+B \in U_2$;

- para a multiplicação por escalar temos
$$kA = k\begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_{11} & 0 \\ 0 & ka_{22} \end{bmatrix},$$
ou seja, kA é uma matriz diagonal e, portanto, $kA \in U_2$.

Assim, concluímos que U_2 é um subespaço vetorial de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$, o espaço vetorial real das matrizes quadradas de ordem 2×2. □

Exemplo 3.15. *Seja $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ f \quad \text{é função } \}$ o espaço vetorial das funções com domínio real, munido das operações usuais de adição de funçoes e de multiplicação de uma função por um escalar real, definidas no Exemplo 3.8. Consideremos*

$$U_1 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ f \quad \textit{é uma função contínua } \}$$

e

$$U_2 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ f(x) = f(-x), \quad \textit{para todo} \ \ x \in \mathbb{R}\}$$

que é o conjunto das funções pares. Então U_1 e U_2 são subespaço vetoriais de $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ f \quad \text{é função } \}$.

De fato: Consideremos a função nula $\mathbb{O} : \to \mathbb{R}$ que é definida, para todo $x \in \mathbb{R}$, por

$$\mathbb{O}(x) = 0.$$

esta funçaõ é claramente um função contínua. Assim,

- $U_1 \neq \emptyset$.

Sejam agora $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções em U_1. Então f e g são funções contínuas e, portanto, usando os resultados do Cálculo Diferencial e Integral I obtemos que

- $f+g$ é uma função contínua e, portanto, $f+g \in U_1$;

- kf é uma função contínua para todo número real (escalar) $k \in \mathbb{R}$ e, portanto, $kf \in U_1$.

Assim, concluímos que U_1 é um subespaço vetorial de $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ f \ \text{ é função } \}$ o espaço vetorial das funções com domínio real.

Novamente, função nula $\mathbb{O} : \to \mathbb{R}$ definida, para todo $x \in \mathbb{R}$, por

$$\mathbb{O}(x) = 0$$

é claramente um função par, isto é,

$$\mathbb{O}(-x) = 0 = \mathbb{O}(x),$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Assim,

- $U_2 \neq \emptyset$.

Sejam agora $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções em U_2. Então f e g são funções pares, isto é,

$$f(x) = f(-x) \quad \text{e} \quad g(x) = g(-x),$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Logo,

- para todo $x \in \mathbb{R}$ temos

  $$(f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = (f+g)(x),$$

  isto é, $f+g$ é uma função par e, portanto, $f+g \in U_2$;

- para todo $k \in \mathbb{R}$ e para todo $x \in \mathbb{R}$ temos

  $$(kf)(-x) = kf(-x) = kf(x) = (kf)(x),$$

  isto é, kf é uma função par e, portanto, $kf \in U_2$.

Assim, concluímos que U_2 é um subespaço vetorial de $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ f \ \text{ é função } \}$ o espaço vetorial das funções com domínio real. $\square$

Vamos agora apresentar alguns exemplos de subconjuntos de determinados espaços vetoriais conhecidos que não são subespaços vetoriais desses espaços. Ressaltamos que para mostar que uma determinada propriedade não está satisfeita precisamos, necessariamente, apresentar um **contra-exemplo**.

Exemplo 3.16. *Seja $V = \mathbb{R}^2$ o espaço euclideano bidimensional, isto é, o espaço vetorial bidimensional munido das operações usuais vistas no Exemplo 3.6. Consideremos*

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y = x^2\},$$

que é uma parábola no plano cartesiano. Então U não é um subespaço vetorial de $V = \mathbb{R}^2$.

De fato: Claramente $(0, 0) \in U$, então

- $U_1 \neq \emptyset$.

Sejam agora $u, v \in U$, então

$$u = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ \text{ e } \ x_2 = x_1^2$$

Também, como $v \in U$ temos que

$$v = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \ \text{ e } \ y_2 = y_1^2$$

Logo, para $u + v$ ser um elemento de U devemos ter que

$$(x_2 + y_2) = (x_1 + y_1)^2.$$

Sabemos que

$$x_2 + y_2 = x_1^2 + y_1^2,$$

enquanto que

$$(x_1 + y_1)^2 = x_1^2 + 2x_1y_1 + y_1^2.$$

Vemos então que $u + v$ será um elemento de U se $x_1y_1 = 0$. Assim, tomando $u = (2, 4)$ e $v = (3, 9)$ temos que

$$4 = 2^2 \implies u = ((2, 4) \in U,$$

$$9 = 3^2 \implies v = (3, 9) \in U,$$

mas

$$(2 + 3)^2 = 25 \neq 13 = 4 + 9,$$

ou seja,

- $u + v \notin U$.

Portanto concluímos que U não é um subespaço vetorial do espaço euclideano bidimensional $\mathbb{R}^2$. $\square$

Exemplo 3.17. *Seja $V = \mathbb{R}^3$ o espaço euclideano tridimensional, isto é, o espaço vetorial tridimensional munido das operações usuais vistas no Exemplo 3.6. Consideremos*

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\},$$

que é a esfera com centro na origem e raio 1. Então U não é um subespaço vetorial de $V = \mathbb{R}^3$.

De fato: Claramento o elemento neutro $0 = (0, 0, 0)$ de $\mathbb{R}^3$ é um elemento de U, pois

$$0^2 + 0^2 + 0^2 = 0 + 0 + 0 = 0 \leq 1.$$

Portanto,

- $U \neq \emptyset$.

Agora, tomando $u = (0, 0, 1)$ e $k = 2$ temos que

$$0^2 + 0^2 + 1^2 = 0 + 0 + 1 = 1 \leq 1,$$

isto é, $u \in U$, mas $2u = (0, 0, 2)$ e

$$0^2 + 0^2 + 2^2 = 0 + 0 + 4 = 4 > 1,$$

mostrando que

- $2u \notin U$.

Portanto U não é um subespaço vetorial do espaço euclideano tridimensional $\mathbb{R}^3$. $\square$

Exemplo 3.18. *Seja $V = \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ o espaço vetorial das matrizes quadradas de ordem 2×2 munido das operações usuais de adição de matrizes e de multiplicação de uma matriz por um escalar. Consideremos*

$$U = \{A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R});\ A^2 = A\}.$$

Então U não é subespaço vetorial de $V = \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$.

De fato: O elemento neutro de $V = \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ é a matriz

$$\mathbb{O}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

que claramente é tal que $\mathbb{O}_{2\times 2}^2 = \mathbb{O}_{2\times 2}$ e, portanto, é um elemento de U, então

- $U \neq \emptyset$.

Mas, se tomarmos $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, teremos que $A^2 = A$ e, portanto, $A \in U$. Porém,

$$(2A)^2 = (2A)(2A) = 4A^2 = 4A \neq 2A,$$

mostrando que

- $2A \notin U$.

Portanto, U não é subespaço vetorial de $V = \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$. □

Os próximos resultados também nos auxiliarão a apresentar mais exemplos de subespaços vetoriais de espaços vetoriais já conhecidos.

Proposição 3.19. *A interseção de subespaços vetoriais de um espaço vetorial V sobre um corpo de escalares $\mathbb{K}$ é um subespaço vetorial de V.*

Demonstração: Sejam $I \neq \emptyset$ um conjunto qualquer de índices e U_i, para $i \in I$, uma família qualquer de subespaços vetoriais de V. Seja

$$U = \bigcap_{i\in I} U_i.$$

Como cada U_i é um subespaço vetorial de V, então

$$0 \in U_i, \quad \text{para todo} \quad i \in I.$$

Logo,

$$0 \in \bigcap_{i\in I} U_i = U,$$

mostrando que $U \neq \emptyset$.

Sejam agora $u, v \in U = \bigcap_{i \in I} U_i$, então

$$u, v \in U_i, \quad \text{para todo} \quad i \in I.$$

Como cada U_i é um subespaço vetorial de V segue que

$$u + v \in U_i, \quad \text{para todo} \quad i \in I$$

e, portanto,

$$u + v \in \bigcap_{i \in I} U_i = U.$$

Ainda, para $u \in U = \bigcap_{i \in I} U_i$ e $k \in \mathbb{K}$ temos que

$$u \in U_i, \quad \text{para todo} \quad i \in I$$

e, novamente, como cada U_i é um subespaço vetorial de V segue que

$$ku \in U_i, \quad \text{para todo} \quad i \in I$$

e, portanto,

$$ku \in \bigcap_{i \in I} U_i = U.$$

Portanto, o Teorema 3.11 implica que $U = \bigcap_{i \in I} U_i$ é um subespaço vetorial de V, mostrando que a interseção qualquer de subespaços vetoriais é um subespaço vetorial. ■

Proposição 3.20. *Sejam V um espaço vetorial sobre um corpo de escalares $\mathbb{K}$, U_1 e U_2 dois subespaços vetoriais de V. Se definirmos*

$$U_1 + U_2 := \{u_1 + u_2 \in V; \quad u_1 \in U_1 \quad e \quad u_2 \in U_2\},$$

então $U_1 + U_2$ é um subespaço vetorial de V.

Demonstração: Como U_1 e U_2 são subespaços vetoriais de V, então

$$0 \in U_1 \quad \text{e} \quad 0 \in U_2.$$

Logo,

$$0 = 0 + 0 \in U_1 + U_2,$$

mostrando que $U_1 + U_2 \neq \emptyset$.

Sejam agora $u, v \in U_1 + U_2$, então

$$u = u_1 + u_2, \quad \text{com} \quad u_1 \in U_1 \ \text{ e } \ u_2 \in U_2$$

e

$$v = v_1 + v_2, \quad \text{com} \quad v_1 \in U_1 \ \text{ e } \ v_2 \in U_2.$$

Como U_1 e U_2 são subespaços vetoriais de V segue que

$$u_1 + v_1 \in U_1, \quad \text{e} \quad u_2 + v_2 \in U_2.$$

Logo,

$$(u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) \in U_1 + U_2$$

e, usando a associatividade e a comutatividade da adição no espaço vetorial V, obtemos que

$$(u_1 + u_2) + (v_1 + v_2) \in U_1 + U_2,$$

isto é,

$$u + v \in U_1 + U_2.$$

Ainda, para $u \in U_1 + U_2$ e $k \in \mathbb{K}$ temos que

$$u = u_1 + u_2, \quad \text{com} \quad u_1 \in U_1 \ \text{ e } \ u_2 \in U_2$$

e, novamente, como U_1 e U_2 são subespaços vetoriais de V segue que

$$ku_1 \in U_1, \quad \text{e} \quad ku_2 \in U_2$$

e, portanto,

$$ku_1 + ku_2 \in U_1 + U_2$$

e, como V é um espaço vetorial, obtemos que

$$ku = k(u_1 + u_2) = ku_1 + ku_2 \in U_1 + U_2.$$

Portanto, o Teorema 3.11 implica que $U_1 + U_2$ é um subespaço vetorial de V, mostrando que a soma de dois subespaços vetoriais é um subespaço vetorial.

■

Um argumento de indução implica rapidamente que uma soma finita qualquer de subespaços vetoriais de V é um subespaço vetorial de V. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 3.21. *Seja $V = \mathbb{R}^3$ o espaço euclideano tridimensional, isto é, o espaço vetorial tridimensional munido das operações usuais vistas no Exemplo 3.6. Consideremos*

$$U_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x = y = 0\},$$

que é uma reta, no espaço tridimensional, passando pela origem e

$$U_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x = z = 0\},$$

que também é uma reta, no espaço tridimensional, passando . Vamos mostrar que U_1 e U_2 são subespaços vetorias do espaço euclideano $\mathbb{R}^3$ e encontrar os subespaços vetoriais $U_1 \cap U_2$ e $U_1 + U_2$ de $\mathbb{R}^3$.

De fato: Para mostramos que U_1 é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$, observemos inicialmente que $(0, 0, 0) \in U_1$, então

- $U_1 \neq \emptyset$.

Sejam agora $u, v \in U_1$ e $k \in \mathbb{R}$. Como $u \in U_1$ temos que

$$u = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ \text{ e } \ x_1 = x_2 = 0,$$

ou seja,

$$u = (0, 0, x_3).$$

Também, como $v \in U_1$ temos que

$$v = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 \ \text{ e } \ y_1 = y_2 = 0,$$

ou seja,

$$v = (0, 0, y_3).$$

Logo,

- $u + v = (0, 0, x_3 + y_3)$, ou seja, $u + v \in U_1$;

- $ku = k(0, 0, x_3) = (0, 0, kx_3)$, ou seja, $ku \in U_1$.

Portanto, concluímos que U_1 é um subespaço vetorial do espaço euclideano tridimensional $\mathbb{R}^3$. Fica como exercício mostrar que U_2 também é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

Observemos que se $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, então

$$u \in U_1 \iff x = y = 0 \iff u = (0, 0, z)$$

e

$$u \in U_2 \iff x = z = 0 \iff u = (0, y, 0).$$

Dessa forma,

$$U_1 + U_2 = \{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3; \;\; y, z \in \mathbb{R}\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \;\; x = 0\}.$$

$\square$

Observemos que no exemplo anterior temos que o elemento $(1, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$, porém $(1, 0, 0) \notin U_1 + U_2$, pois todo elemento na soma tem a primeira coordenada nula e soma de coordenadas nula é nula, nunca será igual a 1. Portanto, no exemplo anterior temos que

$$\mathbb{R}^3 \neq U_1 + U_2.$$

Exemplo 3.22. *Seja $V = \mathbb{R}^3$ o espaço euclideano tridimensional, isto é, o espaço vetorial tridimensional munido das operações usuais vistas no Exemplo 3.6. Consideremos*

$$U_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \; x = 0\},$$

que é um plano passando pela origem no espaço tridimensional, e

$$U_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \; y = z = 0\},$$

que é uma reta, no espaço tridimensional, contida no eixo Ox. Vamos mostrar que $\mathbb{R}^3 = U_1 + U_2$ e calcular o subsepaço vetorial $U_1 \cap U_2$.

De fato: Pelo que vimos no exemplo anterior temos que

$$U_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x = 0\}$$

é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ e, com os mesmos argumentos utilizados no exemplo anterior, obtemos que U_2 é também um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

Como U_1, U_2 são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^3$, então

$$U_1 + U_2 \subset \mathbb{R}^3.$$

Seja agora $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Temos que

$$u = (x, y, z) = (0, y, z) + (x, 0, 0) = u_1 + u_2,$$

com $u_1 \in U_1$ e $u_2 \in U_2$, mostrando que $\mathbb{R}^3 \subset U_1 + U_2$ e, portanto, mostrando que

$$\mathbb{R}^3 = U_1 + U_2,$$

completando o exemplo. □

Exemplo 3.23. *Seja $V = \mathbb{R}^3$ o espaço euclideano tridimensional, isto é, o espaço vetorial tridimensional munido das operações usuais vistas no Exemplo 3.6. Consideremos*

$$U_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x = 0\},$$

que é um plano passando pela origem no espaço tridimensional, e

$$U_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ y = 0\},$$

que também é um plano passando pela origem no espaço tridimensional. Vamos mostrar que $\mathbb{R}^3 = U_1 + U_2$ e encontrar o subespaço vetorial $U_1 \cap U_2$.

De fato: Que o subconjunto U_1 é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ segue do Exemplo 3.21. Deixamos como exercício mostrar que o subconjunto U_2 também é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

Agora, como U_1 e U_2 são subespaçcos vetoriais de $\mathbb{R}^3$, então

$$U_1 + U_2 \subset \mathbb{R}^3.$$

Por outro lado, para todo $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ temos que

$$u = (x, y, z) = (0, y, \frac{z}{2}) + (x, 0, \frac{z}{2}) = u_1 + u_2,$$

com $u_1 \in U_1$ e $u_2 \in U_2$, mostrando que $\mathbb{R}^3 \subset U_1 + U_2$ e, portanto, mostrando que

$$\mathbb{R}^3 = U_1 + U_2,$$

completando o exemplo. □

O próximo resultado será de extrema importância nos resultados das próximas seções e também é muito útil na caracterização de espaços vetoriais.

Definição 3.24. *Sejam V um espaço vetorial sobre um corpo de escalares $\mathbb{K}$, U_1 e U_2 dois subespaços vetoriais de V. Diremos que V é a soma direta de U_1 com U_2 se as condições*

(a) $V = U_1 + U_2$;

(b) $U_1 \cap U_2 = \{0\}$

estiverem satisfeitas. Neste caso vamos denotar

$$V = U_1 \oplus U_2.$$

Exemplo 3.25. *Seja $V = \mathbb{R}^3$ o espaço euclideano tridimensional, isto é, o espaço vetorial tridimensional munido das operações usuais vistas no Exemplo 3.6. Consideremos*

$$U_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x = 0\},$$

que é um plano passando pela origem no espaço tridimensional, e

$$U_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ y = z = 0\},$$

que é uma reta, no espaço tridimensional, contida no eixo Ox. Vamos mostrar que $\mathbb{R}^3 = U_1 \oplus U_2$.

De fato: Vimos no Exemplo 3.22 que

$$\mathbb{R}^3 = U_1 + U_2.$$

Para mostramos que a soma acima é direta, precisamos mostrar que $U_1 \cap U_2 = \{(0,0,0)\}$. Uma vez que $U_1 \cap U_2$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$, então temos que $\{(0,0,0)\} \in U_1 \cap U_2$ e, por outro lado, se $u = (x,y,z) \in U_1 \cap U_2$, então

$$u \in U_1 \implies x = 0$$

$$u \in U_2 \implies y = z = 0.$$

Logo, $u = (0,0,0)$, isto é, $U_1 \cap U_2 \subset \{(0,0,0)\}$. Assim,

$$U_1 \cap U_2 = \{(0,0,0)\}$$

e, portanto,

$$\mathbb{R}^3 = U_1 \oplus U_2,$$

completando o exemplo. □

Exemplo 3.26. *Seja $V = \mathbb{R}^3$ o espaço euclideano tridimensional, isto é, o espaço vetorial tridimensional munido das operações usuais vistas no Exemplo 3.6. Consideremos*

$$U_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x = 0\},$$

que é um plano passando pela origem no espaço tridimensional, e

$$U_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ y = 0\},$$

que também é um plano passando pela origem no espaço tridimensional. Vamos mostrar que $\mathbb{R}^3 \neq U_1 \oplus U_2$.

De fato: Vimos no Exemplo 3.23 que

$$\mathbb{R}^3 = U_1 + U_2.$$

Para mostramos que a soma acima não é direta, precisamos mostrar que $U_1 \cap U_2 \neq \{(0,0,0)\}$, isto é, precisamos apresentar um elemento não nulo que pertença a $U_1 \cap U_2$. Considerando $u_0 = (0,0,1)$, temos que

$$u_0 = (0,0,1) \in U_1 \quad \text{e} \quad u_0 = (0,0,1) \in U_2,$$

ou seja,

$$u_0 = (0, 0, 1) \in U_1 \cap U_2,$$

mostrando que

$$\mathbb{R}^3 \neq U_1 \oplus U_2$$

e completando o exemplo. □

Exemplo 3.27. *Seja $V = \mathbb{R}^3$ o espaço euclideano tridimensional, isto é, o espaço vetorial tridimensional munido das operações usuais. Consideremos*

$$U_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x = y = 0\},$$

que é uma reta, no espaço tridimensional, passando pela origem e

$$U_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x = z = 0\},$$

que também é uma reta, no espaço tridimensional, passando . Vamos mostrar que $\mathbb{R}^3 \neq U_1 \oplus U_2$.

Para finalizarmos esta seção temos o seguinte resultado:

Teorema 3.28. *Sejam V um espaço vetorial sobre um corpo de escalares $\mathbb{K}$, U_1 e U_2 dois subespaços vetoriais de V. Então $V = U_1 \oplus U_2$ se, e somente se, todo elemento $v \in V$ puder ser escrito, de forma única, como soma de um elemento de U_1 com um elemento de U_2, isto é, $v = u_1 + u_2$, onde $u_1 \in U_1$ e $u_2 \in U_2$.*

Demonstração:

($\Longrightarrow$) Suponhamos que V seja soma direta de U_1 com U_2, isto é, $V = U_1 \oplus U_2$. Então $V = U_1 + U_2$ e, portanto, para todo $v \in V$, existem $u_1 \in U_1$ e $u_2 \in U_2$ tais que

$$v = u_1 + u_2.$$

Sejam agora, $u_1' \in U_1$ e $u_2' \in U_2$ tais que

$$v = u_1' + u_2'.$$

Observemos que como U_1 e U_2 são subespaços vetoriais de V, então

$$u_1 - u_1' = u_1 + (-u_1') \in U_1 \quad \text{e} \quad u_2' - u_2 = u_2' + (-u_2) \in U_2.$$

Também,

$$u_1 + u_2 = v = u_1' + u_2',$$

ou seja,

$$u_1 - u_1' = u_2' - u_2.$$

Logo,

$$u_1 - u_1' \in U_2 \quad \text{e} \quad u_2' - u_2 \in U_1$$

Portanto,

$$u_1 - u_1' \in U_1 \cap U_2 \quad \text{e} \quad u_2' - u_2 \in U_1 \cap U_2.$$

Mas, como $U_1 \cap U_2 = \{0\}$, então

$$u_1 - u_1' = 0 \quad \text{e} \quad u_2' - u_2 = 0,$$

mostrando que

$$u_1 = u_1' \quad \text{e} \quad u_2' = u_2.$$

Dessa forma mostramos que $v \in V$ se escreve, de forma única, como soma de um elemento de U_1 com um elemento de U_2.

$(\Longleftarrow)$ Suponhamos agora que todo elemento $v \in V$ se escreve, de forma única, como soma de um elemento de U_1 com um elemento de U_2.

Como U_1 e U_2 são subespaços vetoriais de V, então $U_1, U_2 \subset V$ e, portanto,

$$U_1 + U_2 = \{u_1 + u_2; \;\; u_1 \in U \;\text{ e }\; u_2 \in U_2\} \subset V.$$

Por outro lado, se $v \in V$, então existem $u_1 \in U_1$ e $u_2 \in U_2$ tais que

$$v = u_1 + u_2,$$

isto é,

$$V \subset U_1 + U_2.$$

Portanto,

$$V = U_1 + U_2.$$

Seja agora $u \in U_1 \cap U_2$. Como U_1 e U_2 são subespaços vetoriais de V, então $0 \in U_1 \cap U_2$. Dessa forma

$$u = u + 0 \in U_1 + U_2 \quad \text{e} \quad u = 0 + u \in U_1 + U_2.$$

Como $u \in V$ e todo elemento de V se escreve, de forma única, como soma de um elemento de U_1 com um elemento de U_2, então devemos ter necessriamente que $u = 0$, mostrando que

$$U_1 \cap U_2 = \{0\}.$$

Portanto,

$$V = U_1 \oplus U_2,$$

provando este teorema. ■

3.3 Dependência e Independência Linear

Nesta seção começamos a trabalhar com um dos conceitos no qual toda a Álgebra Linear se baseia, o conceito de Combinação Linear, conceito este que generaliza alguns resultados vistos para vetores na disciplina de Geometria Analítica.

No final da seção anterior vimos, no Exemplo 3.22 e posteriormente no Exemplo 3.25 (veja também o Teorema 3.28), que todo elemento $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ se escreve, de forma única, como

$$u = (x, y, z) = (0, y, z) + (x, 0, 0) = u_1 + u_2,$$

onde

$$u_1 \in U_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x = 0\}$$

e

$$u_2 \in U_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ y = z = 0\}.$$

Trabalhando um pouco mais, podemos escrever $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ como

$$u = (x, y, z) = (0, y, z) + (x, 0, 0) = (0, y, 0) + (0, 0, z) + (x, 0, 0) = y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1) + x(1, 0, 0).$$

E se recordarmos um pouco, o conjunto ordenado de "vetores"$\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ foi chamado de base canônica para o espaço de vetores no espaço. Estamos interessados agora em responder as seguintes perguntas:

1. para um espaço vetorial qualquer, sempre conseguiremos escrever todo elemento do espaço vetorial em função de outros?

2. Quais condições devemos colocar num determinado conjunto de elementos de um espaço vetorial para conseguirmos escrever todo elemento do espaço vetorial em função deste conjunto de elementos?

3. E se conseguirmos escrever todo elemento de um espaço vetorial em função de dois determinados grupos de elementos do espaço vetorial, esses grupos tem mesmo número de elementos?

Ao longos das próximas seções responderemos essas três questões. Vamos comecar introduzindo uma maneira de como escrever um elemento qualquer de um espaço vetorial em função de outros:

Definição 3.29. *Sejam V um espaço vetorial sobre um corpo de escalares $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Sejam $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ n vetores em V. Uma combinação linear dos vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ é um vetor*

$$v = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + \ldots + a_nv_n,$$

onde $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ são n escalares no corpo $\mathbb{K}$. Neste caso diremos que o vetor v é uma combinção linear dos vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$.

Pelo que vimos no início desta seção temos que o elemento $(1,2,3)$ do espaço euclideano tridimensional $\mathbb{R}^3$ é uma combinação linear dos vetores $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$, pois

$$(1,2,3) = 1(1,0,0) + 2(0,1,0) = 3(0,0,1).$$

Da mesma forma, o elemento neutro também pode ser escrito com combinação lineares desses três vetores, veja:

$$(0,0,0) = 0(1,0,0) + 0(0,1,0) = 0(0,0,1).$$

Recordemos que o conjunto $B = \{(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\}$ era chamado de base canônica dos vetores no espaço.

Vejamos mais um exemplo:

Exemplo 3.30. *No espaço euclideano tridimensional* $\mathbb{R}^3$ *sejam* $v_1 = (1,1,0)$, $v_2 = (1,0,1)$ *e* $v_3 = (0,1,1)$. *Vamos verificar se cada um dos vetores* $v = (1,1,1)$ *e* $0 = (0,0,0)$ *de* $\mathbb{R}^3$ *é combinação linear dos vetores* v_1, v_2 *e* v_3.

De fato: Para mostrar que $v \in \mathbb{R}^3$ é combinação linear dos vetores v_1, v_2 e v_3 devemos encontrar escalares $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ tais que

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3,$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
(1,1,1) = a_1(1,1,0) + a_2(1,0,1) + a_3(0,1,1) &\iff (1,1,1) = (a_1, a_1, 0) + (a_2, 0, a_2) + (0, a_3, a_3) \\
&\iff (1,1,1) = (a_1 + a_2, a_1 + a_3, a_2 + a_3) \\
&\iff \begin{cases} a_1 + a_2 = 1 \\ a_1 + a_3 = 1 \\ a_2 + a_3 = 1, \end{cases}
\end{aligned}$$

ou seja, para mostrar que $v \in \mathbb{R}^3$ é combinação linear dos vetores v_1, v_2 e v_3 precisamos resolver o sistema linear com tres equações e tres variáveis a_1, a_2 e a_3 acima. Vimos no Capítulo 1 um método para resolver sistemas e, utilizando esse método encontramos (verifique isso!!!) que

$$a_1 = a_2 = a_3 = \frac{1}{2}.$$

Logo

$$v = (1,1,1) = \frac{1}{2}(1,1,0) + \frac{1}{2}(1,0,1) + \frac{1}{2}(0,1,1) = \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2 + \frac{1}{2}v_3,$$

mostrando que de fato $v \in \mathbb{R}^3$ é combinação dos vetores $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$.

Para mostrar que $0 = (0,0,0) \in \mathbb{R}^3$ é combinação linear dos vetores v_1, v_2 e v_3 devemos encontrar escalares $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ tais que

$$0 = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3,$$

ou seja,

$$\begin{aligned}(0,0,0)=a_1(1,1,0)+a_2(1,0,1)+a_3(0,1,1) &\iff (0,0,0)=(a_1,a_1,0)+(a_2,0,a_2)+(0,a_3,a_3)\\ &\iff (0,0,0)=(a_1+a_2,a_1+a_3,a_2+a_3)\\ &\iff \begin{cases} a_1+a_2=0\\ a_1+a_3=0\\ a_2+a_3=0.\end{cases}\end{aligned}$$

Como o sistema acima é um sistema homogêneo temos que

$$a_1=a_2=a_3=0$$

é uma solução do sistema e, portanto,

$$v=(0,0,0)=0(1,1,0)+0(1,0,1)+0(0,1,1)=0v_1+0v_2+0v_3,$$

mostrando que, de fato, $0\in\mathbb{R}^3$ é combinação dos vetores $v_1,v_2,v_3\in\mathbb{R}^3$, completando o exemplo. $\square$

Antes de provarmos nosso próximo resultado precisamos fazer uma observação de extrema importância importantes:

> *"o elemento neutro de um espaço vetorial sobre um corpo de escalares $\mathbb{K}$ sempre será combinação linear de qualquer conjunto de vetores, pois em qualqer espaço vetorial sempre temos que*
>
> $$0\,v=0$$
>
> *para qualquer vetor $v\in V$, ou pelo fato de sistemas lineares homogêneos sempre possuirem a solução nula. Uma questão que resolveremos na próxima seção é se esta solução é única ou não".*

Como estamos interessados em mostrar que todo elemento de um espaço vetorial V pode ser escrito como combinação linear de um determinado número de elementos desse mesmo espaço vetorial, é natural que esse conjunto de vetores satisfaça as propriedades que o espaço vetorial como um todo satisfaz. Na realidade temos o seguinte resultado:

Teorema 3.31. *Seja $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ um subconjunto qualquer não-vazio e finito de um espaço vetorial V sobre um corpo de escalares $\mathbb{K}$. O conjunto de todas as combinações lineares de vetores de S, denotado por*

$$[S] = \{v = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + \ldots + a_nv_n; \quad a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{K}\},$$

é um subespaço vetorial de V, denominado subespaço vetorial gerado por S e os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ são denominados geradores do subespaço vetorial $[S]$. Ainda mais, $[S]$ é o menor subespaço vetorial de V que contém S, isto é, se existir um outro subespaço vetorial U de V que contém todos os elementos de S, então devemos ter necessariamente que $[S] \subset U$.

Demonstração: Suponhamos inicialmente que exista um subespaço vetorial U do espaço vetorial V tal que

$$S \subset U.$$

Vamos mostrar que $[S] \subset U$. Para fazermos isso seja $v \in [S]$, então existem escalares $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ tais que

$$v = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + \ \ldots + a_nv_n \in [S].$$

Mas $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n \in S$ e como $S \subset U$, então $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n \in U$. Mas U é um subespaço vetorial de V, então obtemos que

$$v = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + \ \ldots + a_nv_n \in U,$$

mostrando que $[S] \subset U$. Agora, usando que V é um espaço vetorial e, portanto, V também é um subespaço vetorial (trivial) de V e $S \subset V$, então obtemos que

$$[S] \subset V.$$

Agora, como S é um subconjunto não vazio de V, existe pelo menos $v_1 \in V$ tal que $v_1 \in S$. Logo,

$$0 = 0v_1 + 0v_2 + 0v_3 + \ldots + 0v_n \in [S]$$

e, portanto,

- $[S] \neq \emptyset$.

Sejam agora $u, v \in [S]$ e $k \in \mathbb{K}$. Então, existem escalares $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n \in \mathbb{K}$ tais que

$$u = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + \ \ldots + a_nv_n \ \text{ e } \ v = b_1v_1 + b_2v_2 + b_3v_3 + \ \ldots + b_nv_n.$$

Temos então que

- $u + v \in [S]$, pois usando a comutatividade, a associatividade e a ditributividade das operações no espaço vetorial V temos que

$$\begin{aligned} u + v &= (a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + \ \ldots + a_nv_n) + (b_1v_1 + b_2v_2 + b_3v_3 + \ \ldots + b_nv_n) \\ &= (a_1v_1 + b_1v_1) + (a_2v_2 + b_2v_2) + (a_3v_3 + b_3v_3) + \ \ldots \ + (a_nv_n + b_nv_n) \\ &= (a_1 + b_1)v_1 + (a_2 + b_2)v_2 + (a_3 + b_3)v_3 + \ \ldots \ + (a_n + b_n)v_n \\ &\in [S], \end{aligned}$$

  uma vez que $(a_1 + b_1),\ (a_2 + b_2), (a_3 + b_3), \ldots,\ (a_n + b_n) \in \mathbb{K}$ são elementos do corpo de escalares $\mathbb{K}$;

- $ku \in [S]$, pois usando a distributividade da operação de multiplicação por escalar no espaço vetorial V temos que

$$\begin{aligned} ku &= k(a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + \ \ldots + a_nv_n) \\ &= k(a_1v_1) + k(a_2v_2) + k(a_3v_3) + \ \ldots \ + k(a_nv_n) \\ &= (ka_1)v_1 + (ka_2)v_2 + (ka_3)v_3 + \ \ldots \ + (ka_n)v_n \\ &\in [S], \end{aligned}$$

  uma vez que $(ka_1),\ (ka_2), (ka_3), \ldots,\ (ka_n) \in \mathbb{K}$ são elementos do corpo de escalares $\mathbb{K}$.

Portanto, $[S]$ é um subespaço vetorial de V, completando a prova o teorema. ■

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 3.32. *Seja $V = \mathbb{R}^3$ o espaço euclideano tridimensional e consideremos*

$$v_1 = (1, 0, 0) \quad e \quad v_2 = (1, 1, 0).$$

Vamos encontrar o subespaço $[\{v_1, v_2\}]$ gerado por $S = \{v_1, v_2\}$.

De fato: Seja $u \in [S] = [\{(1,0,0),(1,1,0)\}]$. Então existe $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$u = a_1(1,0,0) + a_2(1,1,0).$$

Usando propriedades do espaço euclideano tridimensional $\mathbb{R}^3$ obtemos que

$$u = (a_1, 0, 0) + (a_2, a_2, 0) = (a_1 + a_2, a_2, 0).$$

Consideremos então

$$U = \{(x+y, y, 0) \in \mathbb{R}^3;\ x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Vamos mostrar que $[S] = U$. Para fazermos isso, observemos incialmente que $U \subset \mathbb{R}^3$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ (verifique esse fato!!!). Ainda,

$$(1,0,0) \in U,$$

pois basta tomarmos $x = 1$, $y = 0$ e $z = 0$ e usarmos a definição de U. Também,

$$(1,1,0) \in U,$$

pois basta tomarmos $x = 1$, $y = 1$ e $z = 0$ e usarmos, novamente, a definição de U. Dessa forma,

$$S \subset U$$

e, como U é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$, o Teorema 3.31 implica que

$$[S] \subset U.$$

Seja agora $u \in U$, então $u = (x+y, y, 0) \in \mathbb{R}^3$, com $x, y \in \mathbb{R}$. Temos

$$u = (x+y, +y, 0) = (x, 0, 0) + (y, y, 0) = x(1,0,0) + y(1,1,0) \in [\{(1,0,0),(1,1,0)\}] = [S],$$

pois $x, y \in \mathbb{R}$, ou seja,

$$U \subset [S].$$

Provamos então que

$$[S] = U = \{(x+y, y, 0) \in \mathbb{R}^3;\ \ x, y \in \mathbb{R}\},$$

completando o exemplo. $\square$

Exemplo 3.33. *Seja $V = \mathbb{R}^3$ o espaço euclideano tridimensional e consideremos*

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \quad x + y = 0\}.$$

Vamos encontrar, se possível, os geradores de W.

