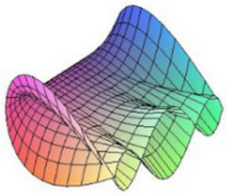


Álgebra Booleana:
Introdução e Aplicações

Raul Vitor Benate Zanatto.
Orientador: Prof. Dr. Laerte Bemm.

Introdução

Álgebras Booleanas, desenvolvidas por George Boole, são uma área da Álgebra Abstrata na qual utilizamos operadores lógicos para definir as operações, estas operações são: a conjunção "e", a disjunção exclusiva "ou, ou" e a negação de proposições. As Álgebras Booleanas são aplicadas principalmente na computação, para o desenvolvimento de circuitos, portas lógicas e no estudo de imagens binárias, entre outros.

Anel Booleano

Um anel, estudado em Álgebra Abstrata, é uma estrutura algébrica que consiste em um conjunto não vazio munido de duas operações, chamadas adição e multiplicação, que satisfazem certas propriedades. Para a adição: associatividade, comutatividade, existência de elemento neutro e oposto aditivo. Para a multiplicação: associatividade e distributividade da multiplicação sobre a adição.

Mesmo que não percebamos, existem anéis em particular que contribuem muito para o cotidiano, tal como os Anéis Booleanos. Um Anel Booleano, é um anel com uma propriedade a mais: a idempotência da multiplicação, isto é, todo elemento multiplicado por si mesmo resulta nele próprio. O menor anel Booleano não nulo é o $\mathbb{Z}_2$, o conjunto dos elementos 0 e 1, com as operações de adição e multiplicação dadas pelas seguintes tabelas de operações:

+	0	1
0	0	1
1	1	0

·	0	1
0	0	0
1	0	1

Figura 1: Tabelas de Operações.

Outro exemplo de Anel Booleano é o conjunto dos pares ordenados (a_1, a_2), com $a \in \mathbb{Z}_2$, denotado por ${\mathbb{Z}_2}^2$. Para operar em ${\mathbb{Z}_2}^2$, basta operar as coordenadas correspondentes:

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2),$$

$$(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = (a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2).$$

O exemplo anterior pode ser generalizado para o caso de ${\mathbb{Z}_2}^n$ que é o conjunto das $n-$uplas $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$, as operações em ${\mathbb{Z}_2}^n$ são análogas a ${\mathbb{Z}_2}^2$, ou seja, coordenada a coordenada.

Portas Lógicas

As Álgebras Booleanas são usadas para modelar os circuitos de aparelhos eletrônicos. Um aparelho eletrônico é composto de muitos circuitos e cada um pode ser projetado usando as regras das Álgebras Booleanas.

Os elementos básicos dos circuitos são chamados de portas, e cada porta implementa uma operação Booleana. Normalmente, operações em uma Álgebra Booleana são feitas utilizando os operadores lógicos: "ou" (disjunção), "e" (conjunção) e "$\sim$" (negação ou inversão).

Seguem alguns tipos de porta cujas "saídas" dependem apenas da "entrada", isto é, estes circuitos não tem capacidade de memória.

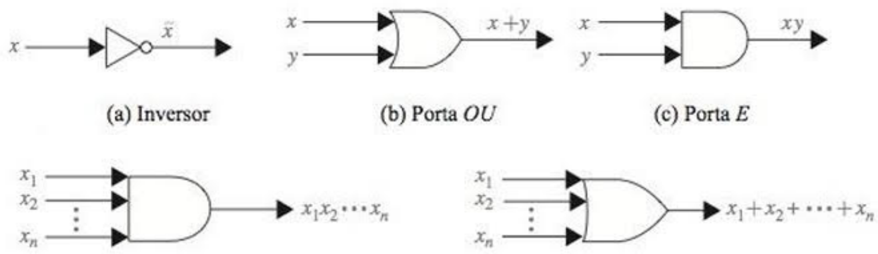


Figura 2: Circuitos.

É válido lembrar que, apesar de usarmos números para realizar as operações (no caso, 0 e 1), tais números podem representar diversas informações duais (positivo e negativo, preto e branco, par ou ímpar, etc).

