Funções Hiperbólicas - Resumo

Prof. Doherty Andrade

25 de outubro de 2005

Sumário

1 Funções Transcendentes

As operações de adição, subtração, multiplicação, potenciação, divisão e extração de raízes são chamadas de operações algébricas. Chamamos de funções algébricas as funções que são construídas aplicando um número finito dessas operações. As funções que não são algébricas são chamadas de transcendentes. As funções polinomiais e as funções racionais são exemplos de funções algébricas, dentre outras. São exemplos de funções transcendentes $\ln x$ e $\sin(x)$, dentre outras.

Utilizando as funções algébricas podemos realizar muitos cálculos e modelar muitos dos fenômenos físicos e biológicos, mas elas são insuficientes para resolver todos os problemas da Matemática. Além delas existem outras (as transcendentes): exponenciais, logarítmicas e as funções trigonométricas (e claro, combinações entre elas) que aparecem naturalmente em diversos problemas da Matemática. Vamos estudar detalhadamente as funções transcendentes agora.

1.1 Função Logaritmo Natural

A função logaritmo natural de um real positivo x é escrito como o valor da integral definida

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt, x > 0.$$

Se $x > 1$, então $\ln x$ é a área sob o gráfico da curva $y = \frac{1}{t}$, entre $t = 1$ e $t = x$. Para $0 < x < 1$, fornece o oposto da área sob a curva $y = \frac{1}{t}$, entre $t = x$ e $t = 1$.

Notemos, pela definição , que $\ln x$ é uma função contínua e estritamente crescente com domínio $(0, \infty)$ e assumindo todos os valores reais. Isto é, $\ln : (0, \infty) \to R$. Logo, possui inversa. Sua inversa é denotada por $\exp : R \to (0, \infty)$.

O teorema do valor intermediário implica que $\ln x$ e a reta horizontal $y = 1$ se cruzam num único ponto. A abscissa desse ponto é o número e =2,718281828... Assim, o número e é o único real tal que $\ln e = 1$.

Definição 1 *A exponencial natural* exp *está definida para todos os números reais como segue* $\exp(x) = y \Leftrightarrow \ln y = x$.

Exercício 2 *Reveja a descoberta do número e como limite:* $e = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n$.

Proposição 3 *Propriedades:*

1. $\ln(xy) = \ln x + \ln y$
De fato,

$$\ln xy = \int_1^{xy} \frac{1}{t}dt = \int_1^{x} \frac{1}{t}dt + \int_x^{xy} \frac{1}{t}dt = \ln x + \int_x^{xy} \frac{1}{t}dt.$$

Fazendo a mudança de variáveis $t = xs$, na última integral, obtemos que $\int_x^{xy} \frac{1}{t}dt = \int_1^{y} \frac{1}{s}ds = \ln y$.Donde segue o resultado.

2. 1. $\ln(x^r) = r \ln x$,para todo racional r.
De fato, para r natural, o resultado segue por indução. Se $r = n$ é inteiro negativo, temos que

$$0 = \ln 1 = \ln x^n x^{-n} = \ln x^n + \ln x^{-n} = n \ln x + \ln x^{-n}.$$

Segue que $\ln x^{-n} = -n \ln x$.

Se $r = \frac{m}{n}$, temos que $m \ln x = \ln x^m = \ln(x^{\frac{m}{n}})^n = n \ln(x^{\frac{m}{n}})$. Donde segue que $\ln(x^{\frac{m}{n}}) = \frac{m}{n} \ln x$.

1.2 Funções Trigonométricas Hiperbólicas

Utilizando as funções exponencial e logaritmo natural podemos definir outras funções. As

funções trigonométricas hiperbólicas, utilizam apenas a exponencial em suas definições. As inversas das funções trigonométricas hiperbólicas utilizam o logaritmo.

As funções trigonométricas hiperbólicas são definidas por

1. $\cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$
1. $\sinh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$
3. $\tanh(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cosh(x)} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

4 .$\coth(x) = \dfrac{\cosh(x)}{\sinh(x)} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

5. $\sec h(x) = \dfrac{1}{\cosh(x)} = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}}$
6. $\csc h(x) = \dfrac{1}{\sinh(x)} = \dfrac{2}{e^x - e^{-x}}$

1.3 Relações Trigonométricas

Note que valem as seguintes relações que são verificadas diretamente a partir das definições de $\cosh(x)$ e $\sinh(x)$.