De fato: Seja $u = (x, y, z) \in W$, então $x + y = 0$ e, portanto, $y = -x$. Assim,

$$u = (x, y, z) \in W \iff u = (x, -x, z) = (x, -x, 0) + (0, 0, z) = x(1, -1, 0) + z(0, 0, 1).$$

Se considerarmos

$$S = \{(1, -1, 0), (0, 0, 1)\},$$

provamos acima

$$W \subset [\{(1, -1, 0), (0, 0, 1)\}] = [S],$$

pois escrevemos todo elemento de W como combinação linear dos vetores $(1, -1, 0)$ e $(0, 0, 1)$ de S.

Por outro lado, como W é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ (verifique!!!) e claramente

$$(1, -1, 0), (0, 0, 1) \in W,$$

ou seja,

$$S \subset W,$$

então o Teorema 3.31 implica que

$$[S] \subset W$$

e, portanto, concluímos que

$$[S] = W,$$

mostrando que os geradores de W são os vetores

$$v_1 = (1, -1, 0) \quad \text{e} \quad v_2 = (0, 0, 1),$$

completando o exemplo. $\square$

Quando $S = \{v_1, v_2, \ \ldots, \ v_n\}$ vamos denotar

$$[S] = [v_1, v_2, v_3, \ \ldots, \ v_n].$$

Exemplo 3.34. *Seja $V = \mathbb{R}^3$ o espaço euclideano tridimensional e consideremos*

$$U_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \quad x = 0\}.$$

Vamos encontrar, se possível, os geradores de U_1.

De fato: Seja $u = (x, y, z) \in U_1$, então $x = 0$. Assim,

$$u = (x, y, z) \in U_1 \iff u = (0, y, z) = (0, y, 0) + (0, 0, z) = y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1).$$

Se considerarmos

$$S = \{(0, 1, 0), (0, 0, 1)\},$$

acabamos de provar então que

$$U_1 \subset [\{(0, 1, 0), (0, 0, 1)\}] = [S].$$

Por outro lado, como U_1 é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ (verifique!!!) e claramente temos que

$$(0, 1, 0), (0, 0, 1) \in U_1,$$

ou seja,

$$S \subset U_1,$$

então o Teorema 3.31 implica que

$$[S] \subset U_1$$

e, portanto, concluímos que

$$[S] = U_1,$$

mostrando que os geradores de U_1 são os vetores

$$v_1 = (0, 1, 0) \quad \text{e} \quad v_2 = (0, 0, 1),$$

completando o exemplo. $\square$

Exemplo 3.35. *Seja $V = \mathbb{R}^3$ o espaço euclideano tridimensional e consideremos*

$$U_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \quad y = z = 0\}.$$

Vamos encontrar, se possível, os geradores de W.

De fato: Seja $u = (x, y, z) \in U_2$, então $y = z = 0$. Assim,

$$u = (x, y, z) \in U_2 \iff u = (x, 0, 0) = x(1, 0, 0).$$

Se considerarmos

$$S = \{(1, 0, 0)\},$$

temos então que

$$U_2 \subset [\{(1, 0, 0)\}] = [S].$$

Por outro lado, como U_2 é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ (verifique!!!) e

$$(1, 0, 0) \in U_2,$$

ou seja,

$$S \subset U_2,$$

então o Teorema 3.31 implica que

$$[S] \subset U_2$$

e, portanto, concluímos que

$$[S] = U_2,$$

mostrando que o gerador de U_2 é o vetor

$$v_1 = (1, 0, 0),$$

completando o exemplo. $\square$

Vimos no Exemplo 3.25 que

$$\mathbb{R}^3 = U_1 \oplus U_2,$$

onde

$$U_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \quad x = 0\}$$

e

$$U_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \quad y = z = 0\}.$$

Também, vimos nos Exemplos 3.34 e 3.35 que os geradores de U_1 e U_2 são

$$(0,1,0), \quad (0,0,1) \quad \text{e} \quad (1,0,0),$$

respectivamente. Um pergunta natural é se esses vetores

$$(0,1,0), \quad (0,0,1), \quad (1,0,0)$$

são geradores de todo o espaço euclideano tridimensional $\mathbb{R}^3$. A resposta é afirmativa, pois todo elemento $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ se escreve da forma

$$(x,y,z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1).$$

Temos então a seguinte definição:

Definição 3.36. *Sejam V um espaço vetorial sobre um corpo de escalares $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).Se existirem vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ n em V tais que V seja gerado pelos vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$, isto é,*

$$V = [v_1, v_2, \ldots, v_n].$$

Diremos que V é um espaço vetorial finitamente gerado.

Dessa forma:

- o espaço euclideano bidimensional $\mathbb{R}^2$ é finitamente gerado, pois

$$\mathbb{R}^2 = [(1,0),(0,1)].$$

- o espaço euclideano tridimensional $\mathbb{R}^3$ é finitamente gerado, pois

$$\mathbb{R}^3 = [(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)].$$

- De forma geral o espaço euclideano $n-$dimensional $\mathbb{R}^n$ é finitamente gerado, pois

$$\mathbb{R}^n = [(1,0,0,\ldots,0),(0,1,0,\ldots,0),\ldots,(0,0,\ldots,0,1,0,\ldots,0),\ldots,(0,0,0,\ldots,0,1)].$$

- o espaço da matrizes quadradas 2×2 $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ é finitamente gerado, pois

$$\mathbb{M}_2(\mathbb{R}) = [\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}].$$

Vamos agora fazer exemplos envolvendo o espaço vetorial das matrizes.

Exemplo 3.37. *Seja $V = \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ o espaço vetorial das matrizes quadradas de ordem 2×2, munido das operações usuais de soma e multiplicação por escalar e considere*

$$U_1 = \{A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R});\ A \ \ \textit{é uma matriz simétrica}\ \}.$$

Vamos encontrar, se possível, os geradores de U_1.

De fato: Seja $A = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$. Então para $A \in U_1$, devemos ter $y = z$ e, portanto,

$$\begin{aligned} A = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \in U_1 &\iff y = z \\ &\iff A = \begin{bmatrix} x & y \\ y & w \end{bmatrix} \\ &\iff A = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & y \\ y & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & w \end{bmatrix} \\ &\iff A = x \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Se considerarmos

$$S = \{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\},$$

acabamos de mostrar então que

$$U_1 \subset [\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\}] = [S].$$

Por outro lado, como U_1 é um subespaço vetorial de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ (verifique!!!) e

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in U_1,$$

ou seja,

$$S \subset U_1,$$

então o Teorema 3.31 implica que

$$[S] \subset U_1$$

e, portanto, concluímos que

$$[S] = U_1,$$

mostrando que os geradores de U_1 são os vetores (matrizes)

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \; A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

completando o exemplo. □

Vamos agora mostrar que $V = \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ o espaço vetorial das das matrizes quadradas de ordem 2×2, munido das operações usuais de soma e multiplicação por escalar é finitamente gerado.

Exemplo 3.38. *Seja $V = \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ o espaço vetorial das matrizes quadradas de ordem 2×2, munido das operações usuais de soma e multiplicação por escalar e considere*

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \; A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \; A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \; e \; A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Então

$$\mathbb{M}_2(\mathbb{R}) = [\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}].$$

De fato: Seja Seja $A = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ uma matriz quadrada de ordem 2×2 qualquer. Temos

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ z & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & w \end{bmatrix} \\ & x \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

mostrando que

$$\mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \subset [\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}].$$

Mas, é imediato que

$$[\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}] \subset \mathbb{M}_2(\mathbb{R}),$$

pois $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ é um espaço vetorial. Logo,

$$\mathbb{M}_2(\mathbb{R}) = [\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}],$$

ou seja, $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ é finitamente gerado e seus geradores são

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

completando o exemplo. □

Vamos começar com um exemplo que engloba quase todos os conceitos estudados até o presente momento.

Exemplo 3.39. *No espaço euclideano tridimensional* $\mathbb{R}^3$*, considere os seguintes subconjuntos*

$$U_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \quad x + y = 0\}$$

e

$$U_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \quad 2x + 3z = 0\}.$$

Vamos verificar se $\mathbb{R}^3 = U_1 \oplus U_2$, *calcular os geradores de* U_1, U_2, $U_1 \cap U_2$ *e* $U_1 + U_2$.

De fato: Como claramente $(0, 0, 0) \in U_1$, então

- $U_1 \neq \emptyset$.

Sejam agora $u, v \in U_1$ e $k \in \mathbb{R}$. Como $u \in U_1$ temos que

$$u = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \;\text{ e }\; x_1 + x_2 = 0, \;\text{ ou seja, }\; x_1 = -x_2.$$

Também, como $v \in U_1$ temos que

$$v = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 \;\text{ e }\; y_1 + y_2 = 0, \;\text{ ou seja, }\; y_1 = -y_2.$$

Logo,

- $u + v = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$ e

  $$x_1 + y_1 = -x_2 + (-y_2) = -(x_2 + y_2),$$

  ou seja, $u + v \in U_1$;

- $ku = k(x_1, x_2, x_3) = (kx_1, kx_2, kx_3)$ e

  $$(kx_1) = k(x_1) = k(-x_2) = -(kx_2),$$

  ou seja, $ku \in U_1$.

Portanto, concluímos que U_1 é um subespaço vetorial do espaço euclideano tridimensional $\mathbb{R}^3$.

Novamente, $(0, 0, 0) \in U_2$, então

- $U_2 \neq \emptyset$.

Sejam agora $u, v \in U_2$ e $k \in \mathbb{R}$. Como $u \in U_2$ temos que

$$u = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ \text{ e } \ 2x_1 + 3x_3 = 0, \ \text{ ou seja, } \ 2x_1 = -3x_3.$$

Também, como $v \in U_2$ temos que

$$v = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 \ \text{ e } \ 2y_1 + 3y_3 = 0 \ \text{ ou seja, } \ 2y_1 = -3y_3.$$

Logo,

- $u + v = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$ e

  $$2(x_1 + y_1) = 2x_1 + 2y_1 = -3x_3 + (-3y_3) = -3(x_3 + y_3),$$

  ou seja,

  $$2(x_1 + y_1) + 3(x_3 + y_3) = 0,$$

  mostrando que $u + v \in U_2$;

- $ku = k(x_1, x_2, x_3) = (kx_1, kx_2, kx_3)$ e

  $$2(kx_1) = (2\ k)x_1 = (k\ 2)kx_1 = k(2x_1) = k(-3x_3) = -3(kx_3),$$

  ou seja,

  $$2(kx_1) + 3(kx_3) = 0,$$

  mostrando que $ku \in U_2$.

Portanto, concluímos que U_2 também é um subespaço vetorial do espaço euclideano tridimensional $\mathbb{R}^3$.

Vamos verificar agora se

$$\mathbb{R}^3 = U_1 + U_2,$$

para isso observemos primeiro que

$$U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^3.$$

Logo,

$$U_1 + U_2 \subset \mathbb{R}^3.$$

Vamos então verificar se

$$\mathbb{R}^3 \subset U_1 + U_2.$$

Seja então $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Para que $(a, b, c) \in U_1 + U_2$, devemos encontrar $u = (x_1, x_2, x_3) \in U_1$ e $v = (y_1, y_2, y_3) \in U_2$ tais que

$$(a, b, c) = u + v = (x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3).$$

Como $u = (x_1, x_2, x_3) \in U_1$, então

$$x_1 + x_2 = 0, \quad \text{ou seja,} \quad x_1 = -x_2,$$

assim,

$$u = (-x_2, x_2, x_3).$$

Como $v = (y_1, y_2, y_3) \in U_2$, então

$$2y_1 + 3y_3 = 0 \quad \text{ou seja,} \quad 2y_1 = -3y_3,$$

assim,

$$v = (y_1, y_2, -\frac{2}{3}y_1).$$

Portanto $(a, b, c) \in U_1 + U_2$ se, e somente se,

$$(a, b, c) = (-x_2, x_2, x_3) + (y_1, y_2, -\frac{2}{3}y_1),$$

ou seja,

$$(a, b, c) = (-x_2 + y_1, x_2 + y_2, x_3 - \frac{2}{3}y_1),$$

ou ainda se, e somente se,

$$\begin{cases} -x_2 + y_1 = a \\ x_2 + y_2 = b \\ x_3 - \frac{2}{3}y_1 = c. \end{cases}$$

Que é um sistema linear com três equações e quatro variáveis

$$x_2, \ x_3, \ y_1, \ y_2.$$

A matriz ampliada para esse sitema fica:

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 & c \end{array}\right].$$

Escalonando essa matriz obtemos que

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 & c \end{array}\right] \quad \rightarrow \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 & c \\ -1 & 0 & 1 & 0 & a \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 & c \\ -1 & 0 & 1 & 0 & a \end{array}\right] \quad \rightarrow \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 & c \\ 0 & 0 & 1 & 1 & a+b \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 & c \\ 0 & 0 & 1 & 1 & a+b \end{array}\right] \quad \rightarrow \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & c+\frac{2}{3}(a+b) \\ 0 & 0 & 1 & 1 & a+b \end{array}\right] = \tilde{A}_1.$$

Como a matriz $\tilde{A}_1$ está na forma escalonada, então

$$\tilde{p} = p = 3,$$

enquanto que o número de variáveis do sistema linear é igual a 4(quatro). Portanto, o sistema é compatível indeterminado. Por simplicidade vamos fazer $y_2 = 0$ e, portanto, obtemos que

$$x_2 = b, \quad x_3 = c + \frac{2}{3}(a+b) \ \text{ e } \ y_1 = a+b,$$

mostrando que

$$(a,b,c) = u + v = (x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3),$$

com x_1, x_2, y_1 e y_2 dados acima e lembrando que

$$x_1 = -x_2 \ \text{ e } \ y_3 = -\frac{2}{3}y_1.$$

Portanto,

$$\mathbb{R}^3 \subset U_1 + U_2.$$

Logo, concluímos que

$$\mathbb{R}^3 = U_1 + U_2.$$

Vamos verficar agora se a soma acima é uma soma direta, para fazermos isso precisamos mostrar que a interseção

$$U_1 \cap U_2 = \{(0,0,0)\}$$

só possui o elemento neutro $(0,0,0)$ de $\mathbb{R}^3$. Como U_1 e U_2 são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^3$, então $U_1 \cap U_2$ também é um subespaço de $\mathbb{R}^3$ e, portanto,

$$\{(0,0,0)\} \subset U_1 \cap U_2.$$

Seja agora $u(x,y,z) \in U_1 \cap U_2$. Temos

$$u = (x,y,z) \in U_1 \iff x + y = 0$$

e

$$u = (x,y,z) \in U_2 \iff 2x + 3z = 0.$$

Logo devemos ter que

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + 3z = 0, \end{cases}$$

de onden concluímos que

$$y = -x \;\text{ e }\; z = -\frac{2}{3}x.$$

Logo $u = (x,y,z) \in U_1 \cap U_2$ se, e somente se,

$$u = (x, -x, -\frac{2}{3}x) = x(1, -1, -\frac{2}{3}),$$

ou seja,

$$U_1 \cap U_2 = \{(x, -x, -\frac{2}{3}x) \in \mathbb{R}^3;\; x \in \mathbb{R}\}$$

e, podemos ver imediatamente que

$$U_1 \cap U_2 \neq \{(0,0,0)\},$$

pois o elemento $(1, -1, -\frac{2}{3}) \in U_1 \cap U_2$. Mostramos assim que a soma não é direta.

Para encontrarmos os geradores de U_1, observemos que

$$u = (x, y, z) \in U_1 \iff u = (x, -x, z) = (x, -x, 0) + (0, 0, z) = x(1, -1, 0) + z(0, 0, 1).$$

Assim,

$$U_1 \subset [(1, -1, 0), (0, 0, 1)]$$

e como claramente os vetores $(1, -1, 0)$ e $(0, 0, 1)$ são elementos do subespaço vetorial $\mathbb{R}^3$ e $[(1, -1, 0), (0, 0, 1)]$ é o menor subespaço de $\mathbb{R}^3$ que contém esses vetores, então devemos ter que

$$U_1 = [(1, -1, 0), (0, 0, 1)],$$

mostrando que $(1, -1, 0)$ e $(0, 0, 1)$ são os geradores de U_1.

Com relação aos geradores de U_2, observemos que

$$u = (x, y, z) \in U_2 \iff u = (x, y, -\frac{2}{3}x) = (x, 0, -\frac{2}{3}x) + (0, y, 0) = x(1, 0, -\frac{2}{3}) + y(0, 1, 0).$$

Assim,

$$U_2 \subset [(1, 0, -\frac{2}{3}), (0, 1, 0)]$$

e como claramente os vetores $(1, 0, -\frac{2}{3})$ e $(0, 1, 0)$ são elementos do subespaço vetorial $\mathbb{R}^3$ e $[(1, 0, -\frac{2}{3}), (0, 1, 0)]$ é o menor subespaço de $\mathbb{R}^3$ que contém esses vetores, então devemos ter que

$$U_2 = [(1, 0, -\frac{2}{3}), (0, 1, 0)],$$

mostrando que $(1, 0, -\frac{2}{3})$ e $(0, 1, 0)$ são os geradores de U_2.

Também,

$$R^3 = U_1 + U_2 = [(1, -1, 0), (0, 0, 1), (1, 0, -\frac{2}{3}), (0, 1, 0)]$$

pois, cada elemento de $U_1 + U_2$ se escreve como soma

$$u + v,$$

com $u \in U_1$ e $v \in U_2$ e, portanto

$$u = a_1(1, -1, 0) + a_2(0, 0, 1) \in U_1$$

e

$$v = a_3(1, 0, -\frac{2}{3}) + a_4(0, 1, 0) \in U_2,$$

ou seja,

$$u + v = a_1(1, -1, 0) + a_2(0, 0, 1) + a_3(1, 0, -\frac{2}{3}) + a_4(0, 1, 0),$$

mostrando que

$$U_1 + U_2 \subset [(1, -1, 0), (0, 0, 1), (1, 0, -\frac{2}{3}), (0, 1, 0)].$$

E como cada um do vetores

$$(1, -1, 0), (0, 0, 1), (1, 0, -\frac{2}{3}), (0, 1, 0) \in U_1 + U_2,$$

uma vez que $(0, 0, 0) \in U_1$ e $(0, 0, 0) \in U_2$, obtemos que

$$[(1, -1, 0), (0, 0, 1), (1, 0, -\frac{2}{3}), (0, 1, 0)] \subset U_1 + U_2.$$

Assim,

$$U_1 + U_2 = [(1, -1, 0), (0, 0, 1), (1, 0, -\frac{2}{3}), (0, 1, 0)]$$

e os geradores de $U_1 + U_2$ são $(1, -1, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(1, 0, -\frac{2}{3})$ e $(0, 1, 0)$.

Vimos que $u = (x, y, z) \in U_1 \cap U_2$ se, e somente se,

$$u = (x, -x, -\frac{2}{3}x) = x(1, -1, -\frac{2}{3}).$$

Logo,

$$U_1 \cap U_2 \subset [(1, -1, -\frac{2}{3})]$$

e como o vetor $(1, -1, -\frac{2}{3})$ é um elemento de $U_1 \cap U_2$, concluímos que

$$U_1 \cap U_2 = [(1, -1, -\frac{2}{3})],$$

mostrando que o gerador de $U_1 \cap U_2$ é o vetor $(1, -1, -\frac{2}{3})$, completando o exemplo. $\square$

Vimos anteriormente que os vetores

$$(1, 0, 0), \ (0, 1, 0) \ \text{ e } \ (0, 0, 1)$$

são geradores do espaço euclideano tridimensional $\mathbb{R}^3$ e que vetores

$$(1,-1,0),\ (0,0,1),\ (1,0,-\frac{2}{3})\ \text{ e }\ (0,1,0)$$

também são geradores de $\mathbb{R}^3$. O conceito que iremos estudar agora nos dirá qual desses grupos de geradores de $\mathbb{R}^3$ são mais apropriados para expressar os vetores de $\mathbb{R}^3$.

Definição 3.40. *Seja V um espaço vetorial sobre um corpo de escalares $\mathbb{K}$. Diremos que o conjunto de vetores $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é linearmente dependente (LD) se existires escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$,* **nem todos nulos**, *tais que*

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = 0, \tag{3.1}$$

onde 0 denota o elemento neutro de V. Caso contrário, diremos que o conjunto de vetores $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é linearmente independente (LI).

Observemos que a igualdade em (3.1) é sempre verdade se tomarmos todos os escalares iguais a zero, isto é,

$$0v_1 + 0v_2 + \ldots + 0v_n = 0,$$

pois em um espaço vetorial sempre é verdade que

$$0v = 0,$$

para qualquer vetor $v \in V$. Na prática, para mostarmos que o conjunto de vetores $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é LI devemos mostrar então que

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = 0 \iff \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0.$$

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 3.41. *Seja $V = \mathbb{R}^2$ o espaço euclideano bidimensional e consideremos os conjunto de vetores*

$$\{(1,0),\ (0,1)\}$$

e

$$\{(0,0),\ (1,1)\}.$$

Vamos verificar se esses conjuntos de vetores são LI ou LD em $\mathbb{R}^2$.

De fato: Sejam $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$\alpha_1(1,0) + \alpha_2(0,1) = 0 = (0,0),$$

pois o elemento neutro de espaço euclideano $\mathbb{R}^2$ é $(0,0)$. Temos

$$(0,0) = \alpha_1(1,0) + \alpha_2(0,1) \iff (\alpha_1, 0) = (0, \alpha_2) = (0,0) \iff (\alpha_1 \alpha_2) = (0,0),$$

ou seja, se, e somente se,

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0,$$

mostrando que o conjunto

$$\{(1,0),\ (0,1)\}$$

é LI em $\mathbb{R}^2$.

Para verificarmos se o outro conjunto é LI ou LD em $\mathbb{R}^2$, sejam novamente $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$\alpha_1(0,0) + \alpha_2(1,1) = 0 = (0,0).$$

Temos

$$(0,0) = \alpha_1(0,0) + \alpha_2(1,1) \iff (0,0) = (\alpha_2, \alpha_2) = (0,0),$$

ou seja, se, e somente se,

$$\alpha_2 = 0.$$

Portanto obtemos que para qualquer valor que atribuirmos para α_1 teremos que

$$\alpha_1(0,0) + 0(1,1) = 0 = (0,0),$$

por exemplo se tomarmos $\alpha_1 = 1$, teremos que

$$1(0,0) + 0(1,1) = (0,0 + (0,0) = (0,0),$$

mostrando que o conjunto

$$\{(0,0),\ (1,1)\}$$

é LD em $\mathbb{R}^2$, completando este exemplo. $\square$

Vale a pena observarmos aqui que se o elemento neutro 0 do espaço vetorial fizer parte do conjunto que estamos tentando verificar se é LI ou LD, este conjunto será sempre LD, pois para todo escalar $\alpha \neq 0$ não nulo sempre teremos que

$$\alpha 0 = 0$$

e, portanto, o conjunto de vetores

$$\{v_1, v_2, \ldots, 0, \ldots, v_n\}$$

sempre será LD, pois pelo menos conseguiremos tomar o escalar que multiplica o elemento neutro não nulo.

Vejamos mais exemplos

Exemplo 3.42. *Seja $V = \mathbb{R}^3$ o espaço euclideano tridimensional e consideremos os conjunto de vetores*

$$\{(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\}$$

e

$$\{(1,-1,0),(0,0,1),(1,0,-\frac{2}{3}),(0,1,0)\}$$

o conjunto de vetores que são geradores de $\mathbb{R}^3 = U_1 + U_2$, conforme Exemplo 3.39. Vamos verificar se esses conjuntos de vetores são LI ou LD em $\mathbb{R}^3$.

De fato: Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tais que

$$\alpha_1(1,0,0) + \alpha_2(0,1,0) + \alpha_3(0,0,1) = 0 = (0,0,0)$$

pois o elemento neutro do espaço euclideano $\mathbb{R}^3$ é $(0,0,0)$. Temos

$$(0,0,0) = \alpha_1(1,0,0) + \alpha_2(0,1,0) + \alpha_3(0,0,1) \iff (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0,0,0),$$

ou seja, se, e somente se,

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0,$$

mostrando que o conjunto

$$\{(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\}$$

é LI em $\mathbb{R}^3$.

Para verificarmos se o outro conjunto é LI ou LD em $\mathbb{R}^3$, sejam $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$ tais que

$$\alpha_1(1,-1,0) + \alpha_2(0,0,1) + \alpha_3(1,0,-\frac{2}{3}) + \alpha_4(0,1,0) = 0 = (0,0,0).$$

Temos

$$(0,0,0) = \alpha_1(1,-1,0)+\alpha_2(0,0,1)+\alpha_3(1,0,-\frac{2}{3})+\alpha_4(0,1,0) \iff (\alpha_1+\alpha_3, -\alpha_1+\alpha_4, \alpha_2-\frac{2}{3}\alpha_3) = (0,0,0),$$

ou seja, se, e somente se,

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 + \alpha_4 = 0 \\ \alpha_2 - \frac{2}{3}\alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema acima obtemos que

$$\alpha_2 = -\frac{2}{3}\alpha_1, \ = \alpha_3 = -\alpha_1 \ \text{ e } \ \alpha_4 = \alpha_1,$$

ou seja, o sistema é compatível e indeterminado. Se tomarmos $\alpha_1 = 1$, otemos que

$$1(1,-1,0) + (-\frac{2}{3})(0,0,1) + (-1)(1,0,-\frac{2}{3}) + 1(0,1,0) = (0,0,0),$$

mostrando que o conjunto

$$\{(1,-1,0),(0,0,1),(1,0,-\frac{2}{3}),(0,1,0)\}$$

é LD em $\mathbb{R}^3$, finalizando este exemplo. □

Observemos que ambos os conjunto de vetores

$$\{(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\}$$

e

$$\{(1,-1,0),(0,0,1),(1,0,-\frac{2}{3}),(0,1,0)\}$$

eram geradores do espaço euclideano $\mathbb{R}^3$. A diferença principal entre esses conjuntos de geradores é que o primeiro é LI e que o segundo é LD, dito de outra forma, a principal diferença é que utilizando o primeiro conjunto conseguimos escrever cada elemento de $\mathbb{R}^3$ de uma única forma em função (combinação linear) dos vetores deste conjunto enquanto que utilizando o segundo conjunto de vetores escreveremos cada vetor de $\mathbb{R}^3$ de várias formas em função (combinação linear) dos vetores deste conjunto. Na próxima seção daremos o nome de base ao primeiro conjunto. Vejamos outro exemplo:

Exemplo 3.43. *Ainda no espaço euclideano $V = \mathbb{R}^3$ consideremos o conjunto de vetores*

$$\{(1,-1,0),(0,0,1),(0,1,0)\}.$$

Vamos verificar se esse conjunto de vetores é LI ou LD em $\mathbb{R}^3$.

De fato: Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tais que

$$\alpha_1(1,-1,0)+\alpha_2(0,0,1)+\alpha_3(0,1,0)=0=(0,0,0).$$

Temos

$$(0,0,0)=\alpha_1(1,-1,0)+\alpha_2(0,0,1)+\alpha_3(0,1,0) \iff (\alpha_1,-\alpha_1+\alpha_3,\alpha_2)=(0,0,0),$$

ou seja, se, e somente se,

$$\alpha_1=0, \quad -\alpha_1+\alpha_3=0, \quad \alpha_2=0,$$

ou seja, se, e somente se,

$$\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0,$$

mostrando que o conjunto de vetores

$$\{(1,-1,0),(0,0,1),0,1,0)\}$$

é LI em $\mathbb{R}^3$, finalizando este exemplo. □

No Exemplo 3.43 mostramos que o conjunto de vetores

$$\{(1,-1,0),(0,0,1),(0,1,0)\}$$

é LI em $\mathbb{R}^3$ e, no exemplo 3.42 mostramos que o conjunto de vetores

$$\{(1,-1,0),(0,0,1),(1,0,-\frac{2}{3}),(0,1,0)\}$$

é LD em $\mathbb{R}^3$. Se olharmos esses dois conjuntos de vetores temos a seguinte constatação: o vetor

$$(1,0,-\frac{2}{3})$$

transformou o conjunto LI

$$\{(1,-1,0),(0,0,1),(0,1,0)\}$$

no conjunto LD

$$\{(1,-1,0),(0,0,1),(1,0,-\frac{2}{3}),(0,1,0)\}.$$

E isso aconteceu, pois

$$(1,0,-\frac{2}{3}) = 1(1,-1,0) = (-\frac{2}{3})(0,0,1) + 1(0,1,0),$$

ou seja, o vetor $(1,0,-\frac{2}{3})$ é uma combinação linear dos vetores

$$(1,-1,0),(0,0,1),(0,1,0).$$

Temos assim o seguinte resultado:

Teorema 3.44. *Sejam V um espaço vetorial sobre um corpo de escalares $\mathbb{K}$ e $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ um conjunto de vetores em V. Então o conjunto de vetores é LD se, e somente se, um dos vetores for combinação linear dos demais.*

Demonstração: Suponhamos que todos os vetores sejam não nulos, pois se um deles for nulo, então claramente o conjunto é LD e, tomando todos os escalares nulos podemos escrever o vetor nulo como combinção linear dos demais.

($\Longrightarrow$) Suponhamos que o conjunto de vetores não nulos

$$\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$$

seja LD. Então existem escalares, **nem todos nulos**, tais que

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = 0.$$

Suponhamos, para simplificar a notação, que $\alpha_1 \neq 0$. Então

$$\alpha_1 v_1 = 0 - \alpha_2 v_2 - \alpha_3 v_3 - \ldots - \alpha_n v_n = 0 + (-\alpha_2)v_2 + (-\alpha_3)v_3 + \ldots + (-\alpha_n)v_n.$$

Como $\alpha_1 \neq 0$, então obtemos que

$$v_1 = \frac{1}{\alpha_1}[(-\alpha_2)v_2 + (-\alpha_3)v_3 + \ldots + (-\alpha_n)v_n],$$

ou seja,

$$v_1 = \frac{-\alpha_2}{\alpha_1}v_2 + \frac{-\alpha_3}{\alpha_1}v_3 + \ldots + \frac{-\alpha_n}{\alpha_1}v_n,$$

mostrando que o vetor v_1 é combinação linear dos demais.

($\Longleftarrow$) Suponhamos que exista um vetor que é combinação linear dos demais, por simplicidade, seja $v_1 \in V$ esse vetor. Então, existem escalares $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tais que

$$v_1 = \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \ldots + \alpha_n v_n.$$

Daí,

$$-v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \ldots + \alpha_n v_n = 0,$$

ou seja,

$$(-1)v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \ldots + \alpha_n v_n = 0,$$

com pelo menos um dos escalares não nulos ($\alpha_1 = -1 \neq 0$), mostrando que o conjunto de vetores

$$\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$$

é LD e completando a prova do teorema. ■

Na mesma direção no teorema anterior temos o seguinte resultado:

Teorema 3.45. *Sejam V um espaço vetorial sobre um corpo de escalares $\mathbb{K}$ e $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ um conjunto LI de vetores em V. Se o conjunto de vetores*

$$\{v, v_1, v_2, \ldots, v_n\}$$

for LD, então v é combinação linear dos vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

Demonstração: Sejam $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ escalares tais que

$$\alpha v + \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \ldots + \alpha_n v_n = 0.$$

Então como o conjunto de vetores $\{v, v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é LD, pelo menos um dos escalares deve ser não nulo. Afirmamos que $\alpha \neq 0$. De fato, se $\alpha = 0$, então temos que

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha v + \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \ldots + \alpha_n v_n \\ &= 0v + \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \ldots + \alpha_n v_n \cdot \\ &= \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \ldots + \alpha_n v_n. \end{aligned}$$

Mas $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é LI. Portanto,

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_n = 0$$

e, portanto,

$$\alpha = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_n = 0,$$

o que não pode acontecer, pois pelo menos um dos escalares deve ser não nulo. Logo devemos ter que $\alpha \neq 0$ e , assim concluímos que

$$v = \frac{-\alpha_1}{\alpha} v_1 + \frac{-\alpha_2}{\alpha} v_2 + \ldots + \frac{-\alpha_n}{\alpha} v_n,$$

mostrando que v é combinação linear dos vetores

$$\{v_1, v_2, \ldots, v_n\},$$

provando o teorema. ■

Exemplo 3.46. *Vamos verificar se o conjunto de vetores*

$$\{(1,1,0),\ (1,4,5),\ (3,6,5)\}$$

é LI ou LD no espaço euclideano $\mathbb{R}^3$.

De fato: Para verificarmos se o conjunto é LI ou LD em $\mathbb{R}^3$, sejam $x, y, z \in \mathbb{R}$ tais que

$$x(1,1,0) + y(1,4,5) + z(3,6,5) = 0 = (0,0,0).$$

Temos

$$(0,0,0) = (x,x,0) + (y,4y,5y) + (3z,6z,5z) \iff (x + y + 3z, x + 4y + 6z, 5y + 5z) = (0,0,0),$$

ou seja, se, e somente se,

$$\begin{cases} x + y + 3z = 0 \\ x + 4y + 6z = 0 \\ 5y + 5z = 0, \end{cases}$$

que é um sistema linear com 3 equações e 3 variáveis. A matriz dos coeficientes é dada por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \\ 0 & 5 & 5 \end{bmatrix}.$$

Lembrando do capítulo de sistema lineares temos que o sistema terá solução única, nesse caso a solução $(0,0,0)$ se, e somente se, $\det(A) \neq 0$. Calculando este determinante obtemos que

$$\det(A) = 0,$$

portanto o sistema é compatível e indeterminado (pois é um sistema homogêneo) e, portanto, possui solução diferente da solução $(0,0,0)$. Portanto, o conjunto

$$\{(1,1,0),\ (1,4,5),\ (3,6,5)\}$$

é LD em $\mathbb{R}^3$, finalizando este exemplo. □

Observemos que no exemplo anterior as colunas da matriz dos coeficiente do sistema que precisávamos resolver para verificar se o conjunto com três vetores é LI ou LD é exatamente as coordenadas desses três vetores. De forma geral temos que o conjunto de vetores será LD se o determinante da matriz cujas colunas são as coordenadas dos vetores for nulo e será LI se o determinante da matriz for não nulo. Infelizmente só podemos utilizar essa técnica quando estivermos verificando se um conjunto com n vetores no espaço euclideano $\mathbb{R}^n$ é LI ou LD, isto é, a quantidade de vetores precisa ser igual a "dimensão"do espaço euclideano. Vejamos outro exemplo:

Exemplo 3.47. *Vamos encontrar o valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ de tal forma que o conjunto de vetores*

$$\{(1-\alpha, 1+\alpha), (1+\alpha, 1-\alpha)\}$$

seja LI ou LD em $\mathbb{R}^2$.

