

Álgebra Booleana: Introdução e Aplicações

Raul Vitor Benate Zanatto.
Orientador: Prof. Dr. Laerte Bemm.

Introdução

Álgebras Booleanas, desenvolvidas por George Boole, são uma área da Álgebra Abstrata na qual utilizamos operadores lógicos para definir as operações, estas operações são: a conjunção “e”, a disjunção exclusiva “ou, ou” e a negação de proposições. As Álgebras Booleanas são aplicadas principalmente na computação, para o desenvolvimento de circuitos, portas lógicas e no estudo de imagens binárias, entre outros.

Anel Booleano

Um anel, estudado em Álgebra Abstrata, é uma estrutura algébrica que consiste em um conjunto não vazio munido de duas operações, chamadas adição e multiplicação, que satisfazem certas propriedades. Para a adição: associatividade, comutatividade, existência de elemento neutro e oposto aditivo. Para a multiplicação: associatividade e distributividade da multiplicação sobre a adição.

Mesmo que não percebamos, existem anéis em particular que contribuem muito para o cotidiano, tal como os Anéis Booleanos. Um Anel Booleano, é um anel com uma propriedade a mais: a idempotência da multiplicação, isto é, todo elemento multiplicado por si mesmo resulta nele próprio. O menor anel Booleano não nulo é o $\mathbb{Z}_2$, o conjunto dos elementos 0 e 1, com as operações de adição e multiplicação dadas pelas seguintes tabelas de operações:

+	0	1
0	0	1
1	1	0

·	0	1
0	0	0
1	0	1

Figura 1: Tabelas de Operações.

Outro exemplo de Anel Booleano é o conjunto dos pares ordenados (a_1, a_2) , com $a \in \mathbb{Z}_2$, denotado por $\mathbb{Z}_2^2$. Para operar em $\mathbb{Z}_2^2$, basta operar as coordenadas correspondentes:

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2),$$

$$(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = (a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2).$$

O exemplo anterior pode ser generalizado para o caso de $\mathbb{Z}_2^n$ que é o conjunto das n -uplas $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, as operações em $\mathbb{Z}_2^n$ são análogas a $\mathbb{Z}_2^2$, ou seja, coordenada a coordenada.

Portas Lógicas

As Álgebras Booleanas são usadas para modelar os circuitos de aparelhos eletrônicos. Um aparelho eletrônico é composto de muitos circuitos e cada um pode ser projetado usando as regras das Álgebras Booleanas.

Os elementos básicos dos circuitos são chamados de portas, e cada porta implementa uma operação Booleana. Normalmente, operações em uma Álgebra Booleana são feitas utilizando os operadores lógicos: “ou” (disjunção), “e” (conjunção) e “~” (negação ou inversão).

Seguem alguns tipos de porta cujas “saídas” dependem apenas da “entrada”, isto é, estes circuitos não tem capacidade de memória.

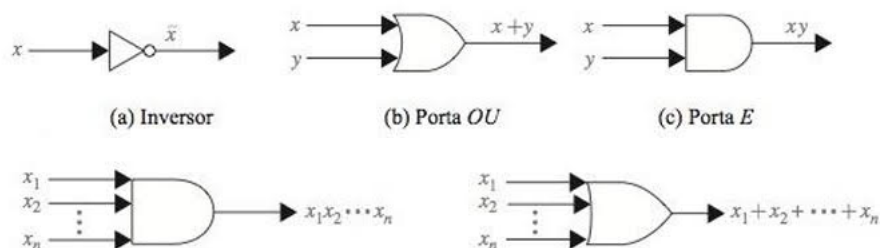


Figura 2: Circuitos.

É válido lembrar que, apesar de usarmos números para realizar as operações (no caso, 0 e 1), tais números podem representar diversas informações duais (positivo e negativo, preto e branco, par ou ímpar, etc).

É pertinente a questão “como podemos transformar informações de um conjunto com mais de dois elementos em 0 ou 1?”. Para essa questão, considere X como o conjunto universo não vazio, e A um subconjunto de X . Definimos a função f_A da seguinte forma

$$f_A : X \rightarrow \mathbb{Z}_2$$

$$x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A \\ 0, & \text{se } x \notin A. \end{cases}$$

Isto significa que os elementos de A tem valor 1 e os elementos de “fora” de A tem valor 0. São utilizados os valores de $f_{A_i}(x)$ para cada entrada das portas lógicas.

Referências

- [1] GIVANT, Steven; HALMOS, Paul. **Introduction to Boolean Algebras**. San Francisco: Springer Science, 2009. 589 p.
- [2] ROSEN, Kenneth H.. **Matemática Discreta e Suas Aplicações**. 6. ed. Rio de Janeiro: Academic Press, 2019. 448 p.