1. $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$
2. $1 - \sec h^2(x) = \tanh^2(x)$
3. $\coth^2(x) - 1 = \csc h^2(x)$
4. $\sinh(x + y) = \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y)$
5. $\cosh(x + y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)$
6. $\sinh(2x) = 2\sinh(x)\cosh(x)$
7. $\cosh(2x) = \cosh^2(x) + \sinh^2(x)$
8. $\cosh^2(x) = \dfrac{\cosh(2x) + 1}{2}$
9. $\sinh^2(x) = \dfrac{\cosh(2x) - 1}{2}$

1.4 Derivadas

As derivadas podem ser calculadas diretamente

1. $\mathrm{D}_x \cosh(x) = \sinh(x)$
2. $\mathrm{D}_x \sinh(x) = \cosh(x)$
3. $\mathrm{D}_x \tanh(x) = \sec h^2(x)$

4. $\mathrm{D}_x \sec h(x) = -\sec h(x)\tanh(x)$
5 .$\mathrm{D}_x \coth(x) = -\csc h^2(x)$
6 .$\mathrm{D}_x \csc h(x) = -\csc h(x)\coth(x)$

1.5 Hiperbólicas Inversas

Analisando o comportamento das funções trigonométricas hiperbólicas ou os seus gráficos, vemos que:

(a) as funções $\sinh(x)$ e $\tanh(x)$ são crescentes para todo x real.
(b) as funções $\coth(x)$ e $\csc h(x)$ são decrescentes para todo $x \neq 0$ real.
(c) a função $\cosh(x)$ é crescente na semi-reta $x \geq 0$.
(d) a função $\sec h(x)$ é de crescente na semi-reta $x \geq 0$.

Segue que cada uma das seis funções trigonométricas hiperbólicas podem ser invertidas nos domínios onde são crescentes ou decrescentes. Vamos resumir essas informações:

1. $\sinh^{-1}(x)$ está definida para todo real:

$$\sinh^{-1} : (-\infty, \infty) \to (-\infty, \infty)$$

2. $\cosh^{-1}(x)$ está definida para todo real $x \geq 1$:

$$\cosh^{-1} : [1, \infty) \to [0, \infty)$$

3. $\tanh^{-1}(x)$ está definida para $|x| < 1$:

$$\tanh^{-1} : (-1, 1) \to (-\infty, \infty)$$

4. $\coth^{-1}(x)$ está definida para $|x| > 1$:

$$\coth^{-1} : (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \to (-\infty, \infty)$$

5. $\sec h^{-1}(x)$ está definida para $0 < x \leq 1$:

$$\sec h^{-1} : (0, 1] \to [0, \infty)$$

6. $\csc h^{-1}(x)$ está definida para todo $x \neq 0$:

$$\csc h^{-1} : (-\infty, \infty) \to (-\infty, \infty)$$

Podemos expressar as inversas hiperbólicas utilizando o logaritmo. Como exemplo, vamos expressar $\sinh^{-1}(x)$ em termos do loagaritmo. Se $\sinh(y) = x$, então temos

$$\frac{e^y - e^{-y}}{2} = x \Leftrightarrow e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0$$

que é uma equação do segundo grau em e^y. Resolvendo, obtemos

$$e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2+4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2+1}$$

Como $e^y > 0$, segue que $e^y = x + \sqrt{x^2+1}$. Aplicando o logaritmo obtemos

$$y = \operatorname{arcsin} h(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$$

Do mesmo modo, obtemos

1. $\operatorname{arccos} h(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$
2. $\operatorname{arctan} h(x) = \frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x})$
3. $\operatorname{arccsc} h(x) = \ln(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}})$
4. $arc\coth(x) = \frac{1}{2}\ln(\frac{x+1}{x-1})$
5. $\operatorname{arcsec} h(x) = \ln(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x})$
6. $\operatorname{arcsin} h(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$

Elas possuem derivadas. Como exemplo vamos calcular a derivada de $\sinh^{-1}(x)$.

Seja $y = \sinh^{-1}(x)$. Segue que $\sinh(y) = x$ e derivando pela regra da cadeia obtemos que $\cosh(x)y^{'}(x) = 1$. Donde, obtemos que

$$y^{'}(x) = \frac{1}{\cosh(x)} = \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Do mesmo modo, podemos calcular as derivadas das outras funções trigonométricas hiperbólicas inversas. Vamos resumir as derivadas aqui.

1. $\mathrm{D}_x \cosh^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
2. $\mathrm{D}_x \tanh^{-1}(x) = \frac{1}{1-x^2}$
3. $\mathrm{D}_x \coth^{-1}(x) = \frac{1}{1-x^2}$
4. $\mathrm{D}_x \sec h^{-1}(x) = \frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}$
5. $\mathrm{D}_x \csc h^{-1}(x) = \frac{-1}{|x|\sqrt{1+x^2}}$
6. $\mathrm{D}_x \sinh^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

1.6 Integrais

No cálculo de algumas integrais aparecem naturalmente as funções trigonométricas hiperbólicas ou suas inversas. Vejamos um exemplo:

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \sinh^{-1}(x) + k$

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \cosh^{-1}(x) + k$

c) $\displaystyle\int \frac{dx}{1-x^2} = \tanh^{-1}(x) + k$, se $|u| < 1$

d) $\displaystyle\int \frac{dx}{1-x^2} = \coth^{-1}(x) + k$, se $|u| > 1$