De fato: Como estamos tentando verificar se um conjunto com dois vetores é lI ou LD no $\mathbb{R}^2$ que tem "dimensão"2 temos que

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} 1-\alpha & 1+\alpha \\ 1+\alpha & 1-\alpha \end{bmatrix} = (1-\alpha)^2 - (1+\alpha)^2 = 1 - 2\alpha + \alpha^2 - (1 + 2\alpha + \alpha^2) = -4\alpha.$$

Logo,

- se $\alpha = 0$, então o conjunto será LD;
- se $\alpha \neq 0$, então o conjunto será LI.

$\square$

3.4 Base e Dimensão

Nesta seção vamos utilizar os conceitos de combinação linear e dependência linear para mostrar que todo elemento de um espaço vetorial finitamente gerado pode ser escrito de forma única como combinação linear de determinados grupos de vetores desse espaço e que esses grupos possuem sempre o mesmo número de vetores.

Definição 3.48. *Seja V um espaço vetorial sobre um corpo de escalares $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Um conjunto de vetores $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$ de V é uma base de V se, e somente se,*

(i) $V = [v_1, v_2, \ldots, v_n]$, *isto é, V é gerado pelos vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$;*

(ii) $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ *é* **LI** *em V.*

Pelos exemplos vistos nas duas seções imediatamente anteriores temos que

- uma base para o espaço euclideano $\mathbb{R}^2$ é
$$\{(1,0),\ (0,1)\};$$
- uma base para o espaço euclideano $\mathbb{R}^3$ é
$$\{(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\};$$
- de forma geral, uma base para o espaço euclideano $n-$dimensional $\mathbb{R}^n$ é
$$\{(1,0,0,\ldots,0),(0,1,0,\ldots,0),\ldots,(0,0,\ldots,0,1,0,\ldots,0),\ldots,(0,0,0,\ldots,0,1)\};$$

- uma base para o espaço vetorial das matrizes quadradas $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ de ordem 2×2 é

$$\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}.$$

Vejamos agora mais alguns exemplos.

Exemplo 3.49. *Vamos mostrar que*

$$\{(1, -1, 0),\ (0, 1, 0),\ (0, 0, 1)\}$$

também é uma base para o espaço euclideano $\mathbb{R}^3$.

De fato: Precisamos verificar os dois itens da Definição 3.48.

- Mostremos que

$$\mathbb{R}^3 = [(1, -1, 0),\ (0, 1, 0),\ (0, 0, 1)].$$

Para isso, observemos inicialmente que como

$$(1, -1, 0),\ (0, 1, 0),\ (0, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$$

e $\mathbb{R}^3$ é um espaço vetorial e, portanto, também é um subespaço vetorial dele mesmo, então

$$[(1, -1, 0),\ (0, 1, 0),\ (0, 0, 1)] \subset \mathbb{R}^3.$$

Por outro lado, se $u = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, devemos encontrar $x, y, z \in \mathbb{R}$ tais que

$$(a, b, c) = x(1, -1, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1),$$

ou seja, se, e somente se,

$$(a, b, c) = (x, -x + y, z),$$

que é equivalente a encontrar $x, y, z \in \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{cases} x = a \\ -x + y = b \\ z = c. \end{cases}$$

Logo, tomando

$$x = a, \; y = b + a \;\; \text{e} \;\; z = c,$$

obtemos que

$$(a, b, c) = a(1, -1, 0) + (b + a)(0, 1, 0) + c(0, 0, 1),$$

ou seja,

$$\mathbb{R}^3 \subset [(1, -1, 0), \; (0, 1, 0), \; (0, 0, 1)].$$

Logo,

$$\mathbb{R}^3 = [(1, -1, 0), \; (0, 1, 0), \; (0, 0, 1)];$$

- vamos mostrar agora que

$$\{(1, -1, 0), \; (0, 1, 0), \; (0, 0, 1)\}$$

é um conjunto **LI** em $\mathbb{R}^3$. Para isso sejam $x, y, z \in \mathbb{R}$ tais que

$$x(1, -1, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1) = (0, 0, 0),$$

ou seja,

$$(x, -x + y, z) = (0, 0, 0).$$

Daí obtemos necessariamente que

$$x = y = z = 0,$$

mostrando que o conjunto $\{(1, -1, 0), \; (0, 1, 0), \; (0, 0, 1)\}$ é **LI** em $\mathbb{R}^3$.

Pelo dois itens acima obtemos que

$$\{(1, -1, 0), \; (0, 1, 0), \; (0, 0, 1)\}$$

também é uma base para o espaço euclideano $\mathbb{R}^3$. □

Exemplo 3.50. *Seja* $\mathbb{P}_2[t] = \{a_0 + a_1 t + a_2 t^2; \; a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ *o espaço vetorial dos polinômios em* t*, de grau menor ou igual a* 2 *sobre o corpo dos números reais, munido das operações: se*

$$p_1(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in P_2[t]$$

e

$$p_2(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 \in P_2[t],$$

e $k \in \mathbb{R}$, *então*

- $p_1(t) = p_2(t) = (a_0 + a_1 t + a_2 t^2) + (b_0 + ba_1 t + b_2 t^2) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)t + (a_2 + b_2)t^2$

- $kp_1(t) = k(a_0 + a_1 t + a_2 t^2) = (ka_0) + (ka_1)t + (ka_2)t^2.$

Então

$$\{1,\ t,\ t^2\}$$

é uma base para $\mathbb{P}_2[t]$.

De fato: Precisamos verificar os dois itens da Definição 3.48.

- Mostremos que

$$\mathbb{P}_2[t] = [1,\ t,\ t^2].$$

Para isso, observemos inicialmente que como

$$1 = 1 + 0t + 0t^2,\ t = 0 + 1t + 0t^2,\ t^2 = 0 + 0t + 1t^2 \in \mathbb{P}_2[t]$$

e $\mathbb{P}_2[t]$ é um espaço vetorial e, portanto, também é um subespaço vetorial dele mesmo, então

$$[1,\ t,\ t^2] \subset \mathbb{P}_2[t].$$

Por outro lado, se $p_1(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in P_2[t]$, devemos encontrar $x, y, z \in \mathbb{R}$ tais que

$$p_1(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 = x\ (1) + y\ (t) + z\ (t^2).$$

Tomando

$$x = a_0,\ y = a_1 \ \text{ e } \ z = a_2,$$

obtemos,usando a igualdade de funções, que

$$p_1(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 = a_0\ (1) + a_1\ (t) + a_2\ (t^2),$$

ou seja,

$$\mathbb{P}_2[t] \subset [1,\ t,\ t^2].$$

Logo,

$$\mathbb{P}_2[t] = [1,\ t,\ t^2].$$

- vamos mostrar agora que

$$\{1,\ t,\ t^2\}$$

é um conjunto **LI** em $\mathbb{P}_2[t]$. Para isso sejam $x, y, z \in \mathbb{R}$ tais que

$$x\ 1 + y\ (t) + z\ (t^2) = 0 + 0t + 0t^2,$$

ou seja,

$$x + yt + zt^2 = 0 + 0t + 0t^2,$$

Daí, usando a igualdade de funções, obemos necessariamente que

$$x = y = z = 0,$$

mostrando que o conjunto $\{1,\ t,\ t^2\}$ é **LI** em $\mathbb{P}_2[t]$.

Pelo dois itens acima obtemos que

$$\{1,\ t,\ t^2\}$$

é uma base para o espaço $\mathbb{P}_2[t]$. □

Vamos agora mostrar que todo espaço vetorial finitamente gerado possui uma base e que qualquer base de um espaço vetorial finitamente gerado possui o mesmo número de vetores.

Lema 3.51. *Sejam V um espaço vetorial sobre um corpo de escalares $\mathbb{K}$ e $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ vetores não nulos geradores de V, isto é,*

$$V = [v_1, v_2, \ldots, v_n].$$

Então, dentre estes geradores podemos extrair uma base de V.

Demonstração: Como

$$V = [v_1, v_2, \ldots, v_n],$$

se

$$\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$$

for **LI** em V, então

$$\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$$

é uma base de V, e o lema está demonstrado. Suponhamos então que

$$\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$$

é **LD** em V. O Teorema 3.44 implica então que um dos vetores é combinação linear dos demais. Sem perda da generalidade suponhamos que

$$v_n = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_{n-1} v_{n-1}.$$

Dessa forma temos ainda que

$$V = [v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}],$$

isto é, $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ ainda são geradores de V.

De fato: Claramente

$$[v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}] \subset V.$$

Por outro lado, para todo $v \in V$, como

$$V = [v_1, v_2, \ldots, v_n],$$

existem escalares $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ tais que

$$v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ldots + x_{n-1} v_{n-1} + x_n v_n.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
v &= x_1v_1 + x_2v_2 + \ldots + x_{n-1}v_{n-1} + x_nv_n \\
&= x_1v_1 + x_2v_2 + \ldots + x_{n-1}v_{n-1} + x_n(\alpha_1v_1 + \alpha_2v_2 + \ldots + \alpha_{n-1}v_{n-1}) \\
&= x_1v_1 + x_2v_2 + \ldots + x_{n-1}v_{n-1} + x_n(\alpha_1v_1) + x_n(\alpha_2v_2) + \ldots + x_n(\alpha_{n-1}v_{n-1}) \\
&= x_1v_1 + x_2v_2 + \ldots + x_{n-1}v_{n-1} + (x_n\alpha_1)v_1 + (x_n\alpha_2)v_2 + \ldots + (x_n\alpha_{n-1})v_{n-1} \\
&= (x_1 + x_n\alpha_1)v_1 + (x_2 + x_n\alpha_2)v_2 + \ldots + (x_{n-1} + x_n\alpha_{n-1})v_{n-1},
\end{aligned}$$

mostrando que

$$V \subset [v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}].$$

Assim,

$$V = [v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}].$$

□

Se

$$\{v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}\}$$

for **LI** em V, então

$$\{v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}\}$$

é uma base de V, e o lema está demonstrado. Se

$$\{v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}\}$$

for **LD** em V, com o mesmo raciocínio acima, podemos extrair um vetor, digamos v_{n-1}, que é combinação linear dos demais e ainda obtermos que

$$V = [v_1, v_2, \ldots, v_{n-2}].$$

Procedendo da mesma forma um número finito de vezes, obtemos que

$$V = [v_1, v_2, \ldots, v_{n-r}], \quad r \leq n$$

e tal que

$$\{v_1, v_2, \ldots, v_{n-r}\}$$

é **LI** em V, mostrando que

$$\{v_1, v_2, \ldots, v_{n-r}\}$$

é uma base de V, para $r \leq n$, completando a demonstração deste lema.

Observemos que se no processo acima tivermos $r = 1$, temos que

$$V = [v_1]$$

e

$$\{v_1\}$$

é **LI** em V, pois $v_1 \neq 0_V$, mostrando que de fato o processo se repete um número finito de vezes. ■

Uma decorrência imediata do Lema 3.51 é que todo espaço vetorial finitamente gerado possui uma base. Vejamos um exemplo deste lema:

Exemplo 3.52. *Considere $V = \mathbb{R}^2$ o espaço euclideano bidimensonal. Vamos mostrar que*

$$\mathbb{R}^2 = [(1,1),\ (2,1),\ (3,2)]$$

e depois que podemos escolher uma base de $\mathbb{R}^2$ dentre estes três vetores.

De fato: Observemos inicialmente que como

$$(1,1),\ (2,1),\ (3,2) \in \mathbb{R}^2$$

e $\mathbb{R}^2$ é um espaço vetorial e, portanto, é um subespaço vetorial dele mesmo, então

$$[(1,1),\ (2,1),\ (3,2)] \subset \mathbb{R}^2.$$

Por outro lado, para todo $u = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ temos que

$$u = (a,b) = x(1,1) + y(2,1) + z(3,2) = (x + 2y + 3z, x + y + 2z),$$

se, e somente se,

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = a \\ x + y + 2z = b. \end{cases}$$

Que é um sistema com duas equações e três variáveis: x, y e z. Resolvendo esse sistema obtemos, por exemplo, que

$$z = a, \; y = -b \; \text{ e } \; x = -2a + 2b.$$

Dessa forma,

$$u = (a, b) = (-2a + 2b)(1, 1) + (-b)(2, 1) + a(3, 2),$$

mostrando então que

$$\mathbb{R}^2 \subset [(1, 1), \; (2, 1), \; (3, 2)].$$

Assim,

$$\mathbb{R}^2 = [(1, 1), \; (2, 1), \; (3, 2)].$$

Agora, observemos que

$$(3, 2) = (1, 1) + (2, 1) = 1(1, 1) + 1(2, 1),$$

isto é, o vetor $(3, 2)$ é uma combinação linear dos vetores $(1, 1)$ e $(2, 1)$. Logo,

$$\mathbb{R}^2 = [(1, 1), \; (2, 1)]$$

e se $x, y \in \mathbb{R}$ são tais que

$$x(1, 1) + y(2, 1) = (0, 0),$$

então obtemos necessariamente que $x = y = 0$ (verifique esse fato!), ou seja,

$$\{(1, 1), \; (2, 1)\}$$

é **LI** em $\mathbb{R}^2$ e, portanto,

$$\{(1, 1), \; (2, 1)\}$$

é uma base para $\mathbb{R}^2$. $\square$

Não faremos a demonstração do próximo lema por ser muito extensa, aqueles alunos que desejam se aprofundar podem encontrar uma demonstração no livro 1 da Bibliografia apresentada no começo destas notas nas páginas 118 e 119.

Lema 3.53. *Seja V um espaço vetorial sobre um corpo de escalares $\mathbb{K}$ e $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ vetores não nulos geradores de V, isto é,*

$$V = [v_1, v_2, \ldots, v_n].$$

Então, qualquer conjunto com mais do que n vetores é **LD**.

O Lema 3.53 nos diz que se V é gerado por n vetores, então para um conjunto de vetores ser **LI** em V este conjunto de vetores pode ter no máximo n vetores. Vejamos uma aplicação imediata deste resultado:

Exemplo 3.54. *Seja $V = \mathbb{R}^3$ o espaço euclideano tridimensional. Vamos mostrar que o conjunto de vetores*

$$\{(-\frac{1}{2}, \frac{5}{3}, \frac{4}{5}),\ (\frac{\sqrt{3}}{2}, -\sqrt{2}, \frac{\sqrt{3}}{3}),\ (1,3,5),\ (100,100,100)\}$$

é **LD** *em $\mathbb{R}^3$.*

De fato: Sabemos que

$$\mathbb{R}^3 = [(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)].$$

Logo o Lema 3.53 implica necessariamente que

$$\{(-\frac{1}{2}, \frac{5}{3}, \frac{4}{5}),\ (\frac{\sqrt{3}}{2}, -\sqrt{2}, \frac{\sqrt{3}}{3}),\ (1,3,5),\ (100,100,100)\}$$

é **LD** em $\mathbb{R}^3$, pois este conjunto possui 4 vetores. $\square$

Com o último lema acima podemos mostrar que qualquer base de um espaço vetorial finitamente gerado, que existem pelo Lema 3.51, possui sempre o mesmo número de elementos.

Teorema 3.55 (Teorema da Invariância). *Seja V um espaço vetorial sobre um corpo de escalares que é finitamente gerado, isto é, existem $v_1, v_2, \ldots, v_r \in V$ vetores em V tais que*

$$V = [v_1, v_2, \ldots, v_r].$$

Então qualquer base de V possui sempre o mesmo número de elementos.

Demonstração: Sejam

$$\{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \ \text{ e } \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$$

duas bases de V. Observemos que o Lema 3.53 implica imediatamente que

$$m, n \leq r,$$

pois para os dois conjuntos de vetores serem base de V eles precisam ser **LI** em V e, portanto, não podem ter mais do que r elementos. Temos também que:

1. Como

   $$V = [u_1, u_2, \ldots, u_n] \text{ e } \{w_1, w_2, \ldots, w_m\} \text{ é } \textbf{LI} \text{ em } V,$$

   então o Lema 3.53 implica que

   $$m \leq n.$$

2. Como

   $$V = [w_1, w_2, \ldots, w_m] \text{ e } \{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \text{ é } \textbf{LI} \text{ em } V,$$

   então o Lema 3.53 implica que

   $$n \leq m.$$

Logo os dois itens acima implica que

$$n = m,$$

mostrando que quaisquer base de V possuem sempre o mesmo número de elementos. ■

O Teorema da Invariância motiva a seguinte definição:

Definição 3.56. *Seja V um espaço vetorial finitamente gerado. O número de elementos de qualquer base de V é chamado de dimensão de V e será denotado por* $\dim(V)$.

Pelo que vimos no começo desta seção temos que

- $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$, pois $\{(1,0),\ (0,1)\}$ é uma base para $\mathbb{R}^2$;
- $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, pois $\{(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\}$ é uma base para $\mathbb{R}^3$;
- $\dim(\mathbb{R}^n) = n$, pois

  $$\{(1,0,0,\ldots,0), (0,1,0,\ldots,0), \ldots, (0,0,\ldots,0,1,0,\ldots,0), \ldots, (0,0,0,\ldots,0,1)\}$$

  é uma base para $\mathbb{R}^n$;

- $\dim(\mathbb{M}_2(\mathbb{R})) = 4$, pois $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ é uma base para $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$;
- $\dim(\mathbb{P}_2[t]) = 3$, pois $\{1,\ t,\ t^2\}$ é uma base para $\mathbb{P}_2[t]$.

Vamos agora estudar algumas propriedades inerentes ao conceito de base e dimensão de espaços vetoriais finitamente gerados.

Teorema 3.57. *Seja V um espaço vetorial finitamente gerado. Então qualquer conjunto* **LI** *em V pode ser completado para um base de V.*

Demonstração: Como V é um espaço vetorial finitamente gerado, então V possui uma base. Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\dim(V) = n.$$

O Lema 3.53 implica que qualquer conjunto **LI** de vetores possui número menor que n de elementos. Seja então

$$\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}, \quad \text{com} \quad r \leq n$$

um subconjunto **LI** de V.

Se

$$V = [v_1, v_2, \ldots, v_r],$$

então $r = n$, $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é uma base de V e o teorema está provado.

Se

$$V \neq [v_1, v_2, \ldots, v_r],$$

então existe $v_{r+1} \in V$ tal que

$$v_{r+1} \notin [v_1, v_2, \ldots, v_r]$$

e, portanto,

$$\{v_1, v_2, \ldots, v_r, v_{r+1}\}$$

é **LI** em V.

De fato: Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_r, x_{r+1} \in \mathbb{K}$ tais que

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ldots + x_r v_r + x_{r+1} v_{r+1} = 0_V.$$

Devemos mostrar que $x_1 = x_2 = \ldots = x_r = x_{r+1} = 0$. Suponhamos, por absurdo, que $x_{r+1} \neq 0$, então obtemos que

$$v_{r+1} = (-\frac{x_1}{x_{r+1}})v_1 + (-\frac{x_2}{x_{r+1}})v_2 + \ldots + (-\frac{x_r}{x_{r+1}})v_r,$$

mostrando que v_{r+1} é uma combinação linear dos vetores $v_1, v_2, \ldots, v_r$, o que é um absurdo. Logo devemos ter $x_{r+1} = 0$ e daí obtemos que

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ldots + x_r v_r + 0 v_{r+1} = 0_V,$$

ou seja,

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ldots + x_r v_r = 0_V.$$

Mas $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ é **LI** em V e, portanto, devemos ter necessariamente que

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_r = 0.$$

Portanto,

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_r = x_{r+1} = 0,$$

mostrando que $\{v_1, v_2, \ldots, v_r, v_{r+1}\}$ é **LI** em V. $\square$

Se

$$V = [v_1, v_2, \ldots, v_r, v_{r+1}],$$

então o teorema está demonstrado. Caso contrário existiria $v_{r+2} \in V$ tal que

$$v_{r+1} \notin [v_1, v_2, \ldots, v_r, v_{r+1}]$$

e com o mesmo raciocínio utilizado acima mostramos que

$$\{v_1, v_2, \ldots, v_r, v_{r+1}, v_{r+2}\}$$

é **LI** em V. Se

$$V = [v_1, v_2, \ldots, v_r, v_{r+1}, v_{r+2}],$$

então o teorema esta demonstrado. Caso contrário prosseguimos com a mesma argumentação até obtermos

$$\{v_1, v_2, \ldots, v_r, v_{r+1}, v_{r+2}, \ldots, v_n\}$$

LI em V. Vamos mostrar agora que temos necessarimante, neste caso, que

$$V = [v_1, v_2, \ldots, v_r, v_{r+1}, v_{r+2}, \ldots, v_n].$$

De fato: Claramente

$$[v_1, v_2, \ldots, v_r, v_{r+1}, v_{r+2}, \ldots, v_n] \subset V.$$

Por outro lado, para todo $v \in V$, como $\dim(V) = n$ o Lema 3.53 implica que

$$\{v_1, v_2, \ldots, v_r, v_{r+1}, v_{r+2}, \ldots, v_n, v\}$$

é **LD** em V e, portanto, segue do Teorema 3.45 que existem escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tais que

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_r v_r + \alpha_{r+1} v_{r+1} \ldots + \alpha_n v_n,$$

mostrando que

$$v \in [v_1, v_2, \ldots, v_r, v_{r+1}, v_{r+2}, \ldots, v_n],$$

ou seja, que

$$V \subset [v_1, v_2, \ldots, v_r, v_{r+1}, v_{r+2}, \ldots, v_n].$$

Portanto,

$$V = [v_1, v_2, \ldots, v_r, v_{r+1}, v_{r+2}, \ldots, v_n]. \qquad \square$$

Portanto,

$$\{v_1, v_2, \ldots, v_r, v_{r+1}, v_{r+2}, \ldots, v_n\}$$

é uma base de V e o teorema está demonstrado. ■

Antes de fazermos exemplos, o próximo resultado segue imediatamente do que foi feito na demonstração do Teorema do Completamento e será bastante utilizado nos exemplos.

Corolário 3.58. *Seja V um espaço vetorial finitamente gerado com* $\dim(V) = n$. *Então qualquer conjunto* **LI** *em V com n vetores forma uma base para V.*

Demonstração: Seja

$$B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$$

um conjunto **LI** em V. Vamos mostrar que B é de fato uma base para V. Claramente

$$[v_1, v_2, \ldots, v_n] \subset V.$$

Por outro lado, para todo $v \in V$, como $\dim(V) = n$ o Lema 3.53 implica que

$$\{v_1, v_2, \ldots, v_n, v\}$$

é **LD** em V e, portanto, segue do Teorema 3.45 que existem escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tais que

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n,$$

mostrando que

$$v \in [v_1, v_2, \ldots, v_n],$$

ou seja, que

$$V \subset [v_1, v_2, \ldots, v_n].$$

Portanto,

$$V = [v_1, v_2, \ldots, \ldots, v_n] = [B].$$

Portanto, B é **LI** em V e gera todo o espaço V. Portanto, B é uma base de V e o corolário está demonstrado. ■

Exemplo 3.59. *Usando o Corolário do Teorema do Completamento vamos encontrar os valores de $m \in \mathbb{R}$ para que o conjunto*

$$B = \{(3, 5m, 1),\ (2, 0, 4),\ (1, m, 3)\}$$

seja uma base para o espaço euclideano $\mathbb{R}^3$.

De fato: Como $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, para mostrarmos que B é uma base para $\mathbb{R}^3$ precisamos mostrar apenas que B é um conjunto **LI** em V. Mas B possui 3 (três) elementos em um espaço vetorial com dimensão 3. Logo para mostrarmos que B é **LI** precisamos encontar os valores de $m \in \mathbb{R}$ tais que o determinante

$$\det \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5m & 0 & m \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

seja não nulo. Temos

$$\det \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5m & 0 & m \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} = 2m + 20m - 12m - 30m = 20m.$$

Logo B será uma base de $\mathbb{R}^3$ se, e somente se, $20m \neq 0$, ou seja, se, e somente se, $m \neq 0$. $\square$

Vamos apresentar agora um processo prático para determinar uma base para subespaços vetorias do espaço euclideano $\mathbb{R}^n$.

Vamos utilizar o Lema 3.51 para encontrarmos uma base para um subespaço vetorial U de $\mathbb{R}^n$. Precisamos então extrair vetores **LI** dentre os geradores de U de tal forma que os demais continuem gerando U. A idéia então é descobrir qual desses vetores podemos excluir. Vamos proceder da seguinte forma:

- primeiro contruímos uma matriz cujas linhas são as coordenadas dos vetores;
- escalonamos a matriz guardando na memória qual linha correspondente a cada vetor;
- excluímos os vetores cujas coordenadas estão associadas às linhas nulas que porventura aparecem na matriz escalonada.
- a base de U será formada pelo vetores cujas coordenadas correspondem às linhas não nulas da matriz escalonada.

Para completar a base desse subespaço para uma base do espaço $\mathbb{R}^n$. Procedemos da seguinte forma:

- completamos a matriz escalonada, obtida no processo anterior, com os vetores da base canônica, do respectivo espaço euclideano $\mathbb{R}^n$, até obtermos uma matriz, ainda na forma escalonada, quadrada de ordem $n \times n$;

- a base do espaço euclideano $\mathbb{R}^n$ será então composta pelos geradores de U que correponderam à linhas não nulas da matriz escalonada obtida no processo anterior adicionado dos vetores da base canônica de $\mathbb{R}^n$ adicionados no item anterior.

Vejamos um exemplo deste processo:

Exemplo 3.60. *Vamos encontrar uma base para o subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vetores*

$$\{(2,1,1,0),\ (1,0,1,2),\ (0,-1,1,4)\},$$

que contenha alguns desses vetores. Depois vamos calcular a dimensão do subespaço gerado pelos três vetores acima e completar esta base para uma base de $\mathbb{R}^4$.

De fato: Considere

$$U = [(2,1,1,0),\ (1,0,1,2),\ (0,-1,1,4)].$$

então U é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$. Consideremos então a matriz

$$A = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array}$$

Vamos agora escalonar a matriz A. Temos

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{array}{c} v_2 \\ v_1 \\ v_3 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{array}{c} v_2 \\ v_1 \\ v_3 \end{array} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{array}{c} v_2 \\ v_1 \\ v_3 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{array}{c} v_2 \\ v_1 \\ v_3 \end{array} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} v_2 \\ v_1 \\ v_3 \end{array}.$$

Dessa forma vamos excluir o vetor v_3, pois a linha associada às coordenadas deste vetor na matriz escalonada é uma linha nula. O Lema 3.51 implica então que

$$U = [(2,1,1,0),\ (1,0,1,2)],$$

pois o vetor v_3 é combinação linear dos demais vetores. De fato, temos que

$$v_3 = (0,-1,1,4) = (-1)(2,1,1,0) + (2)(1,0,1,2) = (-1)v_1 + 2v_2.$$

Também, os vetores

$$\{(2,1,1,0),\ (1,0,1,2)\}$$

são **LI** em $\mathbb{R}^4$.

De fato: Sejam $x, y \in \mathbb{R}$ tais que

$$x(2,1,1,0) + y(1,0,1,2) = (0,0,0,0).$$

então

$$(2x+y, x, x+y, 2y) = (0,0,0,0),$$

ou seja, se, e somente se,

$$x = y = 0,$$

mostrando que $\{(2,1,1,0),\ (1,0,1,2)\}$ é **LI** em $\mathbb{R}^4$. $\square$

Portanto,

$$\{(2,1,1,0),\ (1,0,1,2)\}$$

é uma base para o subespaço vetorial

$$U = [(2,1,1,0),\ (1,0,1,2),\ (0,-1,1,4)]$$

de $\mathbb{R}^4$. Dessa forma,

$$\dim([(2,1,1,0),\ (1,0,1,2),\ (0,-1,1,4)]) = 2.$$

Vamos agora completar a base encontrada para U para uma base de $\mathbb{R}^4$. Temos

$$A = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} v_2 \\ v_1 \\ v_3 \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \end{bmatrix} \begin{array}{c} v_2 \\ v_1 \end{array}$$

Logo, completando com vetores da base canônica de forma a obtermos uma matriz quadrada, obtemos que

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} v_2 \\ v_1 \\ e_3 \\ e_4 \end{array},$$

onde $e_3 = (0,0,1,0)$ e $e_4 = (0,0,0,1)$ são vetores da base canônica de $\mathbb{R}^4$. Assim,

$$\{(2,1,1,0),\ (1,0,1,2),\ (0,0,1,0),\ (0,0,0,1)\}$$

é uma base de $\mathbb{R}^4$.

De fato: Temos que

$$\det(B) = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 1 \neq 0$$

e como a matriz A é equivalente a matriz B temos que

$$\det(A) = \det(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}) \neq 0$$

e, portanto,

$$\{(2,1,1,0),\ (1,0,1,2),\ (0,0,1,0),\ (0,0,0,1)\}$$

é **LI** em $\mathbb{R}^4$ e $\dim(\mathbb{R}^4)$ portanto,

$$\{(2,1,1,0),\ (1,0,1,2),\ (0,0,1,0),\ (0,0,0,1)\}$$

é uma base de $\mathbb{R}^4$. □

Completamos dessa forma o exemplo. □

Vamos agora apresentar um resultado que nos fornece uma fórmula para calcular a dimensão da soma e da interesecção de dois subespaços vetoriais. Comecemos com o seguinte lema:

Lema 3.61. *Sejam V um espaço vetorial sobre um corpo de escalares $\mathbb{K}$, tal que $\dim(V) = n$ e U um subespaço vetorial de V. Então $\dim(U) \leq n$ e se $\dim(U) = n$, então $U = V$.*

Demonstração: Sejam

$$\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$$

uma base de V e $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\dim(U) = m.$$

então U é gerado por um conjunto de m vetores que são **LI** em V. Então o Lema 3.53 implica que devemos ter necessariamente

$$\dim(U) = m \leq n = \dim(V).$$

Agora se $\dim(U) = n$, então

$$\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$$

é uma base contendo n vetores **LI** em V que geral U. Mas $\dim(V) = n$. Logo, o Corolário 3.58 implica que

$$\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$$

também é uma base de V. Assim,

$$U = [u_1, u_2, \ldots, u_n] = V,$$

provando o lema. ■

Teorema 3.62. *Sejam V um espaço vetorial sobre um corpo de escalares $\mathbb{K}$, com $\dim(V) = n$ e U, W dois subespaços vetoriais de V. Então $U + W$ tem dimensão finita e*

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W).$$

Demonstração: Primeiro observemos que como U, W são subespaços vetoriais de V, então eles são espaços vetorias com as mesmas operações definidas em V e como $U \cap W$ é subespaço vetorial de V e $U \cap W \subset U, W$, então $U \cap W$ é subespaço vetorial tanto de U, quanto de W.

Como U, W são subespaços vetoriais de V e $\dim(V) = n$ então U, W, $U + W$ e $U \cap W$ possuem dimensão finita e todas menores ou iguais à dimensão, $n = \dim(V)$, de V pelo Lema 3.61. Suponhamos que

- $\dim(U \cap W) = r$ e que
$$\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$$
seja uma base de $U \cap W$;
- $\dim(U) = l$;
- $\dim(W) = m$.

Como $U \cap W$ é um subespaço vetorial de U e $\dim(U) = l$, o Teorema do Completamento implica que existem $u_{r+1}, u_{r+2}, \ldots, u_l \in V$ tais que

$$\{v_1, v_2, \ldots, v_r, u_{r+1}, u_{r+2}, \ldots, u_l\}$$

é uma base de U. Ainda, como $U \cap W$ é um subespaço vetorial de W e $\dim(W) = m$, o Teorema do Completamento implica que existem $w_{r+1}, w_{r+2}, \ldots, w_m \in V$ tais que

$$\{v_1, v_2, \ldots, v_r, w_{r+1}, w_{r+2}, \ldots, w_m\}$$

é uma base de W. Vamos mostrar que

$$B = \{v_1, v_2, \ldots, v_r, u_{r+1}, u_{r+2}, \ldots, u_l, w_{r+1}, w_{r+2}, \ldots, w_m\}$$

é uma base $U + W$.

De fato:

- Como
$$U \subset U + W \ \text{ e } \ W \subset U + W,$$
pois $0_V \in U, W$, então
$$B \subset U + W$$
e, portanto, como $U + W$ é um subespaço vetorial de V, segue que
$$[B] = [v_1, v_2, \ldots, v_r, u_{r+1}, u_{r+2}, \ldots, u_l, w_{r+1}, w_{r+2}, \ldots, w_m] \subset U + W.$$
Por outro lado, para todo $u+w \in U+W$, existem escalares $a_1, a_2, \ldots, a_r, a_{r+1}, a_{r+2}, \ldots, a_l \in \mathbb{K}$ tais que
$$u = a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_rv_r + a_{r+1}u_{r+1} + a_{r+2}u_{r+2} + \ldots + a_lu_l$$
e também existe escalares $b_1, b_2, \ldots, b_r, b_{r+1}, b_{r+2}, \ldots, b_m \in \mathbb{K}$ tais que
$$w = b_1v_1 + b_2v_2 + \ldots + b_rv_r + b_{r+1}w_{r+1} + b_{r+2}w_{r+2} + \ldots + b_mw_m.$$
Logo,
$$\begin{aligned} u + w &= (a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_rv_r + a_{r+1}u_{r+1} + a_{r+2}u_{r+2} + \ldots + a_lu_l) \\ &\quad + (b_1v_1 + b_2v_2 + \ldots + b_rv_r + b_{r+1}w_{r+1} + b_{r+2}w_{r+2} + \ldots + b_mw_l) \\ &= ((a_1 + b_1)v_1 + \ldots + (a_r + b_r)v_r) + (a_{r+1}u_{r+1} + a_{r+2}u_{r+2} + \ldots + a_lu_l) \\ &\quad + (b_{r+1}w_{r+1} + b_{r+2}w_{r+2} + \ldots + b_mw_m) \\ &\in [v_1, v_2, \ldots, v_r, u_{r+1}, u_{r+2}, \ldots, u_l, w_{r+1}, w_{r+2}, \ldots, w_m], \end{aligned}$$
mostrando que
$$U + W \subset [v_1, v_2, \ldots, v_r, u_{r+1}, u_{r+2}, \ldots, u_l, w_{r+1}, w_{r+2}, \ldots, w_m] = [B]$$
e, portanto, mostrando que
$$U + W = [v_1, v_2, \ldots, v_r, u_{r+1}, u_{r+2}, \ldots, u_l, w_{r+1}, w_{r+2}, \ldots, w_m] = [B].$$

- Sejam escalares

$$x_1, \ldots, x_r, y_{r+1}, \ldots, y_l, z_{r+1}, \ldots, z_m \in \mathbb{K}$$

tais que

$$x_1 v_1 + \ldots + x_r v_r + y_{r+1} u_{r+1} + \ldots y_l u_l + z_{r+1} w_{r+1} + \ldots + z_m w_m = 0_V. \tag{3.2}$$

Para que B seja **LI** devemos mostrar que

$$x_1 = \ldots = x_r = y_{r+1} = \ldots = y_l = z_{r+1} = \ldots = z_m = 0.$$

Consideremos o seguinte vetor

$$u = x_1 v_1 + \ldots + x_r v_r + y_{r+1} u_{r+1} + \ldots + y_l u_l.$$

Como

$$\{v_1, \ldots, v_r, u_{r+1}, \ldots, u_l\}$$

é uma base de U, então

$$u \in U.$$

Mas (3.2) implica então que

$$\begin{aligned} 0_V &= x_1 v_1 + \ldots + x_r v_r + y_{r+1} u_{r+1} + \ldots y_l u_l + z_{r+1} w_{r+1} + \ldots + z_m w_m \\ &= u + z_{r+1} w_{r+1} + \ldots + z_m w_m, \end{aligned}$$

ou seja,

$$u = -z_{r+1} w_{r+1} - \ldots - z_m w_m \in W.$$

Logo,

$$u = x_1 v_1 + \ldots + x_r v_r + y_{r+1} u_{r+1} + \ldots + y_l u_l \in U \cap W.$$

Então, existem escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{K}$ tais que

$$u = x_1 v_1 + \ldots + x_r v_r + y_{r+1} u_{r+1} + \ldots y_l u_l = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_r v_r.$$

Daí,

$$(x_1 - \alpha_1) v_1 + \ldots + (x_r - \alpha_r) v_r + y_{r+1} u_{r+1} + \ldots + y_l u_l = 0_V$$

e como

$$\{v_1, \ldots, v_r, u_{r+1}, \ldots, u_l\}$$

é uma base de U então este conjunto é **LI**, então obtemos que

$$(x_1 - \alpha_1) = \ldots = (x_r - \alpha_r) = y_{r+1} = \ldots = y_l = 0.$$

Voltando em (3.2) obtemos então que

$$\begin{aligned} 0_V &= x_1v_1 + \ldots + x_rv_r + y_{r+1}u_{r+1} + \ldots y_lu_l + z_{r+1}w_{r+1} + \ldots + z_mw_m \\ &= x_1v_1 + \ldots + x_rv_r + z_{r+1}w_{r+1} + \ldots + z_mw_m \end{aligned}$$

e como

$$\{v_1, \ldots, v_r, w_{r+1}, \ldots, w_m\}$$

é uma base de W então este conjunto é **LI**, então obtemos que

$$x_1 = \ldots = x_r = z_{r+1} = \ldots = z_m = 0.$$

Portanto, temos que

$$x_1 = \ldots = x_r = y_{r+1} = \ldots = y_l = z_{r+1} = \ldots = z_m = 0,$$

mostrando que

$$B = \{v_1, v_2, \ldots, v_r, u_{r+1}, u_{r+2}, \ldots, u_l, w_{r+1}, w_{r+2}, \ldots, w_m\}$$

é **LI** em V.

Os dois itens acima mostram que de fato

$$B = \{v_1, v_2, \ldots, v_r, u_{r+1}, u_{r+2}, \ldots, u_l, w_{r+1}, w_{r+2}, \ldots, w_m\}$$

é uma base de $U + W$. □

Agora, como

$$B = \{v_1, v_2, \ldots, v_r, u_{r+1}, u_{r+2}, \ldots, u_l, w_{r+1}, w_{r+2}, \ldots, w_m\}$$

é uma base de $U+W$, então,

$$\begin{aligned}\dim(U+W) &= r+(l-r)+m(-r)\\ &= l+m-r\\ &= \dim(U)+\dim(W)-\dim(U\cap W),\end{aligned}$$

provando o teorema. ∎

Vejamos mais um exemplo.

Exemplo 3.63. *No espaço euclideano $\mathbb{R}^4$ consideremos os seguintes subespaços vetoriais*

$$U=[(1,0,1,0),\ (0,1,0,0)]$$

e

$$W=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4;\ x+y=0\}.$$

Vamos calcular as dimensões dos subespaços U, W, $U\cap W$ e $U+W$ e verificar se $\mathbb{R}^4=U\oplus W$.

De fato: Para encontramos um base para U considere

$$A=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}$$

que já está na forma escalonada, então

$$B_U=\{(1,0,1,0),\ (0,1,0,0)\}$$

é uma base de U e, portanto,

$$\dim(U)=2.$$

Para o subespaço vetorial W vamos inicialmente encontrar seus geradores. Temos que

$$\begin{aligned}u=(x,y,z,t)\in W &\Longleftrightarrow x+y=0\\ &\Longleftrightarrow u=(x,-x,z,t)\\ &\Longleftrightarrow u=(x,-x,0,0)+(0,0,z,0)+(0,0,0,t)\\ &\Longleftrightarrow u=x(1,-1,0,0)+z(0,0,1,0)+t(0,0,0,1).\end{aligned}$$

Dessa forma, acabamos de mostrar que

$$W \subset [(1,-1,0,0),\ (0,0,1,0),\ (0,0,0,1)].$$

Mas como

$$(1,-1,0,0),\ (0,0,1,0),\ (0,0,0,1) \in W$$

e W é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$, então

$$[(1,-1,0,0),\ (0,0,1,0),\ (0,0,0,1)] \subset W,$$

mostrando então que

$$W = [(1,-1,0,0),\ (0,0,1,0),\ (0,0,0,1)]$$

e $(1,-1,0,0)$, $(0,0,1,0)$ e $(0,0,0,1)$ são os geradores de W. Vamos então calcular uma base de W. Temos que

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

que também está na forma escalonada. Logo,

$$B_W = \{(1,-1,0,0),\ (0,0,1,0),\ (0,0,0,1)\}$$

é uma base de W e, portanto,

$$\dim(W) = 3.$$

Pelo que vimos no útimo teorema temos que

$$U + W = [(1,0,1,0),\ (0,1,0,0),\ (1,-1,0,0),\ (0,0,1,0),\ (0,0,0,1)] = [B_U \cup B_W].$$

Vamos calcular então uma base para $U + W$. Temos

$$C = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{array}.$$

Escalonando esta matriz obtemos que

$$C = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{array} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_1 \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_1 \end{array} = D.$$

Como D é uma matriz escalonada, então

$$B = \{u_1, u_2, w_2, w_3\} = \{(1,0,1,0),\ (0,1,0,0),\ (0,0,1,0),\ (0,0,0,1)\}$$

é uma base de $U+W$ e, portanto,

$$\dim(U+W) = 4.$$

Como $\dim(U+W) = 4$ e $U+W$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$ que tem dimensão igual a 4, então o Lema 3.61 implica que

$$\mathbb{R}^4 = U + W.$$

Agora, utilizando o Teorema 3.62 temos que

$$\dim(U \cap W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U+W) = 2 + 3 - 4 = 1.$$

Como $\dim(U \cap W) = 1$, então

$$U \cap W \neq \{(0,0,0,0)\},$$

mostrando que

$$\mathbb{R}^4 \neq U \oplus W.$$

Pelo que vimos até aqui já fizemos tudo que precisávamos fazer. Vamos calcular uma base para $U \cap W$ apenas como um exercício adicional. Temos que

$$\begin{aligned}
v = (x,y,z,t) \in U \cap W &\iff v = (x,y,z,t) \in [(1,0,1,0),\ (0,1,0,0)] \ \text{ e } \ v = (x,-x,z,t) \\
&\iff v = (x,y,z,t) = a(1,0,1,0) + b(0,1,0,0) \ \text{ e } \ v = (x,-x,z,t) \\
&\iff v = (x,y,z,t) = (a,0,a,0) + (0,b,0,0) \ \text{ e } \ v = (x,-x,z,t) \\
&\iff v = (x,y,z,t) = (a,b,a,0) \ \text{ e } \ v = (x,-x,z,t) \\
&\iff v = (x,-x,z,t) = (a,b,a,0) \\
&\iff x = z \ \text{ e } \ t = 0 \\
&\iff v = (x,-x,x,0),\ x \in \mathbb{R}. \\
&\iff v = x(1,-1,1,0),\ x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$U \cap W \subset [(1,-1,1,0)]$$

e como

$$(1,-1,1,0) \subset U \cap W,$$

que é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$, então

$$[(1,-1,1,0)] \subset U \cap W,$$

mostrando que

$$[(1,-1,1,0)] = U \cap W.$$

Assim, $(1,-1,1,0)$ é um gerador de $U \cap W$, que já sabemos que tem dimensão igual a 1. Portanto,

$$\{(1,-1,1,0)\}$$

é uma base de $U \cap W$. $\square$

3.5 Mudança de Base

Nesta seção vamos usar o conceito de base estudado na seção anterior para introduzir o conceito de coordenadas, semelhante ao conceito de coordendas estudadas na disciplina de Geometria Analítica para $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, para qualquer espaço vetorial finitamente gerado. Consideremos então V um espaço vetorial finitamente gerado sobre um corpo de escalares $\mathbb{K}$ e

$$B = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$$

uma base de V. Então para todo $v \in V$, existem escalares $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ tais que

$$v = x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 + \ldots + x_nv_n.$$

Temos o

Teorema 3.64. *Sejam V um espaço vetorial finitamente gerado sobre um corpo de escalares $\mathbb{K}$ e*

$$B = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$$

uma base de V. Então, todo vetor $v \in V$ se escreve, de forma única, como combinação linear dos elementos de B.

Demonstração: Como B é uma base de V, existem escalares $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ tais que

$$v = x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 + \ldots + x_nv_n.$$

Suponhamos que existam outros escalares $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n \in \mathbb{K}$ tais que

$$v = y_1v_1 + y_2v_2 + y_3v_3 + \ldots + y_nv_n.$$

Logo,

$$x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 + \ldots + x_nv_n = v = y_1v_1 + y_2v_2 + y_3v_3 + \ldots + y_nv_n.$$

Daí,

$$(x_1 - y_1)v_1 + (x_2 - y_2)v_2 + (x_3 - y_3)v_3 + \ldots + (x_n - y_n)v_n = 0_V.$$

Mas, como

$$B = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$$

é **LI** em V, então obtemos que

$$(x_1 - y_1) = (x_2 - y_2) = (x_3 - y_3) = \ldots = (x_n - y_n) = 0,$$

mostrando que

$$x_1 = y_1,\ x_2 = y_2,\ x_3 = y_3,\ \ldots,\ x_n = y_n,$$

provando o teorema. ∎

Com o teorema acima podemos então falar nas coordenadas de um vetor em qualquer espaço vetorial finitamente gerado. Seja

$$B = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$$

uma base de V. Então para todo $v \in V$, existem (únicos) escalares $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ tais que

$$v = x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 + \ldots + x_nv_n.$$

Definimos as coordenadas de $v \in V$ em relação à base B como sendo:

$$[v]_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad [v]_B = (x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Exemplo 3.65. *Seja $V = \mathbb{R}^3$ o espaço euclideano tridimensional e considere*

$$B = \{(1,1,0),\ (1,0,1),\ (0,1,1)\}$$

uma base para $\mathbb{R}^3$. Vamos calcular as coordenadas de

$$v = (1,2,3) \quad e \quad 0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0)$$

em relação á base B.

De fato: Para encontrarmos as coordenadas de $v = (1,2,3)$ em relação à base B devemos encontrar $x, y, z \in \mathbb{R}$ tais que

$$(1,2,3) = x(1,1,0) + y(1,0,1) + z(0,1,1).$$

Mas isso acontece se, e somente se,

$$\begin{aligned} (1,2,3) = (x,x,0) + (y,0,y) + (0,y,y) &\iff (1,2,3) = (x+y, x+z, y+z) \\ &\iff \begin{cases} x + y = 1 \\ x + z = 2 \\ y + z = 3. \end{cases} \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema acima obtemos que

$$x = 0, \quad y = 1 \;\text{ e }\; z = 2.$$

Assim, as coordenadas de $(1, 2, 3)$ em relação à base B são:

$$[v]_B = [(1,2,3)]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \;\text{ ou }\; [v]_B = [(1,2,3)]_B = (0,1,2).$$

Para encontrarmos as coordenadas de $0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0)$ em relação à base B devemos encontrar $x, y, z \in \mathbb{R}$ tais que

$$(0,0,0) = x(1,1,0) + y(1,0,1) + z(0,1,1).$$

Mas isso acontece se, e somente se,

$$\begin{aligned} (0,0,0) = (x,x,0) + (y,0,y) + (0,y,y) &\iff (0,0,0) = (x+y, x+z, y+z) \\ &\iff \begin{cases} x + y = 0 \\ x + z = 0 \\ y + z = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema acima obtemos que

$$x = 0, \quad y = 0 \;\text{ e }\; z = 0.$$

Assim, as coordenadas de $(0, 0, 0)$ em relação à base B são:

$$[0_{\mathbb{R}^3}]_B = [(0,0,0)]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \;\text{ ou }\; [0_{\mathbb{R}^3}]_B = [(0,0,0)]_B = (0,0,0),$$

completando o exemplo. $\square$

De forma geral temos que

$$[0_V]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \;\text{ ou }\; [0_V]_B = (0,0,\ldots,0),$$

para qualquer base B de um espaço vetorial V, com $\dim(V) = n$.

Exemplo 3.66. *Seja* $V = \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ *o espaço vetorial das matrizes quadradas de ordem* 2×2*. Se*

$$B = \{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \},$$

vamos calcular as coordenadas das seguintes matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad e \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ \sqrt{2} & \pi \end{bmatrix}$$

em relação à base B*.*

De fato: Para encontrarmos as coordenadas de $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ em relação à base B devemos encontrar $x, y, z, t \in \mathbb{R}$ tais que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Mas isso acontece se, e somente se,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix},$$

ou seja, se, e somente se,

$$x = 1, \quad y = 2, \; z = 3 \; \text{ e } \; t = 4.$$

Assim, as coordenadas de $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ em relação à base B são:

$$[A]_B = [\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad [A]_B = [\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}]_B = (1, 2, 3, 4).$$

Para encontrarmos as coordenadas de $C = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ \sqrt{2} & \pi \end{bmatrix}$ em relação à base B devemos encontrar $x, y, z, t \in \mathbb{R}$ tais que

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ \sqrt{2} & \pi \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Mas isso acontece se, e somente se,

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ \sqrt{2} & \pi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix},$$

ou seja, se, e somente se,

$$x = -1, \quad y = 1, \ z = \sqrt{2} \ \text{ e } \ t = \pi.$$

Assim, as coordenadas de $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ \sqrt{2} & \pi \end{bmatrix}$ em relação à base B são:

$$[C]_B = [\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ \sqrt{2} & \pi \end{bmatrix}]_B = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \\ \pi \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad [C]_B = [\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ \sqrt{2} & \pi \end{bmatrix}]_B = (-1, 1, \sqrt{2}, \pi),$$

completando o exemplo. □

Uma observação importante que fazemos aqui é que encontrar as coordenadas de vetores em relação a uma determinada base, pode ser muito complicado e, em várias aplicações, precisamos escolher outras bases para visualizar os elementos que estamos trabalhando. Vamos agora introduzir rapidamente o conceito de matriz de mudança de uma base para outra.

Seja V um espaço vetorial sobre um corpo de escalares $\mathbb{K}$ tal que

$$\dim(V) = n.$$

Sejam

$$B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \ \text{ e } \ C = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$$

duas bases de V. Então para todo $v \in V$,

$$v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ldots + x_n v_n$$

e

$$v = y_1 u_1 + y_2 u_2 + \ldots + y_n u_n.$$

Assim temos as coordenadas de v em relação ás bases B e C de V que são dadas então por

$$[v]_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad [v]_B = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

e

$$[v]_C = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad [v]_C = (y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

Vamos agora relacionar essas "duas"coordenadas. Como para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, $u_i \in V$ e $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é uma base de V, então

$$\begin{aligned} u_1 &= a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \ldots + a_{n1}v_n \\ u_2 &= a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + \ldots + a_{n2}v_n \\ &\vdots \\ u_n &= a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + \ldots + a_{nn}v_n. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} v &= y_1u_1 + y_2u_2 + \ldots + y_nu_n \\ &= y_1(a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \ldots + a_{n1}v_n) + \ldots + y_n(a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + \ldots + a_{nn}v_n) \\ &= (y_1a_{11} + \ldots + y_na_{1n})v_1 + \ldots + (y_1a_{n1} + \ldots + y_na_{nn})v_n. \end{aligned}$$

Assim, as coordenadas de v na base $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ são

$$[v]_B = \begin{bmatrix} y_1a_{11} + y_2a_{12} + \ldots + y_na_{1n} \\ y_1a_{21} + y_2a_{22} + \ldots + y_na_{2n} \\ \vdots \\ y_1a_{n1} + y_2a_{n2} + \ldots + y_na_{nn} \end{bmatrix}.$$

Mas por outro lado, já sabíamos que as coordenadas de v na base B são dadas por

$$[v]_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

e como as coordenadas são únicas pelo Teorema 3.64, obtemos que

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1a_{11} + y_2a_{12} + \ldots + y_na_{1n} \\ x_2 &= y_1a_{21} + y_2a_{22} + \ldots + y_na_{2n} \\ &\vdots \\ x_n &= y_1a_{n1} + y_2a_{n2} + \ldots + y_na_{nn}. \end{aligned}$$

Escrevendo na forma matricial temos que

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Denotando

$$[I]_B^C := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

temos que

$$[v]_B = [I]_B^C[v]_C.$$

Definição 3.67. *A matriz $[I]_B^C$ é chamada de matriz de mudança da base C para a base B.*

Da mesma forma podemos calcular a matriz de mudança da base B para a base C, escrevendo os vetores da base B como combinação linear dos vetores da base C e dessa formas as coordenadas nessas duas bases são relacionadas da seguinte forma:

$$[v]_C = [I]_C^B[v]_B.$$

Vejamos um exemplo.

Exemplo 3.68. *No espaço euclideano* $\mathbb{R}^2$ *consideremos as seguintes bases:*

$$B = \{(1,0),\ (0,1)\}$$

e

$$C = \{(1,0),\ (1,1)\}.$$

(a) vamos calcular a matriz de mudança da base C *para a base* B*;*

(b) vamos calcular a matriz de mudança da base B *para a base* C;

(c) vamos calcular as coordenadas do vetor $u = (5,2)$ *nas bases* B *e* C.

De fato: Para resolvermos o item (a) devemos escrever os vetores da base C como combinação linear dos vetores da base B. Temos que

$$(1,0) = 1(1,0) + 0(0,1)$$

$$(1,1) = 1(1,0) + 1(0,1).$$

Logo,

$$[I]_B^C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para o item (b) devemos escrever os vetores da base B como combinação linear dos vetores da base C. Temos que

$$\begin{aligned} (1,0) &= x(1,0) + y(1,1) \\ &= (x+y, y), \end{aligned}$$

o que acontece se, e somente se,

$$y = 0 \ \text{ e } \ x = 1.$$

Logo,

$$(1,0) = 1(1,0) + 0(1,1).$$

Também,

$$\begin{aligned} (0,1) &= x(1,0) + y(1,1) \\ &= (x+y, y), \end{aligned}$$

o que acontece se, e somente se,

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ y = 1, \end{cases}$$

de onde obtemos que ncessariamente devemos ter

$$x = -1 \text{ e } y = 1.$$

Logo,

$$(0, 1) = -1(1, 0) + 1(1, 1).$$

Assim,

$$[I]_C^B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

respondendo o item (b).

Para resolvermos o item (c) vamos primeiro calcular as coordenadas de $u = (5, 2)$ em realção à base B, pois nessa base o cálculo das coordenadas é muito mais simples. Temos

$$(5, 2) = 5(1, 0) + 2(0, 1)$$

e, portanto,

$$[u]_B = [(5, 2)]_B = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Para calcular as coordenadas de $u = (5, 2)$ vamos usar a matriz de mudança da base B para a base C. Veja:

$$[(5, 2)]_C = [u]_C = [I]_C^B [u]_B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$[u]_C = [(5, 2)]_C = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix},$$

completando o exemplo. □

Observemos que no exemplo anterior temos que

$$[I]_B^C [I]_C^B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$[I]_C^B[I]_B^C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

isto é, as matrizes de mudança de bases são inversíveis e uma é a inversa da outra, o que era esperado, pois quando mudamos de B para C e depois de C para B voltamos ao que tínhamos antes, ou seja, voltamos às coordenadas anteriores. Temos então o seguinte resultado, que omitiremos a prova.

Teorema 3.69. *Seja V um espaço vetorial sobre um corpo de escalares $\mathbb{K}$ tal que*

$$\dim(V) = n.$$

Sejam

$$B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \quad e \quad C = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$$

duas bases de V. Então $[I]_C^B$ e $[I]_B^C$ são inversíveis e

$$([I]_C^B)^{-1} = [I]_B^C.$$

3.6 Exercícios Propostos

1. Seja $V = \mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2);\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$. Definamos a soma de dois elementos de V como sendo $(x_1, x_2)+(y_1, y_2) = (x_1+y_1, x_2+y_2)$ e o produto por escalar em V como sendo $\alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1, x_2)$. Verifique se com essas operações, V é um espaço vetorial real.

2. Seja $V = \mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2);\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$. Definamos a soma de dois elementos de V como sendo $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_2, x_2 + y_1)$ e o produto por escalar em V como sendo $\alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2)$. Verifique se com essas operações, V é um espaço vetorial real.

3. Seja $V = \mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2);\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$. Definamos a soma de dois elementos de V como sendo $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 y_1, x_2 y_2)$ e o produto por escalar em V como sendo $\alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2)$. Verifique se com essas operações, V é um espaço vetorial real.

4. Seja $V = \mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2);\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$. Definamos a soma de dois elementos de V como sendo $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (3x_1 + 3y_1, 5x_2 + 5y_2)$ e o produto por escalar em V como sendo $\alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2)$. Verifique se com essas operações, V é um espaço vetorial real.

5. Se $u, w \in V$, mostre que existe um único $v \in V$ tal que $u + v = w$.

6. Mostre, por indução sobre $n \in \mathbb{N}$, que $nv = v + v + \cdots + v(n - parcelas)$.

7. Sejam $u, v \in V$. Dizemos que u é múltiplo de v se existir $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $u = \alpha v$. Prove que se u e v são dois elementos não nulos de V, então u é múltiplo de v se, e somente se, v é múltiplo de u.

8. Use as relações $2(u + v) = 2u + 2v$ e $2w = w + w$, onde $u, v, w \in V$, para mostrar a propriedade comutativa, $u + v = v + u$, $u, v \in V$, exigida na definição de espaço vetorial real.

9. Ache o valor de $t \in \mathbb{R}$ que torne a matriz abaixo o elemento neutro do espaço vetorial $V = M_2(\mathbb{R})$, munido das operações usuais de matrizes: $\begin{pmatrix} t^2 - 1 & t^2 - t \\ t^3 - 1 & t^2 - 3t + 2 \end{pmatrix}$.

10. Dados $u = (1, 2, 3)$ e $v = (3, 2, 0)$ e $w = (2, 0, 0)$ elementos do espaço euclideano $\mathbb{R}^3$. Encontre escalares reais a, b e c tais que $au + bv + cw = (1, 1, 1)$.

11. Dados os elementos $v_1 = (1, 2, 1)$, $v_2 = (2, 1, 2)$, $v_3 = (3, 3, 2)$ e $v_4 = (1, 5, -1)$ do espaço euclideano $\mathbb{R}^3$, determine os seguintes elementos: $u = v_1 - 3v_2 + 2v_3 - v_4$, $v = v_1 + v_2 - v_3 - v_4$ e $w = v_3 - \frac{1}{3}v_2 - \frac{4}{3}v_1$.

12. Sejam $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ elementos do espaço euclideano $\mathbb{R}^n$. Prove que um deles é múltiplo do outro se, e somente se, $x_i y_j = x_j y_i$, para quaisquer $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

13. Mostre que os seguintes subconjuntos do espaço euclideano $V = \mathbb{R}^4$ são subespaços vetorias.

    (a) $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4;\ x + y = 0 \ \text{ e } \ z - t = 0\}$.

    (b) $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4;\ 2x + y - t = 0 \ \text{ e } \ z = 0\}$.

14. Verificar se os seguintes subconjuntos abaixo são subespaços do espaço vetorial $V = M_2(\mathbb{R})$, munido das operações usuais de soma de matrizes e produto por escalar.

    (a) $U = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R});\ b = c\}$.

    (b) $W_1 = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R});\ b = c + 1\}$.

(c) $W_2 = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R});\ b = -a\}$.

15. Verificar se $W = \{\begin{pmatrix} 2a & a+2b \\ 0 & a-b \end{pmatrix};\ a, b \in \mathbb{R}\}$ é um subespaço vetorial do espaço vetorial $V = M_2(\mathbb{R})$. Verificar também se $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ são elementos de W.

16. Seja A uma matriz $m \times n$ em $M_{m,n}(\mathbb{R})$. Considere o sistema linear homogêneo na forma matricial

$$AX = B, \tag{3.3}$$

onde $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ é a matriz das variáveis e $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ é a matriz nula. Mostre que $U = \{S \in M_{n,1}(\mathbb{R});\ S$ é solução de (3.3)$\}$ é um subespaço vetorial de $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$.

17. Sejam $W_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4;\ x+y = 0 \text{ e } z-t = 0\}$ e $W_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4;\ x-y-z-t = 0\}$ subconjuntos do espaço euclideano $\mathbb{R}^4$.

    (a) Mostre que W_1 e W_2 são subespaços de $\mathbb{R}^4$;

    (b) Determine $W_1 \cap W_2$;

    (c) Determine $W_1 + W_2$;

    (d) $W_1 + W_2$ é uma soma direta? Justifique a sua resposta.

    (e) $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^4$? Justifique a sua resposta.

18. Seja V o espaço vetorial dos vetores no espaço, munido das operações usuais. Sendo $\vec{u}$ um vetor fixo desse espaço, mostre que $W = \{\alpha\vec{u};\ \alpha \in \mathbb{R}\}$ é um subespaço vetorial de V.

19. Mostre que o subconjunto $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y = 0\}$ é um subespaço vetorial do espaço euclideano $\mathbb{R}^2$.

20. Mostre que são subespaços vetoriais de $M_n(\mathbb{R})$, com as operações usuais de soma e produto por escalar, os seguintes subconjuntos:

    (a) $U = \{A \in M_n(\mathbb{R});\ A' = A\}$, onde A' denota a transposta da matriz A.

    (b) $W = \{A \in M_n(\mathbb{R});\ AT = TA, \ \text{ onde } \ T \in M_n(\mathbb{R})\}$.

21. Dados os subespaços vetorias $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x + y = 0\}$ e $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x = 0\}$ do espaço euclideano $\mathbb{R}^3$. Determine $U \cap W$.

22. Quais dos seguintes conjuntos são subespaços vetorias do espaço euclideano $\mathbb{R}^3$.

    (a) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x = 0\}$.

    (b) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x \in \mathbb{Z}\}$.

    (c) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ y \ \text{ é irracional } \}$.

    (d) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x - 3z = 0\}$.

    (e) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x = 1\}$.

    (f) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y + z = 0\}$.

    (g) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x \leq y \leq z\}$.

23. Considere os seguintes subespaços vetoriais do espaço euclideano $\mathbb{R}^3 : U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x = z\}$, $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x = y = 0\}$ e $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x + y + z = 0\}$. Verifique que $U + V = \mathbb{R}^3$, $U + W = \mathbb{R}^3$ e que $V + W = \mathbb{R}^3$. Em algums dos casos a soma é direta? Justifique a sua resposta.

24. Seja V um espaço vetorial real e $S \neq \emptyset$ um subconjunto de V. Mostre que a intersecção de todos os subespaços vetorias de V que contém S é um subespaço vetorial de V. Ainda mais, esse subespaço é o menor subespaço vetorial de V que contém S.

25. Sejam V um espaço vetorial sobre um corpo de escalares $\mathbb{K}$ e U_1, U_2 dois subespaços vetoriais de V. É sempre verdade que $U_1 \cup U_2$ é um subespaço vetorial de V, justifique a sua resposta.

26. Considere o conjunto $S = \{(1, 1, -2, 4), (1, 1, -1, 2), (1, 4, -4, 8)\}$ do espaço euclideano $\mathbb{R}^4$. Verifique se os elementos $(\frac{2}{3}, 1, -1, 2)$ e $(0, 0, 1, 1)$ se escrevem como combinação linear dos elementos de S.

27. Encontre os geradores dos seguintes subespaços vetoriais do espaço euclideano $\mathbb{R}^4$:

    (a) $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4;\ x - y - z - t = 0\}$.

    (b) $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4;\ x + y = z - t = 0\}$.

28. Consideremos no espaço euclideano $\mathbb{R}^3$ os subespaços vetoriais $U = [(1, 0, 0), (1, 1, 1)]$ e $W = [(0, 1, 0), (0, 0, 1)]$. Determine os geradores de $U \cap W$.

29. Dados os subespaços vetoriais $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x + y = 0\}$ e $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x = 0\}$ do espaço euclideano $\mathbb{R}^3$, determinar os geradores de U, V e $U \cap V$.

30. Dar um sistema de geradores para cada um dos seguintes subespaços vetoriais do espaço euclideano $\mathbb{R}^3$.

    (a) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x - 2y = 0\}$.

    (b) $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x + z = 0 \ \text{ e } \ x - 2y = 0\}$.

    (c) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x + 2y - 3z = 0\}$.

    (d) $U \cap V$.

31. Mostrar que os conjuntos $\{(1, -1, 2), (3, 0, 1)\}$ e $\{(-1, -2, 3), (3, 3, -4)\}$ geram o mesmo subespaço vetorial do espaço euclideano $\mathbb{R}^4$.

32. Seja W o conjunto de todos os vetores $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ no espaço euclideano $\mathbb{R}^5$ que satisfazem

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + \frac{4}{3}x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + \frac{2}{3}x_3 - x_5 = 0 \\ 9x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 3x_4 - 3x_5 = 0. \end{cases}$$

    Determinar um conjunto finito de vetores que gere W.

33. Considere W o subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vetores $v_1 = (1, -1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 0, 1, 1)$, $v_3 = (-2, 2, 1, 1)$ e $v_4 = (1, 0, 0, 0)$.

a) O vetor $(2, -3, 2, 2) \in W$? Justifique.

b) $W = \mathbb{R}^4$? Por quê ?

34. Seja $V = \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ o espaço vetorial do quadradas de ordem 2×2. Seja W_1 o conjunto das matrizes da forma $\begin{bmatrix} x & -x \\ y & z \end{bmatrix}$ e seja W_2 o conjunto das matrizes da forma $\begin{bmatrix} a & b \\ -a & c \end{bmatrix}$.

    a) Demonstrar que W_1 e W_2 são subespaços de V.

    b) Determinar os geradores de W_1, W_2, $W_1 + W_2$ e $W_1 \cap W_2$.

35. Sejam $W_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4;\ x + y = 0 \ \text{ e } \ z - t = 0\}$ e $W_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4;\ x - y - z - t = 0\}$ subespaços do espaço vetorial $\mathbb{R}^4$.

    a) Demonstrar que W_1 e W_2 são subespaços de V.

    b) Determinar os geradores de W_1, W_2, $W_1 + W_2$ e $W_1 \cap W_2$.

36. Encontre os geradores dos seguintes subespaços vetoriais do espaço vetorial $\mathbb{R}^4$:

    (a) $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4;\ x - y - z - t = 0\}$.

    (b) $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4;\ x + y = z - t = 0\}$.

37. Consideremos no espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ os subespaços vetoriais $U = [(1, 0, 0), (1, 1, 1)]$ e $W = [(0, 1, 0), (0, 0, 1)$ Determine os geradores de $U \cap W$.

38. Dados os subespaços vetoriais $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x + y = 0\}$ e $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x = 0\}$ do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, determinar os geradores de U, V e $U \cap V$.

39. Seja $V = \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ o espaço vetorial dos polinômios de graú no máximo 2 e considere o subespaço vetorial $U = \{(a_0 + a_1 + a_2) + (-a_1)x + (a_2)x^2;\ a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$. Encontre os geradores de U.

40. Seja $V = M_2(\mathbb{R})$ o espaço vetorial das matrizes quadradas de ordem 2. Considere os subespaços $U = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R});\ b = -c \ \text{ e } \ a = d\}$ e $W = \{\begin{pmatrix} -2a + b & a \\ -a & b \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R});\ a, b \in \mathbb{R}\}$ de $M_2(\mathbb{R})$. Encontre os geradores de U e W.

41. Quais dos subconjuntos abaixo são linearmente independentes no espaço euclideano $\mathbb{R}^3$:

(a) $\{(1,1,1),(1,0,1),(1,0,-2)\}$.

(b) $\{(0,0,0),(1,2,3),(4,1,-2)\}$.

(c) $\{(1,1,1),(1,2,1),(3,2,-1)\}$.

42. Determinar os valores de m e n para que os conjuntos de elementos do espaço euclideano $\mathbb{R}^3$ dados abaixo sejam linearmente independentes.

(a) $\{(1,3,5),(2,m+1,10)\}$.

(b) $\{(6,2,n),(3,m+n,m-1)\}$.

43. Seja $\{u,v,w\}$ um conjunto LI em um espaço vetorial V. Verifique se o conjunto $\{u+v-3w, u+3v-w, v+w\}$ é também LI.

44. Suponha que $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é um conjunto LI em um espaço vetorial V. Mostre que o conjunto $\{\alpha_1 v_1, \alpha_2 v_2, \ldots, \alpha_n v_n\}$ também é LI, desde que os escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sejam todos não nulos.

45. Suponha que $\{u_1, u_2, \ldots, u_r, v_1, v_2, \ldots, v_s\}$ é um conjunto LI em um espaço vetorial V. Mostre que $[u_1, u_2, \ldots, u_r] \cap [v_1, v_2, \ldots, v_r] = \{\mathbb{O}_V\}$, onde $\mathbb{O}_V$ denota o elemento neutro de V.

46. Suponha que $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ é um conjunto LI em um espaço vetorial V. Mostre que o conjunto $\{u_1, u_2, \ldots, u_{j-1}, u_j + \alpha u_i, u_{j+1}, u_{j+2}, \ldots, u_n\}$ é LI para todo escalar $\alpha \in \mathbb{R}$.

47. Suponha que $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ é um conjunto LI em um espaço vetorial V. Mostre que se $u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \cdots + \alpha_n u_n$, então essa combinação linear é única.

48. Seja V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$, tal que V seja gerado por um número finito de vetores $\{v_1, v_2, \cdots, v_m\}$. Mostre que qualquer conjunto de vetores LI sobre $\mathbb{K}$ possui n máximo m elementos.

49. Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e S sum subconjuunto LI sobre $\mathbb{K}$ de V. Se $v \notin [S]$. Mostre que $S \cup \{v\}$ é LI sobre $\mathbb{K}$.

50. Determinar três vetores em $\mathbb{R}^3$ que sejam linearmente dependentes e tais que dois quaisquer deles sejam linearmente independentes.

51. Mostre que o conjunto $\{(0,2,2),(0,4,1)\}$ é uma base para o subespaço vetorial $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x = 0\}$ do espaço euclideano $\mathbb{R}^3$.

52. No espaço euclideano $\mathbb{R}^3$, consideremos os subespaços vetoriais $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x = 0\}$ e $V = [(1,2,0),(3,1,2)]$. Determinar uma base e a dimensão dos subespaços vetoriais U, V, $U+V$ e $U \cap V$.

53. Considere o subespaço vetorial do espaço euclideano $\mathbb{R}^4$ gerado pelos elementos $v_1 = (1,-1,0,0)$, $v_2 = (0,0,1,1)$, $v_3 = (-2,-2,1,1)$ e $v_4 = (1,0,0,0)$.

    (a) Verifique se o elemento $(2,-3,2,2)$ pertence ao subespaço vetorial $[v_1,v_2,v_3,v_4]$.

    (b) Exiba uma base para $[v_1,v_2,v_3,v_4]$ e calcule sua dimensão.

    (c) Verifique se $\mathbb{R}^4 = [v_1,v_2,v_3,v_4]$.

54. Seja $V = \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ o espaço vetorial dos polinômios de graú no máximo 2 e considere o subespaço vetorial $U = \{(a_0+a_1+a_2)+(-a_1)x+(a_2)x^2;\ a_0,a_1,a_2 \in \mathbb{R}\}$ de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$. Encontre uma base para U.

55. Seja $V = M_2(\mathbb{R})$ o espaço vetorial das matrizes quadradas de ordem 2. Considere os subespaços $U = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R});\ b = -c \ \text{ e } \ a = d\}$ e $W = \{\begin{pmatrix} -2a+b & a \\ -a & b \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R});\ a,b \in \mathbb{R}\}$ de $M_2(\mathbb{R})$. Encontre uma base para U e W.

56. Sejam U e V subespaços vetoriais do espaço euclideano $\mathbb{R}^3$ gerados respectivamente pelos conjuntos $\{(1,0,0)\}$ e $\{(1,1,0),(0,1,1)\}$. Mostre que $\mathbb{R}^3 = U \oplus V$.

57. Determinar uma base do espaço euclideano $\mathbb{R}^4$ que contenha os elementos $(1,1,1,1)$, $(0,1,-1,0)$ e $(0,2,0,2)$.

58. Determine uma base e a dimensão do subespaço vetorial, do espaço vetorial $M_{4,1}(\mathbb{R})$, dado pelas soluções do sistema linear $\begin{cases} x - y - z - t = 0 \\ 2x + y + t = 0 \\ z - t = 0. \end{cases}$

59. Sendo U e W dois subespaços vetoriais, com dimensão 3, do espaço euclideano $\mathbb{R}^4$, determine as possíveis dimnesões que podem ter $U + W$ se $(1, 2, 1, 0)$, $(-1, 1, 0, 1)$ e $(1, 5, 2, 1)$ é um sistema de geradores de $U \cap W$.

60. No espaço euclideano $\mathbb{R}^3$, consideremos os subespaços $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x = 0\}$, $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ y - 2z = 0\}$ e $W = [(1, 1, 0), (0, 0, 2)]$. Determine uma base e a dimensão dos seguintes subespaços vetorias: $U, V, W, U \cap V, V + W$ e $U + V + W$.

61. Determine um base dos espaço euclideano $\mathbb{R}^4$ que contenha os vetores $(1, 1, 1, 0)$ e $(1, 1, 2, 1)$.

62. Para quais valores de $a \in \mathbb{R}$, o conjunto $\{(a, 1, 0), (1, a, 1), (0, 1, a)\}$ é uma base do espaço euclideano $\mathbb{R}^3$.

63. Dado o subespaço vetorial $V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x+2y+z = 0\}$ do espaço euclideano $\mathbb{R}^3$, encontre V_2 também subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ tal que $\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_2$.

64. Encontre as coordenadas de $(1, 0, 0)$ em relação à base $\{(1, 1, 1), (-1, 1, 0), (1, 0, -1)\}$ do espaço euclidenao $\mathbb{R}^3$.

65. Determinar as coordenadas do elemento $(4, -5, 3)$ em relação às bases B_1 : base canônica de $\mathbb{R}^3$, $B_2 = \{(1, 1, 1), (1, 2, 0), (3, 1, 0)\}$ e $B_3 = \{(1, 2, 1), (0, 3, 2), (1, 1, 4)\}$.

66. Encontre a matriz de mudança da base $\{(1, 1, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 3)\}$ para a base canônica do espaço euclideano $\mathbb{R}^3$.

67. A matriz de mudança de uma base B do espaço euclideano $\mathbb{R}^2$ para a base $\{(1, 1), (0, 2)\}$ desse mesmo espaço é $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Determine a base B.

68. Considere as bases $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ e $C = \{g_1, g_2, g_3\}$ do espaço euclideano $\mathbb{R}^3$ relacionadas por

$$g_1 = e_1 - e_2 - e_3$$
$$g_2 = 2e_2 + 3e_3$$
$$g_3 = 3e_1 + e_3.$$

   (a) Determinar as matrizes de mudança da base B para a base C e da base C para a base B.

(b) Se $u \in \mathbb{R}^3$ apresenta as coordenadas $u = (1, 2, 3)$ em relação à base B, encontre as coordenadas de u relativamente à base C.

Capítulo 4

Transformações Lineares

Neste capítulo estudaremos funções cujo domínio e o contradomínio são espaços vetoriais estudados anteriormente, estas funções preservam a estrutura dos espaços vetoriais. Recordemos que nos capítulos anteriores vimos que espaços vetoriais são conjuntos de elementos (números, matrizes, funções, etc.) munidos de duas operações. De certa forma, transformações lineares são funções entre dois espaços vetoriais que preservam estas operações.

4.1 Definição e Propriedades Elementares

Nesta seção vamos definir transformações lineares e ilustrar esta definição com alguns exemplos. Posteriormente vamos mostrar algumas propriedades elementares das transformações lineares.

Definição 4.1. *Sejam U e V dois espaços vetoriais sobre o mesmo corpo de escalares $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Uma transformação linear (aplicação linear) é uma função $T : U \to V$ que satisfaz as duas condições abaixo.*

1. *Para quaisquer $u, v \in U$, temos que $T(u + v) = T(u) + T(v)$.*

2. *Para $u \in U$ e $k \in \mathbb{K}$ temos que $T(ku) = kT(u)$.*

Observemos que apesar de utilizarmos o mesmo símbolo, $+$, na condição 1 acima, temos que $u + v$ denota soma no espaço vetorial U, enquanto que $T(u) + T(v)$ denota a soma no espaço vetorial V. O mesmo acontece com os produtos escalares na condição 2. Ainda, quando $U = V$, uma transformação linear $T : U \to U$ é também chamada de operador linear.

Vamos agora apresentar alguns exemplos de transformações lineares. Para isso utilizaremos alguns dos principais espaços e subespaços vetoriais estudados nos capítulos anteriores. Alguns desses exemplos verificaremos que as funções apresentadas são de fato transformações lineares, sugerimos aos leitores que verifiquem com detalhes as demais, para fixar os espaços vetoriais utilizados e para se familiarizar com o conceito de transformação linear.

Exemplo 4.2. *Sejam U e V espaços vetoriais sobre o mesmo corpo de escalares $\mathbb{K}$ e definamos a função nula $\mathbb{O} : U \to V$ por*

$$\mathbb{O}(u) = 0_V,$$

para todo $u \in U$, onde 0_V denota o elemento neutro do espaço vetorial V. Vamos mostrar que a esta função éuma transformação linear.

De fato: Para mostramos que a função nula é de fato uma transformação linear, sejam $u, v \in U$ e $k \in \mathbb{K}$. Então,

$$\mathbb{O}(u + v) = 0_V = 0_V + 0_v = \mathbb{O}(u) + \mathbb{O}(v)$$

e

$$\mathbb{O}(ku) = 0_V = k0_V = k\mathbb{O}(u),$$

mostrando que as condições 1 e 2 da definição 4.1 estão satisfeitas e, portanto, mostrando que a função nula é uma transformação linear, denominada transformação linear nula. □

Exemplo 4.3. *Sejam $U = V = \mathbb{R}$ e defina, para $\alpha \in \mathbb{R}$, a função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $F(u) = \alpha u$. Mostremos que esta função é uma transformação linear.*

De fato: Para mostrarmos que a função definida no exemplo é de fato uma transformação linear sejam $u, v \in V = \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{K} = \mathbb{R}$, então

$$F(u + v) = \alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v = F(u) + F(v)$$

e

$$F(ku) = \alpha(ku) = (\alpha k)u = (k\alpha)u = k(\alpha u) = kF(u),$$

mostrando que as condições 1 e 2 da definição 4.1 estão satisfeitas e, portanto, mostrando que a função acima é uma transformação linear. Esta função é usualmente chamada de homotetia, e nos cursos de Geometria Analítica vemos que ela muda apenas o tamanho ou o sentido dos vetores, não alterando a sua direção, conforme a próxima figura. □

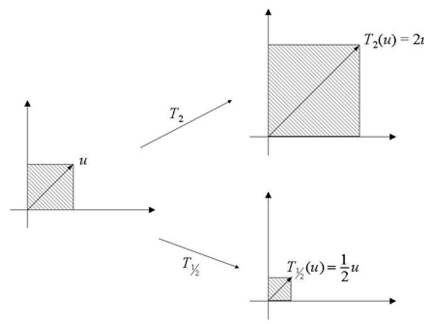

Figura 4.1: Homotetias

Exemplo 4.4. *Sejam $U = \mathbb{R}^3$ e $V = \mathbb{R}^2$ e defina uma a função $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ por*

$$F(x, y, z) = (x, 2x - z).$$

Vamos mostrar que esta função é uma transformação linear.

De fato: Para $u_1 = (x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3$, $u_2 = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ e $k \in \mathbb{R}$ temos que

$$\begin{aligned} F(u_1 + u_2) &= F((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)) \\ &= F(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \\ &= (x_1 + x_2, 2(x_1 + x_2) - (z_1 + z_2)) \\ &= (x_1 + x_2, 2x_1 + 2x_2 - z_1 - z_2). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned} F(u_1) + F(u_2) &= F(x_1, y_1, z_1) + F(x_2, y_2, z_2)) \\ &= (x_1, 2x_1 - z_1) + (x_2, 2x_2 - z_2) \\ &= (x_1 + x_2, 2x_1 - z_1 + 2x_2 - z_2) \\ &= (x_1 + x_2, 2x_1 + 2x_2 - z_1 - z_2). \end{aligned} \tag{4.2}$$

De (4.1) e (4.2) concluímos que

$$F(u_1 + u_2) = F(u_1) + F(u_2),$$

provando a condição 1 da definição 4.1. Ainda mais,

$$\begin{aligned} F(ku_1) &= F(k(x_1, y_1, z_1)) \\ &= F(kx_1, ky_1, kz_1) \\ &= (kx_2, 2(kx_1) - (kz_1)) \\ &= (kx_1, k(2x_1 - z_1)) \\ &= k(x_1, 2x_1 - z_1) \\ &= kF(u_1), \end{aligned}$$

provando a condição 2 da definição 4.1 e mostrando que a função F definida no exemplo é uma transformação linear. $\square$

Exemplo 4.5. *Denotemos por $U = C^\infty(a, b)$ o espaço de todas as funções $f : (a, b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que possuem derivadas de qualquer ordem contínuas no intervalo aberto (a, b). Definamos a função derivada $D : U \to U$ por*

$$D(u) = u',$$

onde u' denota a derivada da função $u \in C^\infty(a, b)$. Observemos inicialmente que como podemos derivar u infinitas vezes, então também podemos derivar u' infinitas vezes e, portanto, u' também é um elemento de $C^\infty(a, b)$. Mostremos agora que D é um operador linear.

De fato: Para mostramos que D é um operador linear, sejam $u, v \in C^\infty(a, b)$ duas funções em $C^\infty(a, b)$ e $k \in \mathbb{R}$ um escalar qualquer. Então,

$$D(u + v) = (u + v)' = u' + v' = D(u) + D(v)$$

e

$$D(ku) = (ku)' = ku' = kD(u),$$

mostrando que as condições 1 e 2 da definição 4.1 estão satisfeitas e, portanto, mostrando que a função acima é um operador linear. $\square$

Vamos apresentar agora um exemplo de uma função que não é uma transformação linear.

Exemplo 4.6. *Sejam $U = V = \mathbb{R}$ e defina $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $F(u) = u^2$, para todo $u \in \mathbb{R}$. Vamos mostrar que esta função não é uma transformação linear.*

De fato: Para $u, v \in \mathbb{R}$ temos que

$$F(u + v) = (u + v)^2 = u^2 + 2uv + v^2$$

e

$$F(u) + F(v) = u^2 + v^2.$$

Logo para mostrarmos que F não é uma transformação linear precisamos apresentar elementos no espaço vetorial $U = \mathbb{R}$ que tornem as duas expressões acima diferentes. Para isso tomemos $u = 2$ e $v = 3$. Logo,

$$F(2 + 3) = F(5) = 5^2 = 25 \neq 13 = 2^2 + 3^2 = F(2) + F(3),$$

mostrando que F não é uma transformação linear. $\square$

Vamos agora apresentar mais exemplos de transformações lineares

Exemplo 4.7. *Defina uma função $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ por $T(x, y) = (x, -y)$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Então T é um operador linear, denominado operador reflexão em torno do eixo Ox. Geometricamente podemos ver na figura abaixo como o operador reflexão em torno do eixo Ox atua em um determinado subconjunto do plano $\mathbb{R}^2$.*

De fato: Para mostrarmos que esta função é um operador linear, sejam $u_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ e $u_2 =$

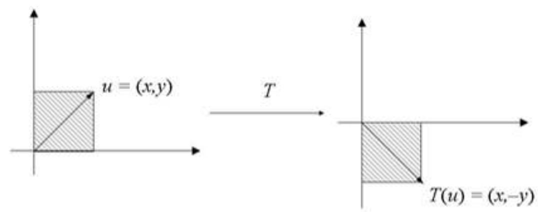

Figura 4.2: Reflexão em torno do eixo Ox

$(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ no plano $\mathbb{R}^2$ e $k \in \mathbb{R}$. Então,

$$\begin{aligned} T(u_1 + u_2) &= T((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = T(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ &= (x_1 + x_2, -(y_1 + y_2)) \\ &= (x_1 + x_2, -y_1 - y_2) \\ &= (x_1, -y_1) + (x_2, -y_2) \\ &= T(x_1, y_1) + T(x_2, y_2) \\ &= T(u_1) + T(u_2) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} T(ku_1) &= T(k(x_1, y_1)) = T(kx_1, ky_1) \\ &= (kx_1, -(ky_1)) \\ &= (kx_1, -ky_1) \\ &= k(x_1, -y_1) \\ &= kT(x_1, y_1) \\ &= kT(u_1), \end{aligned}$$

mostrando que as condições 1 e 2 da definição 4.1 estão satisfeitas e, portanto, mostrando que a função acima é um operador linear. □

Exemplo 4.8. *Defina uma função* $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *por* $R(x, y) = (-x, -y)$, *para todo* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. *Então* R *é um operador linear no plano* $\mathbb{R}^2$, *denominado operador reflexão em torno da origem* $(0, 0)$. *Geometricamente podemos ver na figura abaixo como o operador reflexão (em torno do eixo* Ox*) atua em um determinado subconjunto do plano* $\mathbb{R}^2$.

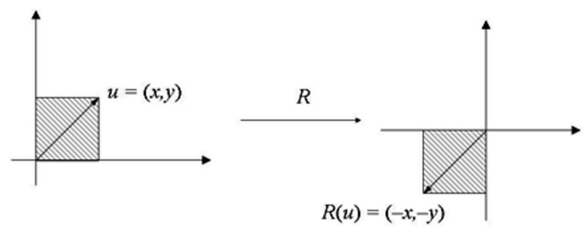

Figura 4.3: Reflexão em torno da origem $(0, 0)$

De fato: Para mostrarmos que esta função é um operador linear, sejam $u_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ e $u_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ no plano $\mathbb{R}^2$ e $k \in \mathbb{R}$. Então,

$$\begin{aligned}
R(u_1 + u_2) &= R((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = R(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\
&= (-(x_1 + x_2), -(y_1 + y_2)) \\
&= (-x_1 - x_2, -y_1 - y_2) \\
&= (-x_1, -y_1) + (-x_2, -y_2) \\
&= R(x_1, y_1) + R(x_2, y_2) \\
&= R(u_1) + R(u_2)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
R(ku_1) &= R(k(x_1, y_1)) = R(kx_1, ky_1) \\
&= (-(kx_1), -(ky_1)) \\
&= (-kx_1, -ky_1) \\
&= k(-x_1, -y_1) \\
&= kR(x_1, y_1) \\
&= kR(u_1),
\end{aligned}$$

mostrando que as condições 1 e 2 da definição 4.1 estão satisfeitas e, portanto, mostrando que a função acima é um operador linear. □

Exemplo 4.9. *Fixemos uma ângulo $\theta \in (0, 2\pi) \subset \mathbb{R}$ e definamos uma função $R_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ por*

$$R_\theta(x, y) = (x\cos\theta - y\mathrm{sen}\,\theta, x\mathrm{sen}\,\theta + y\cos\theta),$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Então R_θ é um operador linear no plano $\mathbb{R}^2$, denominado operador rotação de ângulo θ em torno da origem. Geometricamente podemos ver na figura abaixo como o operador rotação de ângulo θ em torno da origem atua em um determinado subconjunto do plano $\mathbb{R}^2$.

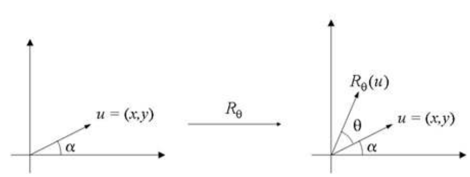

Figura 4.4: Rotação de ângulo θ em torno da origem

De fato: Para mostrarmos que esta função é um operador linear, sejam $u_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ e $u_2 =$

$(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ no plano $\mathbb{R}^2$ e $k \in \mathbb{R}$. Então,

$$\begin{aligned}
R_\theta(u_1 + u_2) &= R_\theta((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = R_\theta(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\
&= ((x_1 + x_2)\cos\theta - (y_1 + y_2)\operatorname{sen}\theta, (x_1 + x_2))\operatorname{sen}\theta + (y_1 + y_2)\cos\theta) \\
&= (x_1 \cos\theta - y_1 \operatorname{sen}\theta, x_1 \operatorname{sen}\theta + y_1 \cos\theta) \\
&\quad + (x_2 \cos\theta - y_2 \operatorname{sen}\theta, x_2 \operatorname{sen}\theta + y_2 \cos\theta) \\
&= R_\theta(x_1, y_1) + R_\theta(x_2, y_2) \\
&= R(u_1) + R(u_2)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
R_\theta(ku_1) &= R_\theta(k(x_1, y_1)) = R_\theta(kx_1, ky_1) \\
&= ((kx_1)\cos\theta - (ky_1)\operatorname{sen}\theta, (kx_1)\operatorname{sen}\theta + (ky_1)\cos\theta) \\
&= (k(x_1 \cos\theta - y_1 \operatorname{sen}\theta), k(x_1 \operatorname{sen}\theta + y_1 \cos\theta)) \\
&= k(x_1 \cos\theta - y_1 \operatorname{sen}\theta, x_1 \operatorname{sen}\theta + y_1 \cos\theta) \\
&= kR_\theta(x_1, y_1) \\
&= kR_\theta(u_1),
\end{aligned}$$

mostrando que as condições 1 e 2 da definição 4.1 estão satisfeitas e, portanto, mostrando que a função acima é um operador linear. $\square$

Como vimos no exemplo 4.6, para verificarmos quando uma função não é uma transformação linear precisamos encontrar elementos no espaço vetorial que não satisfaçam pelo menos uma das condições da definição 4.1. O próximo resultado nos dá algumas propriedades elementares das transformações lineares e, também, podem ser utilizadas para verificar se uma determinada função não é uma transformação linear.

Proposição 4.10. *Sejam U e V espaços vetoriais sobre o mesmo corpo de escalares $\mathbb{K}$ e $F : U \to V$ uma transformação linear. Então,*

a. *$F(0_U) = 0_V$, onde 0_U e 0_V denotam respectivamente os elementos neutros de U e V.*

b. *Para todo $u \in U$, $F(-u) = -F(u)$, onde $-u$ denota o elemento oposto de u em U e $-F(u)$ denota o elemento oposto de $F(u)$ em V.*

Demonstração: Usando propriedades do espaço vetorial U e a linearidade de F temos que

$$F(0_U) = F(0_U + 0_U) = F(0_U) + F(0_U).$$

Mas $F(0_U) \in V$. Logo, usando propriedades do espaço vetorial V, obtemos que

$$0_V + F(0_U) = F(0_U) = F(0_U) + F(0_U).$$

Logo, somando ${}_F(0_U)$, o oposto de $F(0_U)$ em V , em ambos os lados da igualdade acima obtemos que

$$F(0_U) = 0_V,$$

provando o item a. da proposição.

Para provarmos o item b., seja $u \in U$, então $F(u) \in V$ e, portanto, existe $-F(u) \in V$ tal que

$$F(u) + (-F(u)) = 0_V. \tag{4.3}$$

Ainda mais, o item a. e a linearidade de F implicam que

$$0_V = F(0_U) = F(u + (-u)) = F(u) + F(-u). \tag{4.4}$$

De (4.3) e (4.4), usando a unicidade do oposto de $F(u)$ em V, concluímos que

$$F(-u) = -F(u),$$

completando a demonstração desta proposição. ■

Vamos apresentar outro de exemplo de uma função que não é linear.

Exemplo 4.11. *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ dois números reais tais que $a^2 + b^2 \neq 0$ e definamos uma função $T_{a,b} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ por*

$$T_{a,b}(x, y) = (x + a, y + b),$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Então $T_{a,b}$ é uma função que não é um operador linear no plano $\mathbb{R}^2$. A função $T_{a,b}$ é chamada de translação no plano $\mathbb{R}^2$.

De fato: Recordemos que o elemento neutro do espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ é dado por

$$0_{\mathbb{R}^2} = (0, 0).$$

Temos então que

$$T(0_{\mathbb{R}^2}) = T(0, 0) = (0 + a, 0 + b) = (a, b) \neq (0, 0) = 0_{\mathbb{R}^2}.$$

Logo o item b. da Proposição 5.1 implica que $T_{a,b}$ não pode ser um operador linear. $\square$

Vejamos agora um exemplo que nos permite construir várias transformações lineares a partir de transformações lineares já conhecidas.

Exemplo 4.12. *Sejam U, V e W espaços vetoriais sobre o mesmo corpo de escalares $\mathbb{K}$ e considere $F : U \to V$ e $G : V \to W$ duas transformações lineares. Definimos a composta de G por F como sendo a função $G \circ F : U \to W$, atuando em um elemento $u \in U$ da seguinte maneira:*

$$(G \circ F)(u) = G(F(u)).$$

Vamos mostrar que $G \circ F$ é uma transformação linear de U em W.

De fato: : Para fazermos isso, sejam $u_1, u_2 \in U$ e $k \in \mathbb{K}$. Temos que,

$$(G\circ F)(u_1+u_2) = G(F(u_1+u_2)) = G(F(u_1)+F(u_2)) = G(F(u_1))+G(F(u_2)) = (G\circ F)(u_1)+(G\circ F)(u_2)$$

e

$$(G \circ F)(ku_1) = G(F(ku_1)) = G(kF(u_1)) = kG(F(u_1)) = k(G \circ F)(u_1).$$

Logo, $(G \circ F)$ é uma transformação linear. $\square$

Vale à pena observar aqui que mesmo que $G \circ F$ e $F \circ G$ estejam definidas, nem sempre é verdade que $G \circ F = F \circ G$. Vejamos um exemplo deste fato.

Exemplo 4.13. *Considere $F, G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definidas por,*

$$F(x, y) = (2x, x + 2y) \quad e \quad G(x, y) = (3x + y, x + 3y),$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Vamos mostrar que $F \circ G \neq G \circ F$.

De fato: Para $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ temos que

$$\begin{aligned}(F \circ G)(x, y) &= F(G(x, y)) = F(3x + y, x + 3y)\\ &= (2(3x + y), 3x + y + 2(x + 3y))\\ &= (6x + 2y, 5x + 7y)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}(G \circ F)(x, y) &= G(F(x, y)) = G(2x, x + 2y)\\ &= (3(2x) + (x + 2y), 2x + 3(x + 2y))\\ &= (7x + 2y, 5x + 6y),\end{aligned}$$

para quaisquer $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Assim, para $(x, y) = (1, 1)$ temos que

$$(F \circ G)(1, 1) = (6 + 2, 5 + 7) = (8, 12) \neq (9, 11) = (7 + 2, 5 + 6) = (G \circ F)(1, 1),$$

mostrando que $G \circ F \neq F \circ G$. $\square$

4.2 Núcleo e Imagem de Transformações Lineares

Nesta seção vamos estudar e caracterizar transformações lineares injetoras e sobrejetoras. Para isso vamos introduzir o conceito de núcleo de uma transformação linear.

Sejam V e W dois espaços vetoriais sobre o mesmo corpo de escalares $\mathbb{K}$ e $T : V \to W$ uma transformação linear dada. Recordemos que o conjunto imagem da função T é dado por

$$Im(T) = \{y \in W; \;\; T(v) = w, \;\; \text{para algum} \;\; v \in V\} \subset W.$$

Com relação ao conjunto imagem de uma transformação linear temos o seguinte resultado:

Proposição 4.14. *Sejam V e W dois espaços vetoriais sobre o mesmo corpo de escalares $\mathbb{K}$ e $T : V \to W$ uma transformação linear dada. Então, o conjunto imagem $Im(T) \subset W$ é um subespaço vetorial de W.*

Demonstração: Como $T : V \to W$ é uma transformação linear, o item a da Proposição 4.10 implica que,

$$0_W = T(0_V),$$

mostrando que $0_W \in Im(T)$ e, portanto, $Im(T) \neq \emptyset$.

Considere agora $w_1, w_2 \in Im(T)$ e $k \in \mathbb{K}$. Então, existem $v_1, v_2 \in V$ tais que

$$T(v_1) = w_1 \ \text{ e } \ T(v_2) = w_2.$$

Vamos mostrar que $w_1 + w_2 \in Im(T)$ e $kw_1 \in Im(T)$. Como V é um espaço vetorial, temos que $v_1 + v_2 \in V$ e $kv_1 \in V$. A linearidade de implica então que

$$T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2) = w_1 + w_2$$

e

$$T(kv_1) = kT(v_1) = kw_1,$$

mostrando que

$$w_1 + w_2 \in Im(T) \ \text{ e } \ kw_1 \in Im(T).$$

Portanto, o Teorema 3.11 garante que $Im(T)$ é um subespaço vetorial de W, completando a prova desta proposição. ■

Definição 4.15. *Sejam V e W dois espaços vetoriais sobre o mesmo corpo de escalares $\mathbb{K}$ e $T : V \to W$ uma transformação linear dada. Definimos o núcleo (ou kernel) de T como sendo o seguinte subconjunto de V :*

$$Ker(T) = \{v \in V; \ T(v) = 0_W\}.$$

Antes de apresentarmos alguns exemplos temos o seguinte resultado:

Proposição 4.16. *Sejam V e W dois espaços vetoriais sobre o mesmo corpo de escalares $\mathbb{K}$ e $T : V \to W$ uma transformação linear dada. Então o núcleo, $Ker(T)$, de T é um subespaço vetorial de V.*

Demonstração: Como T é uma transformação linear, a Proposição 4.10 implica que,

$$T(0_V) = 0_W,$$

mostrando que $0_V \in Ker(T)$ e, portanto, $Ker(T) \neq \emptyset$.

Considere agora $v_1, v_2 \in Ker(T)$ e $k \in \mathbb{K}$. Então,

$$T(v_1) = 0_W \ \text{ e } \ T(v_2) = 0_W.$$

Vamos mostrar que $v_1 + v_2 \in Ker(T)$ e $kv_1 \in Ker(T)$. A linearidade de T implica que

$$T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2) = 0_w + 0_W = 0_W$$

e

$$T(kv_1) = kT(v_1) = k0_w = 0_W,$$

mostrando que $v_1 + v_2 \in Ker(T)$ e $kv_1 \in Ker(T)$. Portanto, o Teorema 3.11 garante que $Ker(T)$ é um subespaço vetorial de V, completando a prova. ■

Vejamos agora alguns exemplos de núcleo e do conjunto imagem de transformações lineares.

Exemplo 4.17. *Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y) = (0, x+y, 0)$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Claramente T é uma transformaçãoo linear (verifique esse fato!). Vamos encontrar seu núcleo e seu conjunto imagem.*

De fato: Recordemos que $(0, 0)$ e $(0, 0, 0)$ são respectivamente, os elementos neutros de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$. Assim, utilizando a Definição 4.15 temos, para $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, que

$$\begin{aligned}
(x, y) \in Ker(T) &\iff T(x, y) = (0, 0, 0) \\
&\iff (0, x + y, 0) = (0, 0, 0) \\
&\iff x + y = 0 \\
&\iff y = -x.
\end{aligned}$$

Logo,

$$Ker(T) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y = -x\} = [(1, -1)].$$

onde $[(1, -1)]$ denota o subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$, gerado pelo elemento $(1, -1)$.

Para calcularmos o conjunto imagem de T, recordemos que

$$Im(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ T(a, b) = (x, y, z) \ \text{ para algum } \ (a, b) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
(x, y, z) \in Im(T) &\iff T(a, b) = (x, y, z) \\
&\iff (0, a + b, 0) = (x, y, z) \\
&\iff x = 0,\ y = a + b \ \text{ e } \ z = 0.
\end{aligned}$$

Portanto, para todo $y \in \mathbb{R}$, tomando $a = \frac{y}{2}$ e $b = \frac{y}{2}$, temos que

$$T(a,b) = T(\frac{y}{2}, \frac{y}{2}) = (0, y, 0),$$

ou seja,

$$Im(T) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x = z = 0\} = [(0,1,0)],$$

completando o exemplo. $\square$

Exemplo 4.18. *Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $T(x,y) = 2x + 3y$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Claramente T é uma transformaçãoo linear (verifique esse fato!). Vamos encontrar seu núcleo e seu conjunto imagem.*

De fato: Recordemos que $(0,0)$ e 0 são respectivamente, os elementos neutros de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}$. Assim, utilizando a Definição 4.15 temos, para $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, que

$$\begin{aligned} (x,y) \in Ker(T) &\iff T(x,y) = 0 \\ &\iff 2x + 3y = 0 \\ &\iff y = -\frac{2}{3}x. \end{aligned}$$

Logo,

$$Ker(T) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y = -\frac{2}{3}x\} = [(3,-2)].$$

Para calcularmos o conjunto imagem de T, recordemos que

$$Im(T) = \{x \in \mathbb{R};\ T(a,b) = x \ \text{ para algum } \ (a,b) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} x \in Im(T) &\iff T(a,b) = x \\ &\iff 2a + 3b = x. \end{aligned}$$

Portanto, para todo $x \in \mathbb{R}$, tomando $a = \frac{x}{4}$ e $b = \frac{x}{6}$, temos que

$$T(a,b) = T(\frac{x}{4}, \frac{x}{2}) = 2\frac{x}{4} + 3\frac{x}{6} = \frac{x}{2} + \frac{x}{2} = x,$$

ou seja,

$$Im(T) = \mathbb{R},$$

completando o exemplo. □

A idéia agora é relacionar o conceito função injetora e função sobrejetora, visto nos cursos de matemática elementar, com o conceito de núcleo e imagem de transformações lineares. Apresentamos a próxima definição a título de recordação.

Definição 4.19. *Sejam V e W dois espaços vetoriais sobre o mesmo corpo de escalares $\mathbb{K}$ e uma transformação linear $T : V \to W$ dada.*

a) Diremos que T é injetora se para quaisquer $u, v \in V$ tais que $T(u) = T(v)$, tivermos que $u = v$, simbolicamente temos

$$\forall u, v \in V;\ T(u) = T(v) \implies u = v.$$

b) Diremos que T é sobrejetora se para todo $w \in W$, existir $v \in V$ tal que $T(v) = w$.

c) Diremos que T é bijetora quando T for simultaneamente injetora e sobrejetora, simbolicamente temos,

$$\forall w \in W,\ \exists! v \in V;\ T(v) = w.$$

Proposição 4.20. *Sejam V e W dois espaços vetoriais sobre o mesmo corpo de escalares $\mathbb{K}$ e uma transformação linear $T : V \to W$ dada.*

a. T é injetora se, e somente se, $Ker(T) = \{0_V\}$.

b. T é sobrejetora se, e somente se, $Im(T) = W$.

Demonstração: Para demonstrarmos o item a, suponhamos inicialmente que T seja injetora e tomemos $u \in Ker(T)$. Então,

$$T(u) = 0_W = T(0_V).$$

A injetividade de T implica que $u = 0_V$. Como sempre temos que $0_V \in Ker(T)$, obtemos que

$$Ker(T) = \{0_V\},$$

provando a condição suficiente do item a. Por outro lado, suponhamos que

$$Ker(T) = \{0_V\}$$

e sejam $u, v \in V$ tais que $T(u) = T(v)$. A linearidade de T implica que

$$T(u - v) = 0_W,$$

mostrando que

$$u - v \in Ker(T).$$

Portanto, $u - v = 0_V$, ou seja, $u = v$, mostrando a condição necessária do item a da proposição e completando a demostração deste item.

Para demonstrar o item b suponhamos agora que T é sobrejetora. Por definição, para todo $w \in W$, existe $v \in V$, tal que $T(v) = w$. Mas,

$$Im(T) = \{w \in W;\ \exists v \in C \ \text{ com } \ T(v) = w\}.$$

Assim, $Im(T) = W$. Por outro lado, suponhamos que $Im(T) = W$. Assim, se $w \in W$, pela hipótese $w \in Im(T)$. Logo, a definição de $Im(T)$ implica que existe $v \in V$ tal que $T(v) = w$ e, portanto, T é sobrejetora. Concluindo assim, a demonstração deste item e também da proposição. ■

Exemplo 4.21. *Vamos mostrar que a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definida por,*

$$T(x, y, z) = (x, x - y, y - z, z + x + 5y)$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, é injetora.

De fato: Se $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ e recordando que $0_{\mathbb{R}^3} = (0, 0, 0)$ e $0_{\mathbb{R}^4} = (0, 0, 0, 0)$, então

$$\begin{aligned}
(x, y, z) \in Ker(T) &\iff T(x, y, z) = (0, 0, 0, 0) \\
&\iff (x, x - y, y - z, z + x + 5y) = (0, 0, 0, 0) \\
&\iff x = 0,\ x - y = 0\ y - z = 0 \ \text{ e } \ z + x + 5y = 0 \\
&\iff x = y = z = 0 \\
&\iff (x, y, z) = 0_{\mathbb{R}^3},
\end{aligned}$$

mostrando que $Ker(T) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ e, portanto, a Proposição 4.20 implica que T é injetora. □

O próximo resultado é muito útil na verificação da sobrejetivade de operadores lineares e é o principal teorema deste capítulo.

Teorema 4.22 (Teorema do Núcleo e da Imagem). *Sejam V e W dois espaços vetoriais finitamente gerados sobre o mesmo corpo de escalares $\mathbb{K}$ e uma transformação linear $T : V \to W$ dada. Então,*

$$\dim V = \dim(Ker(T)) + \dim(Im(T)). \tag{4.5}$$

Demonstração: Sejam $\dim V = n$ e

$$B_1 = \{v_1, v_2, \ldots, v_r\},$$

com $r \leq n$, uma base de $Ker(T)$. O teorema do completamento, garante que podemos encontrar elementos $v_{r+1}, v_{r+2}, \ldots, v_n \in V$ tais que

$$B = \{v_1, v_2, \ldots, v_r, v_{r+1}, v_{r+2}, \ldots, v_n\}$$

é uma base de V.

Vamos mostrar que $B_2 = \{T(v_{r+1}), T(v_{r+2}), \ldots, T(v_n)\}$ é uma base de $Im(T)$.

De fato: Para mostrarmos que B_2 é linearmente independente, sejam $\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tais que,

$$\alpha_{r+1}T(v_{r+1}) + \alpha_{r+2}T(v_{r+2}) + \ldots + \alpha_n T(v_n) = 0_W.$$

A linearidade de T implica que,

$$T(\alpha_{r+1}v_{r+1} + \alpha_{r+2}v_{r+2}) + \ldots + \alpha_n v_n) = 0_W.$$

Logo,

$$\alpha_{r+1}v_{r+1} + \alpha_{r+2}v_{r+2}) + \ldots + \alpha_n v_n \in Ker(T)$$

e, portanto, existem $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{K}$ tais que,

$$\alpha_{r+1}v_{r+1} + \alpha_{r+2}v_{r+2} + \ldots + \alpha_n v_n = \alpha_1 v_1 \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_r v_r,$$

ou seja,

$$\alpha_1 v_1 \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_r v_r + (-\alpha_{r+1}v_{r+1}) + (-\alpha_{r+2}v_{r+2}) + \ldots + (-\alpha_n v_n) = 0_W.$$

Como B é uma base de obtemos que,

$$\alpha_{r+1} = \alpha_{r+2} = \ldots = \alpha_n = 0,$$

mostrando que B_2 é linearmente independente em W.

Mostremos agora que $B_2 = \{T(v_{r+1}), T(v_{r+2}), \ldots, T(v_n)\}$ é um conjunto gerador de $Im(T)$. Para mostrarmos este fato, seja $w \in Im(T)$. Então, existe $v \in V$ tal que $T(v) = w$. Mas, B é uma base de. Daí, existem $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tais que

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n.$$

A linearidade de T e o fato de B_1 ser uma base de $Ker(T)$ implicam que

$$\begin{aligned} w = T(v) &= T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n) \\ &= \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + \ldots + \alpha_r T(v_r) + \alpha_{r+1} T(v_{r+1} + \ldots + \alpha_n T(v_n) \\ &= 0_W + 0_W + \ldots + 0_W + \alpha_{r+1} T(v_{r+1} + \ldots + \alpha_n T(v_n) \\ &= \alpha_{r+1} T(v_{r+1} + \ldots + \alpha_n T(v_n), \end{aligned}$$

mostrando que

$$Im(T) \subset [T(v_{r+1}), T(v_{r+2}), \ldots, T(v_n)].$$

Como

$$T(v_{r+1}), T(v_{r+2}), \ldots, T(v_n) \in Im(T)$$

e $Im(T)$ é um subespaço vetorial de W, então

$$[T(v_{r+1}), T(v_{r+2}), \ldots, T(v_n)] \subset Im(T).$$

Logo,

$$[T(v_{r+1}), T(v_{r+2}), \ldots, T(v_n)] = Im(T)$$

e, portanto,

$$B_2 = \{T(v_{r+1}), T(v_{r+2}), \ldots, T(v_n)\}$$

é um conjunto gerador de $Im(T)$.

Logo, $B_2 = \{T(v_{r+1}), T(v_{r+2}), \ldots, T(v_n)\}$ é uma base de $Im(T)$. □

Ainda mais, pela construção da base B de V obtemos que

$$\begin{aligned} \dim V &= n = r + (n - r) \\ &= \dim(Ker(T)) + \dim(Im(T)), \end{aligned}$$

completando a prova deste teorema. ■

Exemplo 4.23. *Vamos estudar a sobrejetividade da transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definida, para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, por*

$$T(x, y, z) = (x, x + y, y + z, x - z).$$

De fato: Temos que

$$Ker(T) = \{(0, 0, 0)\},$$

pois

$$\begin{aligned}
(x, y, z) \in Ker(T) &\iff T(x, y, z) = 0_{\mathbb{R}^4} = (0, 0, 0, 0)\\
&\iff (x, x + y, y + z, x - z) = (0, 0, 0, 0)\\
&\iff x = 0,\ x + y = 0\ y + z = 0 \ \text{ e } \ x - z = 0\\
&\iff x = y = z = 0\\
&\iff (x, y, z) = 0_{\mathbb{R}^3}.
\end{aligned}$$

Logo T é uma transformação linear injetora.

Usando a fórmula em (4.5) concluímos que,

$$\dim(Im(T)) = \dim V - \dim(Ker(T)) = 3 - 0 = 3.$$

Como $\dim(\mathbb{R}^4) = 4$, concluímos que T não é sobrejetora, pois se T fosse sobrejetora deveríamos ter que

$$Im(T) = \mathbb{R}^4,$$

ou seja, deveriamos ter que $\dim(Im(T)) = 4$, completando o exemplo. □

Com relação aos fatos vistos no último exemplo temos o seguinte corolário do Teorema do Núcleo e da Imagem:

Corolário 4.24. *Sejam V e W dois espaços vetoriais finitamente gerados sobre o mesmo corpo de escalares $\mathbb{K}$ e uma transformação linear $T : V \to W$ dada. Se $\dim V = \dim W$, então as seguintes afirmações são equivalentes.*

I. *T é injetora.*

II. *T é sobrejetora.*

III. *T é bijetora.*

Demonstração: Para demonstrarmos esse corolário mostraremos a seguinte sequencia de implicações: $I \Longrightarrow II \Longrightarrow III \Longrightarrow I$. A terceira implicação é imediata. Façamos então as duas primeiras.

Suponhamos que T seja injetora. Logo, o item a da Proposição 4.20 implica que $Ker(T) = \{0_V\}$ e, portanto, $\dim(Ker(T)) = 0$. O Teorema do Núcleo e da Imagem implica então que

$$\dim(Im(T)) = \dim V - \dim(Ker(T)) = \dim W - 0 = \dim W.$$

Como $Im(T)$ é um subespaço vetorial de W, concluímos que $Im(T) = W$ e, portanto, que T é sobrejetora, isto mostra que $I \Longrightarrow II$.

Suponhamos agora que T seja sobrejetora. Logo, $Im(T) = W$ e, portanto, $\dim(Im(T)) = \dim W$. O Teorema do Núcleo e da Imagem implica então que

$$\dim(Ker(T)) = \dim V - \dim(Im(T)) = \dim V - \dim W = 0,$$

mostrando que $Ker(T) = \{0_V\}$ e, portanto, que T é injetora, provando a implicação $II \Longrightarrow I$, completando a prova do corolário. ∎

Exemplo 4.25. *Vamos estudar a injetividade e a sobrejetividade da transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ por,*

$$T(x, y) = (2x + y, 3x + 2y).$$

De fato: Temos, para $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, que

$$\begin{aligned}
(x, y) \in Ker(T) &\iff T(x, y) = 0_{\mathbb{R}^2} = (0, 0) \\
&\iff (2x + y, 3x + 2y) = (0, 0) \\
&\iff \begin{cases} 2x + y = 0 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases} \\
&\iff x = y = 0. \\
&\iff (x, y) = (0, 0) = 0_{\mathbb{R}^2}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$Ker(T) = \{(0,0)\} = \{0_{\mathbb{R}^2}\},$$

mostrando que T é uma transformação linear injetora.

Como $\dim V = \dim(Im(T)) = \dim W = 2$, o Corolário 4.24 implica que T é sobrejetora e, portanto, T é bijetora. Observemos que usando a fórmula em (4.5) concluímos que,

$$\dim(Im(T)) = \dim V - \dim(Ker(T)) = 2 - 0 = 2,$$

e também podemos concluir que T é sobrejtora, uma vez que $Im(T)$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$. $\square$

Podemos também utilizar o Teorema do Núcleo e da Imagem para encontrar uma base para o conjunto imagem de transformações lineares, como mostra o próximo corolário.

Corolário 4.26. *Sejam V e W dois espaços vetoriais finitamente gerados sobre o mesmo corpo de escalares $\mathbb{K}$ e $T : V \to W$ uma transformação linear injetora dada. Então T leva base de V em base do conjunto imagem, $Im(T)$. Em particular, quando $\dim V = \dim W$, então T leva base de V em base de W.*

Demonstração: Seja

$$B_1 = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$$

uma base de V. Mostremos que

$$B_2 = \{T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n)\}$$

é uma base de $Im(T)$.

De fato: Para mostrarmos a independência linear de B_2, sejam $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tais que,

$$\alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + \ldots + \alpha_n T(v_n) = 0_W.$$

A linearidade de T implica que,

$$T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n) = 0_W = T(0_V).$$

Como T éinjetora, concluímos que,

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = 0_V$$

e, portanto, como B_1 é linearmente independente, obtemos que $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$, mostrando que B_2 é um subconjunto linearmente independente de W.

Mostremos agora que B_2 é um conjunto gerador de $Im(T)$. Para isso seja $w \in Im(T)$. Logo, existe $v \in V$ tal que $T(v) = w$. Também, existem escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tais que,

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n.$$

Portanto, a linearidade de T implica que,

$$w = T(v) = T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + \ldots + \alpha_n T(v_n),$$

mostrando que B_2 é um conjunto gerador de $Im(T)$ e mostrando que

$$B_2 = \{T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n)\}$$

é uma base de $Im(T)$.

Para concluirmos a outra parte do corolário, observemos que se $\dim V = \dim W$, então a injetividade de T implica que T é sobrejetora e, portanto, $Im(T) = W$ e a parte anterior finaliza a demonstração deste corolário. ■

Uma consequência imediata que pode ser observada na demonstração do Corolário 4.26 é que toda transformação linear $T : V \to W$ fica bem determinada se conhecermos os valores de T nos elementos de uma base qualquer de V, ou seja, para conhecermos como uma transformação atua em todos os elementos de V, basta que se conheça como a transformação linear atua em uma base de V. Ilustraremos este comentário no próximo exemplo.

Exemplo 4.27. *Vamos encontrar uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que*

$$T(1,0) = (2,-1,0)$$
$$T(0,1) = (0,0,1).$$

De fato: Para isso, observemos inicialmente que $\{(1,0),(0,1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$. Assim, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ temos que

$$(x,y) = x(1,0) + y(0,1).$$

Logo,

$$\begin{aligned} T(x,y) &= T(x(1,0)+y(0,1)) = xT(1,0)+yT(0,1) \\ &= x(2,-1,0)+y(0,0,1) \\ &= (2x,-x,0)+(0,0,y) \\ &= (2x,-x,y). \end{aligned}$$

Portanto, a transformação linear desejada é definida por $T(x,y) = (2x,-x,y)$, para todo $x,y) \in \mathbb{R}^2$. Claramente essa função é linear (verifique!). $\square$

4.3 Isomorfismos

Sabemos dos cursos de matemática elementar que toda função bijetora possui uma inversa, no caso de transformações lineares, este conceito é ainda mais importante e passaremos agora a estudá-lo.

Definição 4.28. *Sejam V e W dois espaços vetoriais sobre o mesmo corpo de escalares $\mathbb{K}$ e $T : V \to W$ uma transformação linear dada. Diremos que T é um isomorfismo entre V e W, se T for injetora e sobrejetora. Neste caso diremos que V e W são isomorfos.*

Inicialmente vamos mostrar um resultado que garante que quando uma transformação linear é bijetora, sua inversa também é uma transformação linear.

Proposição 4.29. *Sejam V e W dois espaços vetoriais sobre o mesmo corpo de escalares $\mathbb{K}$ e $T : V \to W$ uma transformação linear bijetora dada. Então, $T^{-1} : W \to V$ é uma transformação linear bijetora.*

Demonstração: Como T é uma função bijetora, então T é uma função bijetora. Vamos mostrar que T^{-1} é uma transformação linear. Para isso sejam $w_1, w_2 \in W$ e $k_1, k_2\mathbb{K}$. Então, existem únicos $v_1, v_2 \in V$ tais que,

$$T(v_1) = w_1 \quad \text{e} \quad T(v_2) = w_2.$$

Logo,

$$T^{-1}(w_1) = v_1 \quad \text{e} \quad T^{-1}(w_2) = v_2.$$

Assim, a linearidade de T implica que,

$$T(k_1v_1 + k_2v_2) = k_1T(v_1) + k_2 + T(v_2) = k_1w_1 + k_2w_2.$$

Então,

$$T^{-1}(k_1w_1 + k_2w_2) = k_1v_1 + k_2v_2 = k_1T^{-1}(w_1) + k_2T^{-1}(w_2),$$

provando a linearidade de T^{-1} e completando a prova desta proposição. ■

Exemplo 4.30. *Vamos mostrar que a transformação linear* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *definida, para todo* $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$*, por,*

$$T(x, y, z) = (x - 2y, z, x + y)$$

é um isomorfismo e vamos calcular T^{-1}*, a inversa de* T*.*

De fato: Comecemos mostrando que T é uma transformação linear. Sejam $u = (x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3$, $v = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ e $k \in \mathbb{R}$. Temos que

$$\begin{aligned}
T(u + v) &= T((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)) \\
&= T(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \\
&= ((x_1 + x_2) - 2(y_1 + y_2), z_1 + z_2, (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)) \\
&= (x_1 - 2y_1 + x_2 - 2y_2, z_1 + z_2, x_1 + y_1 + x_2 + y_2) \\
&= (x_1 - 2y_1, z_1, x_1 + y_1) + (x_2 - 2y_2, z_2, x_2 + y_2) \\
&= T(x_1, y_1, z_1) + T(x_2, y_2, z_2) \\
&= T(u) + T(v),
\end{aligned}$$

provando a condição 1 da definição de linearidade de uma função.

Ainda mais,

$$\begin{aligned}
T(ku_1) &= T(k(x_1, y_1, z_1)) \\
&= T(kx_1, ky_1, kz_1) \\
&= (kx_1 - 2(ky_1), kz_1, (kx_1) + (ky_1)) \\
&= (kx_1 - 2ky_1, kz_1, kx_1 + ky_1) \\
&= (k(x_1 - 2y_1), kz_1, k(x_1 + y_1)) \\
&= k(x_1 - 2y_1, z_1, x_1 + y_1) \\
&= kT(x_1, y_1, z_1) \\
&= kT(u_1),
\end{aligned}$$

mostrando que T é uma transformação linear.

Para mostrar que T é bijetora, basta mostrar que T é injetora. Para fazermos isso, vamos encontrar o núcleo, $Ker(T)$, de T. Se $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, então

$$\begin{aligned}
u = (x, y, z) \in Ker(T) &\iff T(x, y, z) = 0_{\mathbb{R}^3} = (0, 0, 0) \\
&\iff (x - 2y, z, x + y) = (0, 0, 0) \\
&\iff x - 2y = 0,\ z = 0 \ \text{ e } \ x + y = 0 \\
&\iff x = y = z = 0 \\
&\iff (x, y, z) = (0, 0, 0) = 0_{\mathbb{R}^3},
\end{aligned}$$

mostrando que $Ker(T) = \{\ 0_{\mathbb{R}^3}\}$.

Logo, T é injetora e, portanto, bijetora. Logo, $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ admite uma inversa $T^{-1} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. A Proposição 4.29 implica que T^{-1} é uma transformação linear e, portanto, usaremos este fato para encontramos uma expressão para T^{-1}.

Seja $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ uma base de $\mathbb{R}^3$, usando a expressão de T obtemos que,

$$\begin{aligned}
T(1, 0, 0) = (1, 0, 1) &\iff T^{-1}(1, 0, 1) = (1, 0, 0) \\
T(0, 1, 0) = (-2, 0, 1) &\iff T^{-1}(-2, 0, 1) = (0, 1, 0) \\
T(0, 0, 1) = (0, 1, 0) &\iff T^{-1}(0, 1, 0) = (0, 0, 1).
\end{aligned}$$

Assim, $C = \{(1,0,1), (-2,0,1), (0,1,0)\}$ também é uma base de $\mathbb{R}^3$. Assim, calculando as coordenadas de $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ em relação a base C temos que,

$$(x, y, z) = \frac{x+2z}{3}(1,0,1) + \frac{z-x}{3}(-2,0,1) + y(0,1,0).$$

Logo, usando a linearidade de T^{-1} , obtemos que

$$\begin{aligned} T^{-1}(x,y,z) &= T^{-1}(\frac{x+2z}{3}(1,0,1) + \frac{z-x}{3}(-2,0,1) + y(0,1,0)) \\ &= \frac{x+2z}{3}T^{-1}(1,0,1) + \frac{z-x}{3}T^{-1}(-2,0,1) + yT^{-1}(0,1,0) \\ &= \frac{x+2z}{3}(1,0,0) + \frac{z-x}{3}(0,1,0) + y(0,0,1) \\ &= (\frac{x+2z}{3}, \frac{z-x}{3}, y), \end{aligned}$$

concluindo o exemplo. □

Exemplo 4.31. *Vamos mostrar que o espaço vetorial* $\mathbb{R}^4$ *é isomorfo ao espaço vetorial,* $\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$*, das matrizes quadradas de ordem* 2×2*, com entradas reais.*

De fato: Para isso definamos uma transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ por

$$T(x, y, z, w) = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}.$$

Vamos mostrar que é uma transformação linear bijetora, mostrando assim que $\mathbb{R}^4$ é isomorfo ao espaço vetorial $\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Temos, para $u = (x_1, y_1, z_1, w_1) \in \mathbb{R}^4$, $v = (x_2, y_2, z_2, w_2) \in \mathbb{R}^4$ e $k \in \mathbb{R}$ temos que

$$\begin{aligned} T(u+v) &= T((x_1,y_1,z_1,w_1) + (x_2,y_2,z_2,w_2)) \\ &= T(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2, w_1+w_2) \\ &= \begin{bmatrix} x_1+x_2 & y_1+y_2 \\ z_1+z_2 & w_1+w_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ z_1 & w_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ z_2 & w_2 \end{bmatrix} \\ &= T(x_1,y_1,z_1,w_1) + T(x_2,y_2,z_2,w_2) \\ &= T(u) + T(v), \end{aligned}$$

provando a condição 1 da definição de linearidade de uma função.

Ainda mais,

$$\begin{aligned} T(ku_1) &= T(k(x_1, y_1, z_1, w_1)) \\ &= T(kx_1, ky_1, kz_1, kw_1) \\ &= \begin{bmatrix} kx_1 & ky_1 \\ kz_1 & kw_1 \end{bmatrix} \\ &= k \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ z_1 & w_1 \end{bmatrix} \\ &= kT(x_1, y_1, z_1, w_1) \\ &= kT(u_1), \end{aligned}$$

provando que T é uma transformação linear.

Para mostrarmos que T é uma função bijetora, como $\dim(\mathbb{R}^4) = 4 = \dim(\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}))$, é suficiente mostrarmos que T é injetora. Temos

$$\begin{aligned} u = (x, y, z, w) \in Ker(T) &\iff T(x, y, z, w) = 0_{\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &\iff \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &\iff x = y = z = w = 0 \\ &\iff (x, y, z, w) = 0_{\mathbb{R}^4}, \end{aligned}$$

mostrando que $Ker(T) = \{\ 0_{\mathbb{R}^4}\}$. Logo, T é injetora e, portanto, bijetora e a Proposição 4.29 implica que T é um isomorfismo. Concluímos então que $\mathbb{R}^4$ é isomorfo ao espaço vetorial $\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, completando o exemplo. □

Este último exemplo pode ser generalizado, como mostra o próximo corolário.

Corolário 4.32. *Sejam V e W dois espaços vetoriais sobre o mesmo corpo de escalares $\mathbb{K}$ tais que* $\dim(V) = \dim(W)$, *então V e W são isomorfos.*

Demonstração: Como V e W possuem a mesma dimensão sejam

$$B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$$

e

$$C = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$$

bases de V e W respectivamente. Definamos $T : V \to W$, da seguinte maneira: Para cada $v \in V$, existem únicos escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tais que

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n.$$

Seja então

$$T(v) = T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \ldots + \alpha_n w_n.$$

os escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$são unicamente determinados pelo fato de B ser uma base de V T está bem definida pelo fato de C ser uma base de W. Observemos ainda que

$$T(v_1) = w_1,\ T(v_2) = w_2, \ldots, T(v_n) = w_n.$$

Vamos mostrar que T é um isomorfismo. Para isso sejam $u, v \in V$ e $k \in \mathbb{K}$. Logo existem escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ E $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in \mathbb{K}$ tais que

$$u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n \ \text{ e } v = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \ldots + \beta_n v_n.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
T(u+v) &= T((\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n) + (\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \ldots + \beta_n v_n)) \\
&= T((\alpha_1 + \beta_1) v_1 + (\alpha_2 + \beta_2) v_2 + \ldots + (\alpha_n + \beta_n) v_n) \\
&= (\alpha_1 + \beta_1) w_1 + (\alpha_2 + \beta_2) w_2 + \ldots + (\alpha_n + \beta_n) w_n \\
&= \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \ldots + \alpha_n w_n + \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 + \ldots + \beta_n w_n \\
&= T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n) + T(\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \ldots + \beta_n v_n) \\
&= T(u) + T(v),
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} T(ku) &= T(k(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n)) \\ &= T((k\alpha_1)v_1 + (k\alpha_2)v_2 + \ldots + (k\alpha_n)v_n) \\ &= (k\alpha_1)w_1 + (k\alpha_2)w_2 + \ldots + (k\alpha_n)w_n \\ &= k(\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \ldots + \alpha_n w_n) \\ &= kT(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n) \\ &= kT(u), \end{aligned}$$

mostrando que T é uma transformação linear.

Para mostrarmos que T é uma função bijetora, como $\dim V = \dim W$, o Corolário 27.11 implica que é suficiente mostrarmos que T é injetora. Temos

$$\begin{aligned} v \in Ker(T) &\iff T(v) = 0_W \\ &\iff T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n) = 0_W \\ &\iff \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \ldots + \alpha_n w_n = 0_W \\ &\iff \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0 \\ &\iff v = 0_V, \end{aligned}$$

pois B é uma base de V e C é uma base de W. Logo a Proposição 27.7.4 implica que T é injetora e, portanto, é bijetora. A Proposição 4.29 implica então que T é um isomorfismo, mostrando que V e W são isomorfos, completando a demonstração deste corolário. ■

Exemplo 4.33. *Vamos mostrar que a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, por,*

$$T(x, y) = (x + y, x - y)$$

é um isomorfismo e vamos calcular T^{-1}, a inversa de T.

De fato: Comecemos mostrando que T é uma transformação linear. Sejam $u = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, $v =$

$(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ e $k \in \mathbb{R}$. Temos que

$$\begin{aligned}
T(u+v) &= T((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) \\
&= T(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\
&= ((x_1 + x_2) + (y_1 + y_2), (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2)) \\
&= (x_1 + y_1 + x_2 + y_2, x_1 - y_1 + x_2 - y_2) \\
&= (x_1 + y_1, x_1 - y_1) + (x_2 + y_2, x_2 - y_2) \\
&= T(x_1, y_1) + T(x_2, y_2) \\
&= T(u) + T(v),
\end{aligned}$$

provando a condição 1 da definição de linearidade de uma função.

Ainda mais,

$$\begin{aligned}
T(ku_1) &= T(k(x_1, y_1)) \\
&= T(kx_1, ky_1) \\
&= (kx_1 + ky_1, kx_1 - ky_1) \\
&= (k(x_1 + y_1), k(x_1 - y_1)) \\
&= k(x_1 + y_1, x_1 - y_1) \\
&= kT(x_1, y_1) \\
&= kT(u_1),
\end{aligned}$$

provando que T é uma transformação linear.

Para mostrar que T é bijetora, basta mostrar que T é injetora. Para fazermos isso, vamos encontrar o núcleo, $Ker(T)$, de T. Se $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, então

$$\begin{aligned}
u = (x, y) \in Ker(T) &\iff T(x, y) = 0_{\mathbb{R}^2} = (0, 0) \\
&\iff (x + y, x - y) = (0, 0) \\
&\iff x + y = 0 \text{ e } \ x - y = 0 \\
&\iff x = y = 0 \\
&\iff (x, y) = 0_{\mathbb{R}^2},
\end{aligned}$$

mostrando que $Ker(T) = \{ 0_{\mathbb{R}^2}\}$. Assim, T é injetora e, portanto, bijetora. Logo, $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ admite uma inversa $T^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. A Proposição 4.29 implica que T^{-1} é uma transformação linear e, portanto, usaremos este fato para encontramos uma expressão para T^{-1}.

Seja $B = \{(1, 0), (0, 1)\}$ uma base de $\mathbb{R}^2$, usando a expressão de T obtemos que,

$$T(1, 0) = (1, 1) \iff T^{-1}(1, 1) = (1, 0)$$
$$T(0, 1) = (1, -1) \iff T^{-1}(1, -1) = (0, 1).$$

Logo, $C = \{(1, 1), (1, -1)\}$ também é uma base de $\mathbb{R}^2$. Assim, calculando as coordenadas de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ em relação a base C temos que,

$$(x, y) = \frac{x + y}{2}(1, 1) + \frac{x - y}{2}(1, -1).$$

Logo, usando a linearidade de T^{-1} , obtemos que

$$\begin{aligned} T^{-1}(x, y) &= T^{-1}(\frac{x + y}{2}(1, 1) + \frac{x - y}{2}(1, -1)) \\ &= \frac{x + y}{2}T^{-1}(1, 1) + \frac{x - y}{2}T^{-1}(1, -1) \\ &= \frac{x + y}{2}(1, 0) + \frac{x - y}{2}(0, 1) \\ &= (\frac{x + z}{2}, \frac{x - y}{2}), \end{aligned}$$

concluindo o exemplo. □

4.4 Matriz de uma Transformação Linear

O objetivo principal desta seção é mostrarmos que existe uma correspondência biunívoca entre matrizes e transformações lineares. Dessa forma, trabalhar com transformações lineares torna-se bem mais fácil, pois transportamos as propriedades que conhecemos sobre matrizes para as transformações lineares. Vejamos um exemplo deste fato.

Exemplo 4.34. *Consideremos uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida, para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, por*

$$T(x, y, z) = (x + y, x + z, y + z).$$

Vamos encontrar uma matriz de tal forma que calcular T em um elemento de $\mathbb{R}^3$ seja equivalente a multiplicar essa matriz pelas coordenadas desse elemento.

De fato: Seja $B = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ uma base de $\mathbb{R}^3$. Temos que,

$$T(1,0,0) = (1,1,0) = 1(1,0,0) + 1(0,1,0) + 0(0,0,1)$$
$$T(0,1,0) = (1,0,1) = 1(1,0,0) + 0(0,1,0) + 1(0,0,1)$$
$$T(0,0,1) = (0,1,1) = 0(1,0,0) + 1(0,1,0) + 1(0,0,1).$$

Assim, dispondo as coordenadas encontradas acima, em função da base B, como colunas de uma matriz quadrada de ordem 3, a qual chamaremos de matriz da transformação linear T relativa à base B. Temos que,

$$[T]_B^B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dessa forma vemos que calcular o valor da transformação linear em um elemento qualquer de $\mathbb{R}^3$ é equivalente a multiplicar a matriz acima pela matriz, em forma de uma matriz coluna, das coordenadas deste elemento na base B, isto é, se $u = (3,4,5) \in \mathbb{R}^3$, utilizando a definição de T, obtemos que

$$T(3,4,5) = (7,8,9).$$

Por outro lado, temos que,

$$[u]_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$[Tu]_B = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} = [T]_B^B [u]_B,$$

completando o exemplo. □

Vamos estudar agora, com detalhes, as idéias vistas acima. Começaremos introduzindo os conceitos de soma de transformações lineares, bem como o produto de um escalar por uma transformação linear.

Sejam V e W espaços vetoriais sobre o mesmo corpo de escalares $\mathbb{K}$. Denotaremos por $\mathcal{L}(V, W)$ o conjunto de todas as transformações lineares de V em W. Quando $V = W$ o conjunto dos operadores lineares de V em V será denotado apenas por $\mathcal{L}(V)$. No que se segue vamos definir duas operações em $\mathcal{L}(V, W)$ de modo a torná-lo um espaço vetorial sobre o corpo de escalares $\mathbb{K}$.

Definição 4.35. *Sejam V e W espaços vetoriais sobre o mesmo corpo de escalares $\mathbb{K}$ e considere $F, G \in \mathcal{L}(V, W)$. Definimos a soma de F com G como sendo a função $F + G : V \to W$, atuando em um elemento $v \in V$ da seguinte maneira:*

$$(F + G)(v) = F(v) + G(v).$$

Como vimos anteriormente, a soma de funções definida como acima satisfaz todas as propriedades exigidas para que $\mathcal{L}(V, W)$ se torne um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Vamos mostrar que se $F, G \in \mathcal{L}(V, W)$, então a função $F + G \in \mathcal{L}(V, W)$, ou seja, devemos mostrar que $F + G$ é uma transformação linear. Para fazermos isso, sejam $v_1, v_2 \in V$ e $k \in \mathbb{K}$. Então,

$$\begin{aligned}(F + G)(v_1 + v_2) &= F(v_1 + v_2) + G(v_1 + v_2)\\ &= F(v_1) + F(v_2) + G(v_1) + G(v_2)\\ &= F(v_1) + G(v_1) + F(v_2) + G(v_2)\\ &= (F + G)(v_1) + (F + G)(v_2)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}(F + G)(kv_1) &= F(kv_1) + G(kv_1)\\ &= kF(v_1) + kG(v_1)\\ &= k(F(v_1) + G(v_1))\\ &= k((F + G)(v_1)),\end{aligned}$$

mostrando que $F + G$ é uma transformação linear e, portanto, $F + G \in \mathcal{L}(V, W)$.

Definição 4.36. *Sejam V e W espaços vetoriais sobre o mesmo corpo de escalares $\mathbb{K}$ e considere $F \in \mathcal{L}(V,W)$ $k \in \mathbb{K}$. Definimos o produto escalar de k por F com G como sendo a função $kF : V \to W$, atuando em um elemento $v \in V$ da seguinte maneira:*

$$(kF)(v) = k(F(v)).$$

Também, como vimos anteriormente, o produto de um escalar por uma função, definido como acima, satisfaz todas as propriedades exigidas para que $\mathcal{L}(V,W)$ se torne um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Vamos mostrar que se $F \in \mathcal{L}(V,W)$ e $k\mathbb{K}$, então a função $kF \in \mathcal{L}(V,W)$, ou seja, devemos mostrar que kF é uma transformação linear. Para fazermos isso, sejam $v_1, v_2 \in V$ e $k_1 \in \mathbb{K}$. Então,

$$\begin{aligned}(kF)(v_1 + v_2) &= k(F(v_1 + v_2)) \\ &= k(F(v_1) + F(v_2)) \\ &= k(F(v_1)) + k(F(v_2)) \\ &= (kF)(v_1) + (kF)(v_2)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}(kF)(k_1 v_1) &= k(F(k_1 v_1)) \\ &= k(k_1 F(v_1)) \\ &= k_1(kF(v_1)) \\ &= k_1((kF)(v_1)),\end{aligned}$$

mostrando que kF é uma transformação linear e, portanto, $kF \in \mathcal{L}(V,W)$.

Pelo que vimos acima, podemos concluir que se V e W são espaços vetoriais sobre o mesmo corpo de escalares K, então $\mathcal{L}(V,W)$ é também um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Recordaremos agora uma outra importante operação entre transformações lineares, a composição de transformações lineares.

Definição 4.37. *Sejam U, V e W espaços vetoriais sobre o mesmo corpo de escalares $\mathbb{K}$ e considere $F : U \to V$ e $G : V \to W$ duas transformações lineares. Definimos a composta de G por F como sendo a função $G \circ F : U \to W$, atuando em um elemento $u \in U$ da seguinte maneira:*

$$(G \circ F)(u) = G(F(u)).$$

Vamos mostrar que $G \circ F$ é uma transformação linear de U em W. De fato, sejam $u_1, u_2 \in U$ e $k \in \mathbb{K}$. Então, a linearidade de F e G implicam que

$$\begin{aligned}(G \circ F)(u_1 + u_2) &= G(F(u_1 + u_2)) \\ &= G(F(u_1) + F(u_2)) \\ &= G(F(u_1)) + G(F(u_2)) \\ &= (G \circ F)(u_1) + (G \circ F)(u_2)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}(G \circ F)(ku_1) &= G(F(ku_1)) \\ &= G(kF(u_1)) \\ &= kG(F(u_1)) \\ &= k(G \circ F)(u_1),\end{aligned}$$

provando $G \circ F$ é uma transformação linear, ou seja, $G \circ F \in \mathcal{L}(U, W)$.

Quando trabalhamos com operadores lineares, isto é, quando $F, G \in \mathcal{L}(V)$, onde V é um espaço vetorial sobre um corpo de escalares $\mathbb{K}$, então $G \circ F \in \mathcal{L}(V)$ e, pelo mesmo motivo, $F \circ G \in \mathcal{L}(V)$. Entretanto, como já vimos antes, a operação composição não é comutativa como já foi mostrado anteriormente.

Sejam V e W dois espaços vetoriais sobre um mesmo corpo de escalares $\mathbb{K}$. Vimos que $\mathcal{L}(V, W)$, o conjunto de todas as transformações lineares de V em W é um espaço vetorial. Consideremos agora $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ e $C = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ bases de V e Wv respectivamente. Vamos mostrar que a cada transformação linear $F \in \mathcal{L}(V, W)$ está associada uma única matriz, com coeficientes em $\mathbb{K}$, em $M_{m \times n}(\mathbb{K})$, generalizando o que foi visto no Exemplo 4.34.

Para cada $j = 1, 2, \ldots, n$, $F(v_j) \in W$. Logo, existem escalares $\alpha_{ij} \in \mathbb{K}$, determinados de forma única, tais que,

$$\begin{aligned}F(v_1) &= \alpha_{11}w_1 + \alpha_{21}w_2 + \ldots + \alpha_{m1}w_m \\ F(v_2) &= \alpha_{12}w_1 + \alpha_{22}w_2 + \ldots + \alpha_{m2}w_m \\ &\vdots \\ F(v_n) &= \alpha_{1n}w_1 + \alpha_{2n}w_2 + \ldots + \alpha_{mn}w_m,\end{aligned}$$

ou ainda,

$$F(v_j) = \sum_{i=1} m\alpha_{ij} w_1, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

A transposta da matriz dos coeficientes do sistema acima, denotada por $[F]_C^B \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, é chamada de matriz da transformação linear F em relação as bases B e C. Temos que

$$[F]_C^B = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \ldots & \alpha_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \alpha_{m3} & \ldots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

Com o mesmo raciocínio acima obtemos, para todo $v \in V$, que

$$[F(v)]_C = [F]_C^B [v]_B.$$

Dessa forma vemos que calcular a imagem, pela transformação linear F, de um elemento qualquer do espaço vetorial V se reduz a multiplicar a matriz de F pela matriz das coordenadas de $v \in V$.

Vamos ilustrar, através de alguns exemplos como calcular a matriz de uma transformação linear e como utilizar essa matriz para calcular o valor da transformação linear em um elemento qualquer de V.

Exemplo 4.38. *Consideremos a transformação linear $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida, para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, por*

$$F(x, y, z) = (x + y, y + z).$$

Sejam $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ uma base de $\mathbb{R}^3$ e $C = \{(1, 0), (1, 1)\}$ uma base de $\mathbb{R}^2$. Vamos calcular a matriz de F em relação às bases B e C.

De fato: Temos que

$$F(1, 0, 0) = (1, 0) = 1(1, 0) + 0(1, 1)$$

$$F(0, 1, 0) = (1, 1) = 0(1, 0) + 1(1, 1)$$

$$F(0, 0, 1) = (0, 1) = -1(1, 0) + 1(1, 1).$$

Logo,

$$[F]_C^B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Consideremos agora o elemento $(1,1,1) = 1(1,0,0) + 1(0,1,0) + 1(0,0,1)$, isto implica que as coordenadas de $(1,1,1) \in \mathbb{R}^3$ são dadas, na forma matricial, por

$$[(1,1,1)]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ainda,

$$[F(1,1,1)]_C = [(2,2)]_C = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Por outro lado,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Dessa forma, vemos que calcular o valor da transformação linear F em um determinado elemento de $\mathbb{R}^3$ é equivalente a calcular a multiplicação da matriz de F pela matriz das coordenadas do elemento em relação a base B. □

Vale a pena observar aqui que a matriz de uma transformação linear depende das bases consideradas para os espaços vetoriais envolvidos.

Exemplo 4.39. *Consideremos a transformação linear $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida, para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, por*

$$F(x,y,z) = (2x + y - z, 3x - 2y + 4z).$$

Sejam $B = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ e $B' = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ duas bases de $\mathbb{R}^3$ e $C = \{(1,3),(1,4)\}$ e $C' = \{(1,0),(0,1)\}$ duas bases de $\mathbb{R}^2$. Vamos calcular a matriz de F em relação às bases B e C e depois em relação às bases B' e C'.

De fato: Temos que

$$F(1,1,1) = (2,5) = 3(1,3) + (-1)(1,4)$$
$$F(1,1,0) = (3,1) = 11(1,3) + (-8)(1,4)$$
$$F(1,0,0)) = (2,3) = 5(1,3) + (-3)(1,4).$$

Logo,

$$[F]_C^B = \begin{bmatrix} 3 & 11 & 5 \\ -1 & -8 & -3 \end{bmatrix}.$$

Agora, se $B' = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ é uma outra base de $\mathbb{R}^3$ e $C' = \{(1,0),(0,1)\}$ é uma outra base de $\mathbb{R}^2$, temos que

$$F(1,0,0) = (2,3) = 2(1,0) + 3(0,1)$$
$$F(0,1,0) = (1,-2) = 1(1,0) + (-2)(0,1)$$
$$F(0,0,1) = (-1,4) = (-1)(1,0) + 4(0,1).$$

Neste caso, a matriz da transformação linear F com relação às bases B' e C' é dada por,

$$[F]_{C'}^{B'} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix},$$

completando o exemplo. □

Como podemos ver no exemplo anterior, a mudança das bases alteram a matriz da transformação linear. Isto será, como veremos no próximo capítulo, um fato bom, pois podemos escolher bases adequadas para os espaços vetoriais envolvidos, de forma a deixar a matriz que representa a transformação linear mais simples, o que facilita os cálculos que porventura precisamos efetuar.

Vamos agora fazer o caminho inverso do que foi feito acima, isto é, dada uma matriz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ e bases $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ e $C = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ dos espaços vetoriais V e W respectivamente, vamos mostrar que existe uma transformação linear $F : V \to W$ de tal forma que $[F]_C^B = A$.

Seja

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Definamos

$$\begin{aligned} F_A : & V \to W \\ & v \mapsto F_A(v), \end{aligned}$$

onde $F_A(v) \in W$, écalculado da seguinte maneira: como $v \in V$, existem escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, unicamente determinados, tais que,

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n. \tag{4.6}$$

Consideremos então,

$$[F_A(v)]_C = A[v]_B = A \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix}$$

e, finalmente,

$$F_A(v) = \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 + \dots + \beta_m w_m.$$

A unicidade dos coeficientes em (4.6), para cada $v \in V$, mostra que F_A é uma transformação linear entre os espaços vetoriais V e W.

Vamos mostrar agora que,

$$[F_A]_C^B = A.$$

Para fazermos isso primeiramente vamos escrever cada vetor da base B em função dos vetores da própria base B. Temos,

$$\begin{aligned} v_1 &= 1v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_n \\ v_2 &= 0v_1 + 1v_2 + \dots + 0v_n \\ &\vdots \\ v_n &= 0v_1 + 0v_2 + \dots + 1v_n. \end{aligned}$$

Logo, para $j = 1, 2, \ldots, n$, temos que,

$$F_A(v_j) = \beta_1^j w_1 + \beta_2^j w_2 + \ldots + \beta_m^j w_m,$$

onde as coordenadas β_i^j , $i = 1, 2, \ldots, m$ e $j = 1, 2, \ldots, n$, são dadas por,

$$\begin{bmatrix} \beta_1^1 \\ \beta_2^1 \\ \vdots \\ \beta_m^1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \beta_1^2 \\ \beta_2^2 \\ \vdots \\ \beta_m^2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}.$$

Assim sucessivamente, temos que,

$$\begin{bmatrix} \beta_1^n \\ \beta_2^n \\ \vdots \\ \beta_m^n \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Logo, obtemos que,

$$[F_A]_C^B = A.$$

Exemplo 4.40. *Dada a matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e as bases $B = \{(1,0),(0,1)\}$ *e* $C = \{(1,1),(-1,1)\}$. *Vamos encontrar uma transformação linear* $F_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *tal que,*

$$[F_A]_C^B = A.$$

De fato: Para resolvermos esse problema, para todo $u \in \mathbb{R}^2$, devemos ter que

$$[F_A(u)]_C = A[u]_B.$$

Seja então $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, isto é, $u = (x, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$. Logo,

$$[F_A(u)]_C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ y \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$F_A(u) = F_A(x, y) = 2x(1, 1) + y(-1, 1) = (2x - y, 2x + y).$$

Vamos agora verificar se de fato a matriz de F_A é de fato a matriz A. Temos,

$$F_A(1, 0) = (2, 2) = 2(1, 1) + 0(-1, 1)$$

$$F_A(0, 1) = (-1, 1) = 0(1, 1) + 1(-1, 1).$$

Logo,

$$[F_A]_C^B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = A,$$

completando o exemplo. □

Exemplo 4.41. *Dada a matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Vamos encontrar uma transformação linear $F_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *tal que,* $[F_A]_C^B = A$, *onde*

$$B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 1, 2))\} \quad e \quad C = \{(1, 0), (1, 1)\}.$$

De fato: Seja $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Então,

$$u = (x, y, z) = x(1, 0, 0) + (y - \frac{z}{2})(0, 1, 0) + \frac{z}{2}(0, 1, 2),$$

isto é,

$$[u]_B = \begin{bmatrix} x \\ y - \frac{z}{2} \\ \frac{z}{2} \end{bmatrix}..$$

Logo,

$$[F_A(u)]_C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y - \frac{z}{2} \\ \frac{z}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 2y + \frac{z}{2} \\ y - \frac{z}{2} \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$F_A(u) = F_A(x,y,z) = (x+2y+\frac{z}{2})(1,0) + (y-\frac{z}{2})(1,1) = (x+3y, y-\frac{z}{2}).$$

Vamos agora verificar se de fato a matriz de F_A é de fato a matriz A. Temos,

$$F_A(1,0,0) = (1,0) = 1(1,0) + 0(1,1)$$

$$F_A(0,1,0) = (3,1) = 2(1,0) + 1(1,1)$$

$$F_A(0,1,2) = (3,0) = 3(1,0) + 0(1,1)$$

Logo,

$$[F_A]_C^B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = A,$$

completando o exemplo. □

Exemplo 4.42. *Considere $F, G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definidas por,*

$$F(x,y) = (2x, x+2y) \quad e \quad G(x,y) = (3x+y, x+3y),$$

para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Temos que,

$$\begin{aligned}(F\circ G)(x,y) &= F(G(x,y)) = F(3x+y, x+3y) \\ &= (2(3x+y), (3x+y) + 2(x+3y)) \\ &= (6x+2y, 5x+7y)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}(G\circ F)(x,y) &= G(F(x,y)) = G(2x, x+2y) \\ &= (3(2x) + (x+2y), 2x + 3(x+2y)) \\ &= (7x+2y, 5x+6y)\end{aligned}$$

para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Vamos encontrar as matrizes de F, G, $G\circ F$ e $F\circ G$ em relação à base canônica $B = \{(1,0),(0,1)\}$ do $\mathbb{R}^2$.

De fato: Temos que,

$$F(1,0) = (2,1) = 2(1,0) + 1(0,1),$$

$$F(0,1) = (0,2) = 0(1,0) + 2(0,1),$$

$$G(1,0) = (3,1) = 3(1,0) + 1(0,1),$$

$$G(0,1) = (1,3) = 1(1,0) + 3(0,1),$$

$$(F \circ G)(1,0) = (6,5) = 6(1,0) + 5(0,1),$$

$$(F \circ G)(0,1) = (2,7) = 2(1,0) + 7(0,1),$$

$$(G \circ F)(1,0) = (7,5) = 7(1,0) + 5(0,1),$$

$$(G \circ F)(0,1) = (2,6) = 2(1,0) + 6(0,1)$$

e, portanto,

$$[F]_B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \ [G]_B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \ [F \circ G]_B = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \ \text{ e } \ [G \circ F]_B = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix},$$

completando o exemplo. □

Um cálculo rápido com as matrizes obtidas no exemplo anterior mostra que,

$$[F \circ G]_B = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = [F]_B[G]_B$$

e

$$[G \circ F]_B = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = [G]_B[F]_B.$$

Este resultado vale de forma geral e enunciamo-lo agora.

Proposição 4.43. *Sejam U, V e W espaços vetoriais sobre o mesmo corpo de escalares $\mathbb{K}$, $F : U \to V$ e $G : V \to W$ transformações lineares. Se B, C e D são bases de U, V e W respectivamente, então*

$$[G \circ F]_D^B = [G]_D^C [F]_C^B.$$

Como aplicação desta proposição, vamos encontrar a matriz da inversa de uma transformação linear. Sejam U e V espaços vetoriais sobre o mesmo corpo de escalares $\mathbb{K}$ e definamos $I_U = U \to U$ e $I_V : V \to V$ por

$$I_U(u) = u \ \text{ e } \ I_V(v) = v,$$

para $u \in U$ e $v \in V$. Se B e C são bases de U e V respectivamente, então

$$[I_U]_B = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$[I_V]_C = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Suponhamos agora que $T : U \to V$ seja uma transformação linear inversível, com inversa $T^{-1} : V \to U$. O Teorema do Núcleo e da Imagem implica que $\dim U = \dim V = n$. Ainda, para todo $v \in V$, temos que,

$$(T \circ T^{-1})(v) = T(T^{-1}(v)) = v = I_V(v)$$

e, para todo $u \in U$, temos que,

$$(T^{-1} \circ T)(u) = T^{-1}(T(u)) = u = I_U(u).$$

Logo, a Proposição 4.43 implica que,

$$I_n = [I_U]_B = [T \circ T^{-1}]_B = [T]_C^B [T^{-1}]_B^C$$

e

$$I_n = [I_V]_C = [T^{-1} \circ T]_C = [T^{-1}]_B^C [T]_C^B,$$

onde I_n denota a matriz identidade de ordem n. Assim, concluímos que a matriz de T relativa às bases B e C é inversível e

$$[T^{-1}]_B^C = ([T]_C^B)^{-1}.$$

Para finalizar esta seção vamos fazer mais alguns exemplos.

Exemplo 4.44. *Consideremos uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida, para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, por*

$$T(x, y, z) = (2x + 3y, 2y + 3z).$$

Sejam $B = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ *e* $B' = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ *duas bases de* $\mathbb{R}^3$ *e* $C = \{(1,0),(0,1)\}$ *e* $C' = \{(1,1),(1,0)\}$ *duas bases de* $\mathbb{R}^2$*. Vamos calcular a matriz de* T *em relação às bases* B *e* C *e depois em relação às bases* B' *e* C' *e encontrar a expressão de* T *nas bases* B' *e* C'*.*

De fato: Temos que

$$T(1,0,0) = (2,0) = 2(1,0) + 0(0,1)$$
$$T(0,1,0) = (3,3) = 3(1,0) + 2(0,1)$$
$$T(0,0,1) = (0,3) = 0(1,0) + 3(0,1).$$

Logo, a matriz da transformação linear T com relação às bases B e C é dada então por,

$$[T]_C^B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Notemos que se $u(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, então

$$[u]_B = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$[T(u)]_C = [T]_C^B [u]_B,$$

ou seja,

$$[T(u)]_C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+3y \\ 2y+3z \end{bmatrix}.$$

Daí concluímos que

$$\begin{aligned} T(u) = T(x,y,z) &= (2x+3y)(1,0) + (2y+3z)(0,1) \\ &= (2x+3y, 2y+2z), \end{aligned}$$

que se observarmos bem é a expressão inicial da transformação linear T.

Agora, se $B' = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ é uma outra base de $\mathbb{R}^3$ e $C' = \{(1,1),(1,0)\}$ é é uma outra base de $\mathbb{R}^2$, temos que

$$\begin{aligned} T(1,1,1) &= (5,5) = 5(1,1) + 0(1,0) \\ T(1,1,0) &= (5,2) = 5(1,1) + 2(1,0) \\ T(1,0,0) &= (2,0) = 2(1,1) + 0(1,0). \end{aligned}$$

Neste caso, a matriz da transformação linear F com relação às bases B' e C' é dada por,

$$[F]_{C'}^{B'} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Agora, se $u(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, então

$$(x,y,z) = a(1,1,1) + b(1,1,0) + c(1,0,0)$$

se, e somente se,

$$\begin{cases} a+b+c = x \\ a+b = y \\ a = z. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema obtemos que as coordenadas de $u + (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ na base B' são dadas por

$$[u]_{B'} = \begin{bmatrix} z \\ y-z \\ x-y \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$[T(u)]_{C'} = [T]_{C'}^{B'}[u]_{B'},$$

ou seja,

$$[T(u)]_{C'} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ y-z \\ x-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y+3z \\ 2x+y-3z \end{bmatrix}.$$

Daí concluímos que

$$\begin{aligned} T(u) = T(x,y,z) &= (2y+3z)(1,1) + (2x+y-3z)(1,0) \\ &= (2y+3z+2x+y-3z, 2y+3z) \\ &= (2x+3y, 2y+3z), \end{aligned}$$

que se observarmos bem, também é a expressão inicial da transformação linear T. $\square$

Exemplo 4.45. *Consideremos uma transformação linear* $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *definida, para todo* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, *por*

$$L(x,y) = (x-y, 2y).$$

Vamos calcular a matriz de L *em relação às bases canônicas de* $\mathbb{R}^2$.

De fato: Temos que

$$\begin{aligned} L(1,0) &= (1,0) = 1(1,0) + 0(0,1) \\ L(0,1) &= (-1,2) = -1(1,0) + 2(0,1). \end{aligned}$$

Logo, a matriz da transformação linear L com relação às bases $B = \{(1,0),(0,1)$ é dada então por,

$$[L]_B^B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Notemos que se $u(x,y) \in \mathbb{R}^3$, então

$$[u]_B = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$[L(u)]_B = [L]_B^B [u]_B,$$

ou seja,

$$[L(u)]_B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-y \\ 2y \end{bmatrix}.$$

Daí concluímos que

$$\begin{aligned} L(u) = L(x,y) &= (x-y)(1,0) + (2y)(0,1) \\ &= (x-y, 2y), \end{aligned}$$

que é a expressão inicial da transformação linear T, completando o exemplo. $\square$

Exemplo 4.46. *Consideremos a matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Vamos encontrar uma transformação linear $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *tal que a matriz dessa transformação linear* L, *associada às bases canônicas de* $\mathbb{R}^2$, *seja a matriz* A.

De fato: Temos que

$$L(1,0) = 2(1,0) + 1(0,1) = (1,0) = (2,1)$$
$$L(0,1) = 3(1,0) + (-1)(0,1) = (1,0) = (3,-1).$$

Logo,

$$\begin{aligned} L(x,y) &= L(x(1,0) + y(0,1)) \\ &= xL(1,0) + yL(0,1) \\ &= x(2,1) + y(3,-1) \\ &= (2x+3y, x-y). \end{aligned}$$

Assim,

$$[L(u)]_B = \begin{bmatrix} 2x+3y \\ x-y \end{bmatrix},$$

pois

$$\begin{aligned} L(x,y) &= (2x+3y, x-y) \\ &= (2x+3y)(1,0) + (x-y)(0,1). \end{aligned}$$

De outra forma, temos que se $u = (x,y) \in \mathbb{R}^2$, então

$$[u]_B = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$[L(u)]_B = [L]_B^B [u]_B,$$

ou seja,

$$[L(u)]_B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+3y \\ x-y \end{bmatrix}.$$

Daí concluímos que

$$\begin{aligned} L(u) = L(x,y) &= (2x+3y)(1,0) + (x-y)(0,1) \\ &= (2x+3y, x-y), \end{aligned}$$

completando o exemplo. $\square$

4.5 Exercícios Propostos

1. Sejam $V = M_2(\mathbb{R})$ o espaço vetorial da matrizes 2×2, munido das operações usuais, e B uma matriz fixada neste espaço. Mostre que a aplicação $F : V \to V$ definida por $F(X) = BX$, para $X \in M_2(\mathbb{R})$ é um operador linear.

2. Sejam $V = M_2(\mathbb{R})$ o espaço vetorial da matrizes 2×2, munido das operações usuais, e P uma matriz inversível em $M_2(\mathbb{R})$. Mostre que a aplicação $F : V \to V$ definida por $F(X) = P^{-1}XP$, para $X \in M_2(\mathbb{R})$ é um operador linear.

3. Verifique se as seguintes aplicações de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$ são operadores lineares.

   (a) $F_1(x,y,z) = (x-y, x+y, 0)$;

   (b) $F_2(x,y,z) = (2x-y+z, 0, 0)$;

   (c) $F_3(x,y,z) = (x,x,x)$;

   (d) $F_4(x,y,z) = (2x^2+3y, x, z)$.

4. Existe um operador linear $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $F(1,1,1) = (1,2,3)$, $F(1,2,3) = (1,4,9)$ e $F(2,3,4) = (1,8,27)$? Justifique sua resposta.

5. Verifique se as seguintes aplicações de $\mathbb{R}^4$ em $\mathbb{R}^4$ são operadores lineares.

   (a) $F_1(x,y,z,t) = (x,y,z,t) + (1,0,1,0)$;

(b) $F_2(x, y, z, t) = (1, 0, 1, 1)$;

(c) $F_3(x, y, z, t) = (x, y - z, y + z, x + t)$;

(d) $F_4(x, y, z, t) = (\cos x, y, z, t)$.

6. Verifique se as seguintes funções são transformações lineares.

   (a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y) = (x + y, x - y)$;

   (b) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $g(x, y) = xy$;

   (c) $h : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definida por $h(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}) = \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

7. Sejam U e V subespaços vetoriais de um espaço vetorial W tais que $W = U \oplus V$. Sejam $P_1, P_2 : W \to W$ duas aplicações definidas por $P_1(w) = u$ e $P_2(w) = v$, onde $w = u + v$, com $u \in U$ e $v \in V$. Mostre que P_1 e P_2 são operadores lineares.

8. Seja $T : U \to V$ uma transformação linear satisfazendo a seguinte propriedade: se $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ é uma base de U, então $\{T(u_1), T(u_2), \ldots, T(u_n)\}$ é LI em V. Mostre que T é injetora.

9. Para cada uma das transformações lineares, determinar uma base e a dimensão do núcleo e da imagem.

   (a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definida por $T(x, y, z) = (x, 2y, 0)$;

   (b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definida por $T(x, y, z) = x + y - z$;

   (c) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida por $T(x, y) = (2x, x + y)$;

   (d) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, definida por $T(x, y, z) = (x - y - z, x + y + z, 2x - y + z, -y)$.

10. Consideremos uma transformação linear $F : U \to V$. Se $dim(U) > dim(V)$, mostre que existe um elemento não nulo $u_0 \in U$ tal que $F(u_0) = \mathbb{O}_V$, onde $\mathbb{O}_V$ denota o elemento neutro de V. Conclua que F não é injetora.

11. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y, z) = (z, x - y, -z)$.

    (a) Determine uma base do núcleo de T;

(b) Calcule a dimesão da imagem de T;

(c) T é sobrejetora? Justifique a sua resposta.

12. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear definido na base canônica de $\mathbb{R}^3$ por $T(1,0,0) = (2,3,1)$, $T(0,1,0) = (5,2,7)$ e $T(0,0,1) = (-2,0,7)$. Determinar a expressão do operador T e mostrar que de fato ele é linear.

13. Achar uma transformação linear do $\mathbb{R}^3$ no $\mathbb{R}^2$ cujo núcleo seja gerado por $(1,1,0)$.

14. Determinar um operador linear do $\mathbb{R}^4$ cujo núcleo seja gerado por $(1,1,0,0)$ e $(0,0,1,0)$.

15. Determinar um operador linear do $\mathbb{R}^3$ cujo núcleo tenha dimensão 1.

16. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear definido por $T(1,0,0) = (1,1,0)$, $T(0,1,0) = (1,1,2)$ e $T(0,0,1) = (0,0,2)$. Determine uma base para cada um dos seguintes subespaços vetoriais: $Ker(T)$, $Im(T)$, $Ker(T) \cap Im(T)$ e $Ker(T) + Im(T)$.

17. Seja $T : U \to V$ uma transformação linear bijetora. Mostre que a aplicação inversa $T^{-1} : V \to U$ é uma transformação linear.

18. Mostre que cada um dos operadores lineares de $\mathbb{R}^3$ a seguir é um isomorfismo e calcule o isomorfismo inverso.

    (a) $F(x,y,z) = (x - 3y - 2z, y - 4z, z)$;

    (b) $F(x,y,z) = (x, x - y, 2x + y - z)$.

19. Considere o operador linear de $\mathbb{R}^3$ definido por $F(1,0,0) = (1,1,1)$, $F(0,1,0) = (1,0,1)$ e $F(0,1,2) = (0,0,4)$. F é um isomorfismo? Se for, determine o isomorfismo inverso.

20. Prove que $\mathbb{R}^2$ é isomorfo a qualquer subespaço de dimensão 2 contido em $\mathbb{R}^3$.

21. Determine uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(1,0,0) = (2,0)$, $T(0,1,0) = (1,1)$ e $T(0,0,1) = (0,-1)$. Encontre $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $T(v) = (3,2)$.

22. Determine uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(1,1) = (3,2,1)$, $T(0,-2) = (0,1,0)$.

23. Seja $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ uma aplicação linear definida por $F(x, y, z) = (x + z, y - 2z)$. Determinar $[F]_C^B$, onde $B = \{(1, 2, 1), (0, 1, 1), (0, 3, -1)\}$ e $C = \{(1, 5), (2, -1)\}$.

24. Determinar as matrizes das seguintes transformações lineares em relação às bases canônicas dos respectivos espaços:

    (a) $T \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ definida por $T(x, y, z) = (x + y, z)$;

    (b) $T \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ definida por $T(x, y) = (x + y, x, x - y)$;

    (c) $T \in L(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})$ definida por $T(x, y, z, t) = 2x + y - z + 3t$;

    (d) $T \in L(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ definida por $T(x) = (x, 2x, 3x)$.

25. Seja T o operador linear do $\mathbb{R}^2$ cuja matriz em relação à base $B = \{(1, 0), (1, 4)\}$ é $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$. Determinar a matriz de T em relação à base canônica do $\mathbb{R}^2$.

26. Seja $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ uma base de um espaço vetorial real V. Sendo $F, G : V \to V$ dois operadores lineares tais que $F(e_1) = e_1 - e_2$, $F(e_2) = e_1 + e_3$, $F(e_3) = e_2$, $G(e_1) = 2e_1 + e_3$, $G(e_2) = e_1$ e $G(e_3) = e_2 - 3e_1$. Determinar, em relação à base B, as matrizes dos seguintes operadores lineares: F, G, $F \circ G$ e $G \circ F$.

27. Determinar o operador linear do $\mathbb{R}^2$ cuja matriz em relação à base $B = \{(1, 2), (0, 5)\}$ é $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

28. Determinar todos os operadores lineares $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tais que $T \circ T = T$ e $T(x, y) = (ax, bx + cy)$.

29. Determinar todos os operadores lineares $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tais que $T \circ T = \mathbb{O}$ e $T(x, y) = (ax + by, cy)$, onde $\mathbb{O}$ denota o operador linear nulo em $\mathbb{R}^2$.

30. Sejam F e G dois operadores lineares do $\mathbb{R}^3$ tais que $F(x, y, z) = (x, 2y, y - z)$ e que a matriz de $2F - G$, em relação à base canônica do $\mathbb{R}^3$ é $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Determinar a matriz de G em relação à base canônica. Determinar também a expressão de $G(x, y, z)$.

31. Sejam $B = \{(1,-1),(0,2)\}$ e $C = \{(1,0,-1),(0,1,2),(1,2,0)\}$ bases de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ respectivamente e $[T]_C^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Determine a expressão de T. Encontre uma base D de $\mathbb{R}^3$ tal que $[T]_D^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Se $S(x,y) = (2y, x-y, x)$, encontre $[S]_C^B$.

32. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear tal que $[T] = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Encontre $u, v \in \mathbb{R}^2$ tais que $T(u) = v$ e $T(-v) = v$.

33. Sejam $B = \{(0,2),(2,-1)\}$ e $C = \{(1,1,0),(0,0,-1),(1,0,1)\}$ bases de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$. Se $[S]_C^B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$, encontre a expressão de $S(x,y)$.

34. Sejam $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Encontre $Ker(T_A)$, $Im(T_A)$, $Ker(T_B)$ e $Im(T_B)$.

35. Sejam R, S e T operadores lineares em $\mathbb{R}^3$. Se $[R]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ e $[S]_B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ são as matrizes de R e S em relação à base canônica de $\mathbb{R}^3$, encontre T tal que $R = S \circ T$.

Capítulo 5

Operadores Diagonalizáveis

No final do capítulo anterior vimos que trabalhar com transformações lineares é, de certa forma, operar com matrizes. A idéia principal deste capítulo é encontrar, se possível, bases para os espaços vetoriais, nas quais as matrizes das transformações lineares sejam diagonais, isto é, só possuam elementos diferentes de 0 na diagonal principal, facilitando dessa forma o cálculo das operações com as matrizes que representam estas transformações lineares.

5.1 Autovalores e Autovetores

Nesta seção vamos introduzir o conceito de autovalores e autovetores para um determinado operador linear e obter algumas de suas principais propriedades. Seja então V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$ e considere $T : V \to V$ uma transformação linear, que chamaremos de operador linear. Quando conseguirmos encontrar uma base para V formada apenas por autovetores de T, veremos que nesta base a matriz do operador linear é diagonal e essa diagonal contém os autovalores de T.

Definição 5.1. *Seja V um espaço vetorial sobre o corpo de escalares $\mathbb{R}$ e $T : V \to V$ um operador linear. Se existirem $\lambda \in \mathbb{R}$ e $v \in V$, com $v \neq 0$, tais que*

$$Tv = \lambda v,$$

diremos que $\lambda \in \mathbb{R}$ é um autovalor de T e que $v \neq 0$ é um autovetor de T associado ao autovalor λ.

Vejamos agora algumas observações importantes.

- O autovalor $\lambda \in \mathbb{R}$, pode ser igual a zero, enquanto que o autovetor $v \in V$ deve ser necessariamente diferente do vetor nulo do respectivo espaço vetorial V.

- Para cada autovetor não nulo $v \in V$, está associado um único autovalor $\lambda \in \mathbb{R}$.

  De fato: Para mostramos esse fato, seja $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ um outro autovalor associado ao autovetor $0_V \neq v \in V$. Temos que,

$$Tv = \lambda v \ \text{ e } \ Tv = \lambda_1 v.$$

  Logo,

$$0_V = \lambda v - \lambda_1 v = (\lambda - \lambda_1)v.$$

  Mas, como $v \neq 0_V$, obtemos então que $(\lambda - \lambda_1) = 0$, ou seja, $\lambda = \lambda_1$. □

- Seja $\lambda \in \mathbb{R}$ um autovalor de T e considere o seguinte subconjunto do espaço vetorial V :

$$V(\lambda) = \{v \in V;\ Tv = \lambda v\}.$$

  Então $V(\lambda)$ é um subespaço vetorial de V.

  De fato: Para mostramos que $V(\lambda)$ é um subespaço vetorial de V, observemos primeiramente que,

$$T(0_V) = 0_V = \lambda 0_V,$$

  mostrando que $0_V \in V$ e, portanto, que $V(\lambda) \neq \emptyset$. Considere agora $v_1, v_2 \in V(\lambda)$, isto é, $T(v_1) = \lambda v_1$ e $T(v_2) = \lambda v_2$. Logo,

$$T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2) = \lambda v_1 + \lambda v_2 = \lambda(v_1 + v_2),$$

  mostrando que $v_1 + v_2 \in V(\lambda)$. Finalmente, sejam $v \in V(\lambda)$, isto é, $T(v) = \lambda v$, e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então,

$$T(\alpha v) = \alpha T(v) = \alpha(\lambda v) = \lambda(\alpha v),$$

  e isto implica que $\alpha v \in V$. Com tudo isso, concluímos que $V(\lambda)$ é um subespaço vetorial de V. □

Ressaltamos aqui que apesar de

$$0_V \in V(\lambda) = \{v \in V;\ Tv = \lambda v\},$$

para qualquer autovalor $\lambda \in \mathbb{R}$ de um operador linear $T : V \to V$, 0_V não é autovetor do operador linear T.

Definição 5.2. *Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, $T : V \to V$ um operador linear e $\lambda \in \mathbb{R}$ um autovalor de T. O subespaço vetorial $V(\lambda)$ do espaço vetorial V é denominado subespaço próprio, ou autoespaço, associado ao autovalor $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Exemplo 5.3. *Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear definido, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, por*

$$T(x, y) = (y, x).$$

Vamos encontrar todos os autovalores do operador linear T e posteriormente calcular o autoespaço associado a cada autovalor.

De fato: Sejam $\lambda \in \mathbb{R}$ e $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ um vetor não nulo. Assim,

$$\begin{aligned} Tv = \lambda v &\Longleftrightarrow T(x, y) = \lambda(x, y) \\ &\Longleftrightarrow (y, x) = \lambda(x, y) \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} y = \lambda x \\ x = \lambda y \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow y = \lambda^2 y. \end{aligned}$$

Se $y = 0$, então $x = 0$ e, portanto, $v = (0, 0)$ e, como os autovetores devem ser não nulos, devemos ter $y \neq 0$. Assim, a última igualdade implica que $\lambda^2 = 1$, ou seja, $\lambda = \pm 1$. Portanto, os únicos autovalores de T são $\lambda = 1$ e $\lambda = -1$.

Vamos agora encontrar os autovetores e os respectivos autoespaços associados aos autovalores $\lambda = 1$ e $\lambda = -1$.

- Para $\lambda = 1$, temos que $y = x$ e $x = y$. Assim, os autovetores associados a $\lambda = 1$ devem ser da forma $v = (x, x)$, com $x \neq 0$. Também,

$$V(1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = x \text{ e } x \neq 0\} = [(1, 1)].$$

Vemos assim que os autovetores associados ao autovalor $\lambda = 1$ são da forma $v = x(1, 1)$, com $x \neq 0$.

- Para $\lambda = -1$, temos que $y = -x$ e, portanto, os autovetores associados a $\lambda = -1$ devem ser da forma $v = (x, -x)$, com $x \neq 0$. Também,

$$V(-1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = -x \text{ e } x \neq 0\} = [(1, -1)].$$

Vemos assim que os autovetores associados ao autovalor $\lambda = -1$ são da forma $v = x(1, -1)$, com $x \neq 0$.

Completamos assim o exemplo. $\square$

Exemplo 5.4. *Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear definido, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, por*

$$T(x, y) = (-y, x).$$

Vamos encontrar todos os autovalores da transformação linear T e posteriormente calcular o autoespaço associado a cada autovalor.

De fato: Sejam $\lambda \in \mathbb{R}$ e $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ um vetor não nulo. Assim,

$$\begin{aligned} Tv = \lambda v &\Longleftrightarrow T(x, y) = \lambda(x, y) \\ &\Longleftrightarrow (-y, x) = \lambda(x, y) \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} -y = \lambda x \\ x = \lambda y \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow -y = \lambda y^2 \\ &\Longleftrightarrow y(\lambda^2 + 1) = 0. \end{aligned}$$

Se $y = 0$, então $x = 0$ e, portanto, $v = (0, 0)$ e, como os autovetores devem ser não nulos, devemos ter $y \neq 0$. Assim, a última igualdade implica que $\lambda^2 = -1$, ou seja, T não possui autovalores no corpo de escalares $\mathbb{R}$. Neste caso vemos então que T não possui autovalores e autovetores, completando o exemplo. $\square$

Exemplo 5.5. *Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear definido, para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, por*

$$T(x, y, z) = (3x, 3y, 3z).$$

Vamos encontrar todos os autovalores do operador linear T e posteriormente calcular o autoespaço associado a cada autovalor.

De fato: Sejam $\lambda \in \mathbb{R}$ e $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ um vetor não nulo. Assim,

$$\begin{aligned} Tv = \lambda v &\Longleftrightarrow T(x, y, z) = \lambda(x, y, z) \\ &\Longleftrightarrow (3x, 3y, 3z) = \lambda(x, y, z) \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} 3x = \lambda x \\ 3y = \lambda y \\ 3z = \lambda z \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} (3 - \lambda)x = 0 \\ (3 - \lambda)y = 0 \\ (3 - \lambda)z = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Se $x = y = z = 0$, então $v = (0, 0, 0)$ e, como os autovetores devem ser não nulos, devemos ter $x \neq 0$, ou $y \neq 0$, ou $z \neq 0$. Em qualquer um dos três casos, devemos ter que $\lambda = 3$. Portanto, o único autovalor de T é $\lambda = 3$. Vamos agora encontrar os autovetores e o respectivo autoespaço associado ao autovalor $\lambda = 3$. Quando $\lambda = 3$ vemos que para $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ser um autovetor devemos ter $x \neq 0$, ou $y \neq 0$, ou $z \neq 0$. Temos então alguns casos a considerar:

- se $y = z = 0$, então necessariamente devemos ter $x \neq 0$ e o autovetor associado a $\lambda = 3$ fica da forma

  $$v = (x, 0, 0) = x(1, 0, 0),$$

  para todo número real $x \neq 0$;

- se $x = z = 0$, então necessariamente devemos ter $y \neq 0$ e o autovetor associado a $\lambda = 3$ fica da forma
$$v = (0, y, 0) = y(0, 1, 0),$$
para todo número real $y \neq 0$;

- se $x = y = 0$, então necessariamente devemos ter $z \neq 0$ e o autovetor associado a $\lambda = 3$ fica da forma
$$v = (0, 0, z) = z(0, 0, 1),$$
para todo número real $z \neq 0$;

- se $x = 0$, então o autovetor associado a $\lambda = 3$ fica da forma
$$v = (0, y, z) = (0, y, 0) + (0, 0, z) = y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1),$$
para quaisquer números reais $y, z \in \mathbb{R}$ tais que $y \neq 0$ ou $z \neq 0$;

- se $y = 0$, então o autovetor associado a $\lambda = 3$ fica da forma
$$v = (x, 0, z) = (x, 0, 0) + (0, 0, z) = x(1, 0, 0) + z(0, 0, 1),$$
para quaisquer números reais $x, z \in \mathbb{R}$ tais que $x \neq 0$ ou $z \neq 0$;

- se $z = 0$, então o autovetor associado a $\lambda = 3$ fica da forma
$$v = (x, y, 0) = (x, 0, 0) + (0, y, 0) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0),$$
para quaisquer números reais $x, y \in \mathbb{R}$ tais que $x \neq 0$ ou $y \neq 0$;

- se $x \neq 0$, $y \neq 0$ e $z \neq 0$, então o autovetor associado a $\lambda = 3$ fica da forma
$$v = (x, y, z)0) = (x, 0, 0) + (0, y, 0) + (0, 0, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1),$$
para quaisquer números reais $x, y, z \in \mathbb{R}$ tais que $x \neq 0$, $y \neq 0$ e $z \neq 0$.

Dessa forma, vemos que o autoespaço associado ao autovalor $\lambda = 3$ é dado por

$$V(3) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x \neq 0, \quad \text{ou} \quad y \neq 0, \quad \text{ou} \quad z \neq 0\} = [(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)].$$

Como $V(3)$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$, com

$$\dim(V(3)) = 3,$$

então

$$V(3) = \mathbb{R}^3,$$

completando o exemplo. □

Exemplo 5.6. *Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear definido, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, por*

$$T(x, y) = (2x, x + 2y).$$

Vamos encontrar todos os autovalores do operador linear T e posteriormente calcular o autoespaço associado a cada autovalor.

De fato: Sejam $\lambda \in \mathbb{R}$ e $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ um vetor não nulo. Assim,

$$\begin{aligned} Tv = \lambda v &\Longleftrightarrow T(x, y) = \lambda(x, y) \\ &\Longleftrightarrow (2x, x + 2y) = \lambda(x, y) \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} 2x = \lambda x \\ x + 2y = \lambda y \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} (2 - \lambda)x = 0 \\ x + (2 - \lambda)y = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Se $x = 0$, então necessariamente $y \neq 0$ e, portanto, $\lambda = 2$ é um autovalor de T associado a autovetores da forma $v = y(0, 1)$, onde $y \neq 0$ é um número real qualquer. Nesse caso temos que o autoespaço associado ao autovalor $\lambda = 2$ é dado então por

$$V(2) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x = 0\} = [(0, 1)].$$

Quando $x \neq 0$, temos necessariamente que $\lambda = 2$ e, portanto, substituindo o valor de λ na segunda equação do último sistema acima obtemos que $x = 0$, o que é um absurdo, pois ja havíamos suposto que $x \neq 0$. Portanto, temos que o único autovalor é $\lambda = 2$ e o autoespaço associado ao autovalor $\lambda = 2$ é dado então por

$$V(2) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x = 0\} = [(0, 1)],$$

completando o exemplo. $\square$

Nos dois últimos exemplos acima vemos que para obtermos os autovalores e calcular seus respectivos autovetores precisamos, dependendo da expressão do operador linear, estudar muitos casos. A idéia agora é encontrar um método prático para encontrar os autovalores e seus respectivos autovetores. Do capítulo anterior sabemos que para cada operador linear está associada uma única matriz e, reciprocamente, para cada matriz podemos associar um único operador linear. Vamos agora introduzir o conceito de autovalores e autovetores para matrizes com entradas reais. Sejam V um espaço vetorial, de dimensão finita $n \in \mathbb{N}$, sobre o corpo de escalares $K = \mathbb{R}$ e $A \in M_n(\mathbb{R})$ uma matriz quadrada dada. Fixemos B uma base de V e consideremos o operador linear $T_A : V \to V$ definido, para todo $u \in V$, por

$$T_A(u) = A[u]_B.$$

Já vimos no capítulo anterior que $[T_A]_B = A$. Sejam $\lambda \in \mathbb{R}$ um autovalor de T_A e $v \neq 0_V$ um respectivo autovetor, isto é,

$$T_A(v) = \lambda v.$$

Assim,

$$A[v]_B = [T_A(v)]_B = [\lambda v]_B = \lambda [v]_B.$$

Definição 5.7. *Sejam $A \in M_n(\mathbb{K})$ uma matriz quadrada dada, $V = \mathbb{K}^n$ um espaço vetorial de dimensão finita $n \in \mathbb{N}$, sobre $\mathbb{K}$. Se existirem $\lambda \in \mathbb{K}$ e $v \in V = \mathbb{K}^n$, com $v \neq 0_V$, tais que,*

$$A[v]_B = \lambda [v]_B,$$

onde B é uma base fixada de $V = \mathbb{K}^n$, diremos que $\lambda \in \mathbb{K}$ é um autovalor de A e que $v \neq 0_V$ é um autovetor de A associado ao autovalor λ.

Seja $\lambda \in \mathbb{K}$ um autovalor de uma matriz quadrada $A \in M_n(\mathbb{K})$ e considere o seguinte subconjunto do espaço vetorial $V = \mathbb{K}^n$, de dimensão finita $n \in \mathbb{N}$, sobre o corpo de escalares $\mathbb{K}$:

$$V(\lambda) = \{v \in V;\ A[v]_B = \lambda [v]_B\},$$

onde B é uma base fixada do espaço vetorial $V = \mathbb{K}^n$. Então, usando propriedades de matrizes e a unicidade das coordenadas de elementos do espaço vetorial, com relação à base fixada, podemos mostrar que $V(\lambda)$ é um subespaço vetorial de $V = \mathbb{K}^n$, o qual também será denominado subespaço próprio de $V = \mathbb{K}^n$ associado a λ, ou autoespaço associado a λ.

Vejamos agora um exemplo de como calcular os autovalores, e seus respctivos autovetores, de uma matriz quadrada dada. Faremos apenas exemplos onde o corpo de escalares $K = \mathbb{R}$, pois o objetivo é entender os conceitos apresentados e não nos preocuparmos com o corpo de escalares que está sendo utilizado.

Exemplo 5.8. *Considerando $V = \mathbb{R}^2$, vamos encontrar os autovalores, e seus respectivos autovetores, da matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}.$$

De fato: Escolhendo B a base canônica de $V = \mathbb{R}^2$ temos, para todo $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, que

$$[v]_B = [(x, y)]_B = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Logo, para $\lambda \in \mathbb{R}$, temos que

$$\begin{aligned} A[v]_B = \lambda[v]_B &\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} x + 2y \\ 5x + 4y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{bmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} x + 2y = \lambda x \\ 5x + 4y = \lambda y \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} (1 - \lambda)x + 2y = 0 \\ 5x + (4 - \lambda)y = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Assim, $v = (x, y) \neq (0, 0)$ é um autovetor associado a $\lambda \in \mathbb{R}$ se, e somente se, o último sistema acima possui uma solução não nula, mas isso acontece se, e somente se, o determinante dos coeficientes do sistema é nulo, isto é,

$$\det \begin{bmatrix} (1-\lambda) & 2 \\ 5 & (4-\lambda) \end{bmatrix} = 0,$$

ou seja, se existir $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lambda^2 - 5\lambda - 6 = 0.$$

Mas isso acontece se, e somente se, $\lambda = 6$ ou $\lambda = -1$. Portanto, $\lambda = 6$ e $\lambda = -1$ são os únicos autovalores da matriz A. Vamos agora encontrar os autovetores associados a cada um desses autovalores. Para $\lambda = 6$ temos que, $(x, y) \neq (0, 0)$ é um autovetor se, e somente se,

$$\begin{aligned} A[v]_B = 6[v]_B &\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} x + 2y \\ 5x + 4y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x \\ 6y \end{bmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 6x \\ 5x + 4y = 6y \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} -5x + 2y = 0 \\ 5x - 2y = 0 \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow y = \frac{5}{2}x. \end{aligned}$$

Logo, $(x, \frac{5}{2}x) \in \mathbb{R}^2$, para todo $x \neq 0$, é um autovetor associado ao autovalor $\lambda = 6$ e o autoespaço associado a $\lambda = 6$ é dado então por

$$V(6) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = \frac{5}{2}x\} = [(2, 5)].$$

Para $\lambda = -1$ temos que, $(x, y) \neq (0, 0)$ é autovetor se, e somente se,

$$
\begin{aligned}
A[v]_B = -1[v]_B &\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\
&\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} x+2y \\ 5x+4y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix} \\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} x+2y = -x \\ 5x+4y = -y \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} 2x+2y = 0 \\ 5x+5y = 0 \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow y = -x.
\end{aligned}
$$

Logo, $(x,-x) \in \mathbb{R}^2$, para todo $x \neq 0$, é autovetor associado ao autovalor $\lambda = -1$ e o autoespaço associado a $\lambda = -1$ é dado então por

$$V(-1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y = -x\} = [(1,-1)],$$

completando o exemplo. □

Nos exemplos estudados nesta seção vemos que para obtermos os autovalores e calcular seus respectivos autovetores precisamos, dependendo da expressão do operador linear, estudar muitos casos. A idéia agora é encontrar um método prático para encontrar os autovalores e seus respectivos autovetores. O último exemplo, de certa forma, nos dá um método prático para procurarmos os autovalores, e os respectivos autovetores, de operadores lineares. Observe que dado um operador linear em um espaço vetorial de dimensão finita, fixado uma base para este espaço vetorial, encontramos a matriz do operador linear e para esta matriz encontramos os autovalores, e seus respectivos autovetores. Esses autovalores e autovetores serão os autovalores e os autovetores do operador linear. Trataremos deste método na próxima seção.

5.2 Polinômios Característicos

Encontramos os autovalores, e respectivos autovetores, de um determinado operador linear, definido em um espaço vetorial de dimensão finita, pode ser muito difícil se a regra que define este operador linear for complicada e, também, se a dimensão do respectivo espaço vetorial for grande. Vamos agora introduzir um método que simplifica este processo. Para melhor entendermos esse método, vamos começar com um exemplo.

Exemplo 5.9. *Seja* $V = \mathbb{R}^3$ *e consideremos a matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Vamos encontrar os autovalores e os autovetores de A.

De fato: Queremos encontrar $\lambda \in \mathbb{R}$ e $v \in \mathbb{R}^3$ um vetor não nulo tal que

$$A[v]_B = \lambda[v]_B,$$

onde B é a base canônica de $V = \mathbb{R}^3$. Mas,

$$A[v]_B = \lambda[v]_B \Longleftrightarrow A[v]_B = \lambda I_n[v]_B \Longleftrightarrow (A - \lambda I_n)[v]_B = 0_{\mathbb{R}^3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

onde I_3 denota a matriz indentidade de ordem $n = 3$. Assim, $\lambda \in \mathbb{R}$ é um autovalor associado ao auovetor $v \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ se, e somente se,

$$\left(\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

ou seja, se, e somente se,

$$\begin{bmatrix} 4-\lambda & 2 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{5.1}$$

Sabemos que o sistema matricial acima possui uma solução não nula se, e somente se,

$$\det \begin{bmatrix} 4-\lambda & 2 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = \det[A - \lambda I_3] = 0. \tag{5.2}$$

Calculando esse determinante obtemos a seguinte equação do terceiro grau na variável λ :

$$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 16\lambda - 12 = (\lambda - 2)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) = 0.$$

As únicas raízes da equação do terceiro grau acima são $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ e $\lambda_3 = 3$. Dessa forma concluímos que os únicos autovalores da matriz A são $\lambda = 2$ e $\lambda = 3$.

Vamos agora encontrar os autovetores associados a cada um desses autovalores. Para fazermos isso substituímos o valor do autovalor em (5.1) e resolvemos o sistema matricial.

Para $\lambda = 2$ temos

$$\begin{bmatrix} 4-2 & 2 & 0 \\ -1 & 1-2 & 0 \\ 0 & 1 & 2-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ -x - y = 0 \\ y = 0. \end{cases}$$

Logo, $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ é um autovetor associado ao autovalor $\lambda = 2$ se, e somente se, $x = y = 0$ e $z \in \mathbb{R}$ é um número real não nulo. O autoespaço associado a $\lambda = 2$ é dado então por

$$V(2) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = y = 0\} = [(0, 0, 1)].$$

Para $\lambda = 3$ temos

$$\begin{bmatrix} 4-3 & 2 & 0 \\ -1 & 1-3 & 0 \\ 0 & 1 & 2-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 0 \\ -x - 2y = 0 \\ y - z = 0. \end{cases}$$

Logo, $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ é um autovetor associado ao autovalor $\lambda = 3$ se, e somente se, $x = -2y$, e $z = y$ e $y \in \mathbb{R}$ é um número real não nulo. O autoespaço associado a $\lambda = 3$ é dado então por

$$V(3) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = -2y \ \text{ e } \ z = y\} = [(-2, 1, 1)],$$

completando o exemplo. □

O exemplo acima nos dá um método para encontrar autovalores, e seus respectivos autovetores, de matrizes. Vale observar que neste exemplo o autovalor $\lambda = 2$ é uma raiz de multiplicidade 2 da equação do terceiro grau que tivemos que resolver para encontrar os autovalores da matriz, enquanto que a dimensão do autoespaço associado ao autovalor $\lambda = 2$ é igual a 1, este fato será de suma importancia quando formos verificar quando uma matriz é ou não diagonalizável. O Exemplo 5.9 motiva a seguinte definição:

Definição 5.10. *Sejam $A \in M_n(\mathbb{K})$ uma matriz dada, e $\mathbb{K}$ um corpo de escalares. Definimos o polinômio característico da matriz A por*

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n). \tag{5.3}$$

Com os mesmos argumentos utilizados no Exemplo 5.9 obtemos que as raízes do polinômio característico da matriz A, quando existem, são exatamente os autovalores de A. Quando o polinômio característico não possuir raízes, a matriz A não possui autovalores e, portanto, também não possui autovetores. Observemos aqui que como a matriz tem entradas no corpo de escalares $\mathbb{K}$ sempre vamos procurar os autovetores, associados a cada um dos autovalores encontrados, no espaço vetorial $\mathbb{K}^n$ e, a menos que se explicite uma outra base, vamos sempre considerar a base canônica para este espaço vetorial. Portanto, para encontrarmos esses autovetores precisamos encontrar um elemento $v \in \mathbb{K}^n$, não nulo, tal que,

$$(A - \lambda I_n)[v]_B = \nvdash, \tag{5.4}$$

onde $\nvdash \in M_{n\times 1}(\mathbb{K})$ denota a matriz nula.

Exemplo 5.11. *Seja*

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

Vamos encontrar, se possível, os autovalores, e seus respectivos autovetores, da matriz A.

De fato: Para encontramos os autovalores de A vamos procurar as raízes do polinômio característico de A. Temos que,

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I_2) \\ & \det\left(\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \\ &= \det \begin{bmatrix} -3-\lambda & 4 \\ -1 & 2-\lambda \end{bmatrix} \\ &= \lambda^2 + \lambda - 2. \end{aligned}$$

Logo,

$$p_A(\lambda) = 0 \Longleftrightarrow \lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Longleftrightarrow \lambda = 1 \ \text{ ou } \ \lambda = -2.$$

Portanto, os únicos autovalores são $\lambda = 1$ e $\lambda = -2$.

Vamos agora encontrar os autovetores associados a cada um dos autovalores encontrados acima. Seja então $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ um elemento não nulo. Temos que

$$[v]_B = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

onde B é a base canônica do espaço vetorial real $\mathbb{R}^2$.

Para $\lambda = 1$, utilizando (5.4) obtemos que

$$\begin{bmatrix} -3-1 & 4 \\ -1 & 2-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow y = x.$$

Logo, $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ é um autovetor associado ao autovalor $\lambda = 1$ se, e somente se, $y = x$, com $0 \neq x \in \mathbb{R}$ sendo um número real não nulo qualquer, ou seja, $v = (x, x) \in \mathbb{R}^2$, com $x \neq 0$. O autoespaço associado ao autovalor $\lambda = 1$ é dado então por

$$V(1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y = x\} = [(1, 1)].$$

Para $\lambda = -2$, utilizando (5.4) obtemos que

$$\begin{bmatrix} -3+2 & 4 \\ -1 & 2+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow x = 4y.$$

Logo, $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ é um autovetor associado ao autovalor $\lambda = -2$ se, e somente se, $x = 4y$, com $0 \neq y \in \mathbb{R}$ sendo um número real não nulo qualquer, ou seja, $v = (4y, y) \in \mathbb{R}^2$, com $y \neq 0$. O autoespaço associado ao autovalor $\lambda = -2$ é dado então por

$$V(-2) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x = 4y\} = [(4, 1)],$$

completando o exemplo. □

Vamos agora adaptar este método para encontramos, quando possível, os autovalores, e seus respectivos autovetores, de operadores lineares definidos em espaços vetoriais reais de dimensão finita.

Definição 5.12. *Sejam V um espaco vetorial real de dimensão finita,* $\dim V = n$, *e $T : V \to V$ um operador linear. Definimos o polinômio característico do operador linear T como sendo o polinômio característico da matriz de T em relação a uma base B do espaço vetorial V, isto é,*

$$p_T(\lambda) = \det([T]_B - \lambda I_n),$$

onde I_n denota a matriz identidade de ordem $n \in \mathbb{N}$.

Quando olhamos a definição acima, uma pergunta surge imediatamente: o polinômio característico de operadores lineares definidos em espaços vetoriais reais de dimensão finita depende da base escolhida para o espaço vetorial? A reposta é negativa e para provarmos esse fato, vamos demonstrar primeiro um lema técnico.

Lema 5.13. *Se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ são duas matrizes semelhantes, isto é, se existe uma matriz inversível $M \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $B = M^{-1}AM$, então elas possuem o mesmo polinômio característico.*

Demonstração: Sejam $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ duas matrizes semelhantes. Então, existe uma matriz inversível $M \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $B = M^{-1}AM$. Logo, $\det M \neq 0$ e,

$$\det(M^{-1}) = (\det M)^{-1}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} p_B(\lambda) &= \det(B - \lambda I_n) = \det(M^{-1}AM - \lambda I_n) \\ &= \det(M^{-1}AM - M^{-1}\lambda I_n M) \\ &= \det(M^{-1}(A - \lambda I_n)M) \\ &= \det(M^{-1}) \det(A - \lambda I_n) \det M \\ &= \det(A - \lambda I_n) \det(M^{-1}) \det M \\ &= \det(A - \lambda I_n) \\ &= p_A(\lambda), \end{aligned}$$

provando o lema. ■

Teorema 5.14. *Se V é um espaço vetorial real de dimensão finita,* $\dim V = n$, *e $T : V \to V$ é um operador linear, então o polinômio característico do operador linear T independe da base escolhida para o espaço vetorial V, e suas raízes em $\mathbb{R}$ são exatamente os autovalores do operador linear T.*

Demonstração: Mostraremos apenas que o polinômio característico do operador linear T independe da base escolhida. Para fazermos isso, sejam B e C duas bases quaisquer do espaço vetorial real V. Usando a fórumla para o cálculo da matriz da composta de transformações lineares, temos que

$$[T]_B = [I \circ T \circ I]_B = [I \circ T \circ I^{-1}]_B = [I]_B^C [T]_C [I^{-1}]_C^B,$$

onde $I : (V, B) \to (V, C)$ denota o operador identidade. Chamando de $M = [I^{-1}]_C^B$ e, lembrando que

$$[I]_B^C = ([I^{-1}]_C^B)^{-1},$$

obtemos que

$$[T]_B = M^{1} [T]_C M.$$

Assim, concluímos que as matrizes do operador linear T nas bases B e C do espaço vetorial real V são semelhantes e, portanto, o lema 5.13 implica que o polinômio característico do operador linear T independe da base escolhida.

A demonstração da outra parte pode ser encontrada em CALLIOLI; DOMINGUES; COSTA na página 249. ■

O teorema acima nos fornece um método mais rápido e eficiente para encontrar, quando existem, os autovalores de operadores lineares definidos em espaços vetoriais de dimensão finita. Para encontrarmos os respectivos autovetores, procedemos da seguinte maneira: fixemos uma base B do espaço vetorial real V, com $\dim V = n$. Para um elemento não nulo $v \in V$ ser um autovetor de T associado a um autovalor $\lambda \in \mathbb{R}$ devemos ter que,

$$\begin{aligned} Tv = \lambda v &\iff [Tv]_B = [\lambda v]_B \\ &\iff [T]_B[v]_B - [\lambda v]_B = 0_{n\times 1} \\ &\iff [T]_B[v]_B - \lambda[v]_B = 0_{n\times 1} \\ &\iff ([T]_B - \lambda I_n)[v]_B = 0_{n\times 1}. \end{aligned}$$

Logo $v \in V$ é um autovetor de T associado a um autovalor $\lambda \in \mathbb{R}$ se, e somente se,

$$([T]_B - \lambda I_n)[v]_B = 0_{n\times 1}, \tag{5.5}$$

onde I_n denota a identidade de ordem n e $0_{n\times 1}$ denota a matriz nula de ordem $n \times 1$.

Nos exemplos que seguem estaremos sempre considerando a base canônica dos espaços vetoriais utilizados.

Exemplo 5.15. *Consideremos o espaço vetorial* $V = \mathbb{R}^3$ *e definamos um operador linear* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, *para todo* $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, *por*

$$T(x, y, z) = (3x - 3y - 4z, 3y + 5z, -z).$$

Vamos encontrar os autovalores, e seus respectivos autovetores, do operador linear T.

De fato: Primeiramente, vamos encontrar a matriz, na base canônica

$$B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\},$$

do operador linear T. Temos,

$$\begin{aligned} T(1, 0, 0) &= (3, 0, 0) = 3(1, 0, 0) + 0(0, 1, 0) + 0(0, 0, 1) \\ T(0, 1, 0) &= (-3, 3, 0) = -3(1, 0, 0) + 3(0, 1, 0) + 0(0, 0, 1) \\ T(0, 0, 1) &= (-4, 5, -1) = -4(1, 0, 0) + 5(0, 1, 0) + -1(0, 0, 1). \end{aligned}$$

Logo, a matriz de T na base canônica do $\mathbb{R}^3$ é dada por

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Assim, os autovalores de T são exatamente as raízes do polinômio característico que é dado por

$$\begin{aligned} p_T(\lambda) &= \det([T]_B - \lambda I_3) \\ & \det(\begin{bmatrix} 3 & -3 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}) \\ &= \det \begin{bmatrix} 3-\lambda & -3 & -4 \\ 0 & 3-\lambda & 5 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (3-\lambda)(3-\lambda)(-1-\lambda). \end{aligned}$$

Dessa forma vemos que as raízes do polnômio característico de T são $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ e $\lambda_3 = -1$. Portanto, os únicos autovalores do operador linear T são $\lambda = 3$ e $\lambda = -1$.

Vamos agora encontrar os autovetores associados a cada um desses autovalores. Seja $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ um elemento não nulo. Então

$$v = (x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1),$$

ou seja,

$$[v]_B = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Para $\lambda = 3$, utilizando (5.5), temos que $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ é um autovetor de T associado ao autovalor $\lambda = 3$ se, e somente se,

$$([T]_B - 3I_3)[v]_B = 0_{3\times 1} \iff \begin{bmatrix} 3-3 & -3 & -4 \\ 0 & 3-3 & 5 \\ 0 & 0 & -1-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{bmatrix} 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} -3y - 4z = 0 \\ 5y = 0 \\ -4z = 0. \end{cases}$$

Logo, $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ é um autovetor associado ao autovalor $\lambda = 3$ se, e somente se, $y = z = 0$ e $x \in \mathbb{R}$ é um número real não nulo qualquer, ou seja, $v = (x, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$, com $x \neq 0$. O autoespaço associado ao autovalor $\lambda = 3$ é dado então por

$$V(3) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ y = z = 0\} = [(1, 0, 0)].$$

Para $\lambda = -1$, utilizando (5.5), temos que $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ é um autovetor de T associado ao autovalor $\lambda = -1$ se, e somente se,

$$([T]_B - (-1)I_3)[v]_B = 0_{3\times 1} \iff \begin{bmatrix} 3+1 & -3 & -4 \\ 0 & 3+1 & 5 \\ 0 & 0 & -1+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{bmatrix} 4 & -3 & -4 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} 4x - 3y - 4z = 0 \\ 4y + 5z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = \frac{31}{16}z \\ y = \frac{5}{4}z. \end{cases}$$

Logo, $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ é um autovetor associado ao autovalor $\lambda = -1$ se, e somente se, $x = \frac{1}{16}z$, $y = -\frac{5}{4}z$ e $z \in \mathbb{R}$ é um número real não nulo qualquer, ou seja, $v = (\frac{1}{16}z, \frac{-5}{4}z, z) \in \mathbb{R}^3$, com $z \neq 0$. O autoespaço associado ao autovalor $\lambda = -1$ é dado então por

$$V(-1) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x = \frac{1}{16}z \ \text{ e } \ y = -\frac{5}{4}z\} = [(1, -20, 16)],$$

completando o exemplo. $\square$

5.3 Diagonalização de Operadores Lineares

O objetivo principal dessa seção é encontrar condições para que matrizes associadas a operadores lineares definidos em espaços vetoriais reais de dimensão finita sejam diagonais.

Observemos que se $T : V \to V$ é um operador linear definido em um espaço vetorial real V de dimensao finita e $\lambda \in \mathbb{R}$ é um autovalor deste operador linear, associado a um autovetor não nulo $v \in V$, então $T(v) = \lambda v$ e, portanto, se este autovetor for um elemento de uma base para o espaço vetorial, quando formos escrever $T(v)$ em função desta base todos os coeficientes deverão ser iguais a zero, exceto o que multiplica o próprio autovetor e assim, na coluna $j \in \mathbb{N}$ (coluna associada a esse autovetor) da matriz do operador linear T, em relação a essa base, todas as entradas serão nulas exceto a posicao jj, que será igual a $\lambda \in \mathbb{R}$. Assim, se conseguirmos encontrar uma base para o espaço vetorial V formada apenas por autovetores de T, a matriz do operador linear T, com relação a essa base, será diagonal e os elementos da diagonal serão os respectivos autovalores de T.

Vamos começar esta seção com um lema que mostra que autovetores associados a autovalores distintos de um operador linear são linearmente independentes.

5.4 Exercícios Propostos

1. Encontre os autovalores e os autovetores do operador linear T do $\mathbb{R}^2$ definido por:

   (a) $T(x, y) = (x + y, x - y)$;

   (b) $T(x, y) = (-x, -y)$;

   (c) $T(1, 0) = (0, -1)$ e $T(0, 1) = (1, 0)$.

2. Encontre os autovetores e os autovalores do operador linear T do $\mathbb{R}^3$, definido por:

   (a) $T(1, 0, 0) = (2, 0, 0)$, $T(0, 1, 0) = (2, 1, 2)$ e $T(0, 0, 1) = (3, 2, 1)$;

   (b) $T(1, 0, 0) = (0, 0, 0)$, $T(0, 1, 0) = (0, 0, 0)$ e $T(0, 0, 1) = (5, -1, 2)$.

3. Determinar os autovalores e os autovetores do operador linear T do $\mathbb{R}^4$ cuja matriz em relação à base canônica seja: $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

4. Determinar o polinômio característico e os autovalores do operador linear $T : V \to V$ que é definido em uma base $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ por $T(e_i) = \lambda_i e_i$, para todo $i = 1, 2, \ldots, n$, onde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.

5. Calcular o polinômio característico, os autovalores e seus respectivos autovetores da matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

6. Seja $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ a matriz de um operador linear do $\mathbb{R}^2$. Encontre os autovalores deste operador. Existem, nesse caso, dois autovetores linearmente independentes? Justifique a sua resposta.

7. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por $T(x, y) = (y, 2y)$. Mostre que $\lambda = 2$ é um autovalor de T e que elementos da forma $(x, 2x)$ são os autovetores correspondentes.

8. Encontre a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, tal que T tenha autovalores -2 e 3, associados respectivamente a autovetores da forma $(3y, y)$ e $(-2y, y)$.

9. Seja $T : V \to V$ um operador linear.

   (a) Se $\lambda = 0$ é autovalor de T, mostre que T não é injetora;

   (b) A recíproca é verdadeira? Ou seja, se T é não injetora, então $\lambda = 0$ é autovalor de T? Justifique suas respostas.

   (c) Sejam $v_1 \in V_{\lambda_1}$ e $v_2 \in V_{\lambda_2}$ dois autovetores associados à autovalores λ_1 e λ_2 distintos. Mostre que v_1 e v_2 são LI.

10. Encontre, se possível, uma matriz $M \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, inversível, de tal maneira que $M^{-1}AM$ seja diagonal, onde

$$\text{(a) } A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 13 \end{pmatrix}; \qquad \text{(b) } A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

11. Encontre, se possível, uma matriz $M \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$, inversível, tal que $M^{-1}AM$ seja diagonal, onde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 9 \\ 2 & 1 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

12. Encontre, se possível, uma matriz $M \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$, inversível, tal que $M^{-1}AM$ seja diagonal, onde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

13. Para quais valores de a as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ são diagonalizáveis? Justifique a sua resposta.

14. Achar uma matriz diagonal semelhante à matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -6 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

15. Estudar, quanto à possibilidade de diagonalização, as matrizes:

$$\text{(a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}; \qquad \text{(b) } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m & 2 & 0 \\ n & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Referências Bibliográficas

[1] BOLDRINI J.L., COSTA S.I.R., FIGUEIREDO V.L. e WETZLER H.G.. Álgebra Linear. 3^a. Edição. Editora Harbra Ltda. São Paulo, 1980.

[2] CALLIOLI C.A., DOMINGUES H.H. e COSTA, R.C.F.. Álgebra Linear e Aplicações . 6^a Edição. Editora Atual. São Paulo, 1991.

[3] COELHO F.U. e LOURENÇO M.L.. Um Curso de Álgebra Linear. Edusp-Editora da Universidade de São Paulo, 2^a Edição.

[4] LIPSCHUTZ S. e LIPSON, M.. Álgebra Linear. 3^a Edição. Bookman. São Paulo, 2004.

[5] STEINBRUCH A. e WINTERLE P.. Álgebra Linear. 2^a Edição. Mc Graw-Hill. São Paulo, 1987.