É pertinente a questão "como podemos transformar informações de um conjunto com mais de dois elementos em 0 ou 1?". Para essa questão, considere X como o conjunto universo não vazio, e A um subconjunto de X. Definimos a função f_A da seguinte forma

$$f_A : X \to \mathbb{Z}_2$$
$$x \mapsto \begin{cases} 1 \text{ , se } x \in A \\ 0 \text{ , se } x \notin A \text{ .} \end{cases}$$

Isto significa que os elementos de A tem valor 1 e os elementos de "fora" de A tem valor 0. São utilizados os valores de $f_{A_i}(x)$ para cada entrada das portas lógicas.

Imagens Binárias

Além das portas lógicas, outro grande uso para as Álgebras Booleanas é na análise de imagens, mais precisamente, na manipulação de imagens binárias, representadas por subconjuntos.

Chamamos de *função caraterística* uma função que mapeia todo um conjunto X em $\mathbb{Z}_2$, isto é,

$$f : X \to \mathbb{Z}_2$$
$$x \mapsto f(x)$$

A função f_A apresentada em Portas lógicas é um exemplo de função característica.

O gráfico de uma função característica é o conjunto de todos os pares (x, f(x)) que indicam qual é o valor de $f(x)$ em cada elemento x de X. A Figura abaixo mostra o gráfico de uma função característica f particular.

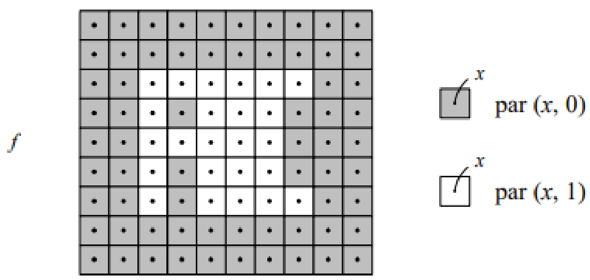


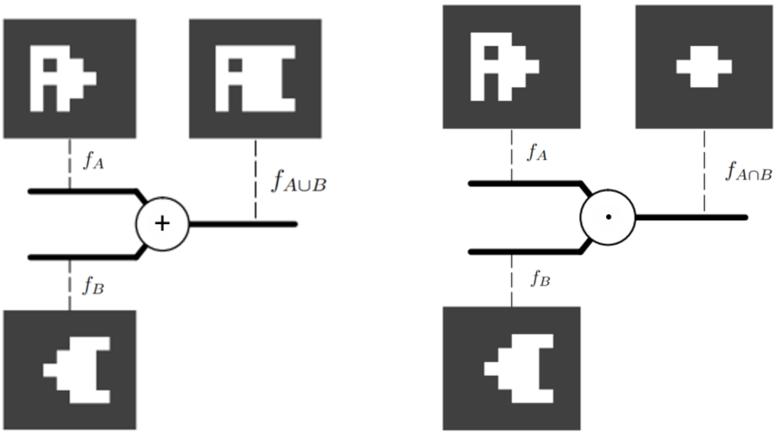
Figura 3: Gráfico

Nesta figura, os elementos de X estão representados por pontos, os pares (x, 0) estão representados em cinza e os pares (x, 1) em branco.

Note que, assim como com as portas lógicas, podemos tomar o subconjunto A de X, onde todos os elementos de A são brancos no gráfico, e, reciprocamente, dado um subconjunto A de X, podemos representar o gráfico da função característica f_A de X similarmente à figura 3:

$$f_A : X \to \mathbb{Z}_2$$
$$x \mapsto \begin{cases} 1 \text{ , se } x \in A \\ 0 \text{ , se } x \notin A \text{ .} \end{cases}$$

Além disso, podemos operar as imagens binárias através das operações usuais de conjuntos, visto que há uma correspondência entre elas e os subconjuntos de X. Assim, $f_A + f_B = f_{A \cup B}$; $f_A \cdot f_B = f_{A \cap B}$.



(a) Soma (b) Produto

A primeira vista, talvez a análise de imagens binárias não pareça grande coisa, mas perceba que cada ponto do gráfico de uma função característica representa o "pixel" da imagem formada por ela, quanto mais pontos o gráfico tiver, mais "pixels" a imagem terá, e portanto, será mais nítida, assim, se faz necessária o uso das álgebras Booleanas para a manipulação dessas imagens

Referências

[1] GIVANT, Steven; HALMOS, Paul. **Introduction to Boolean Algebras**. San Francisco: Springer Science, 2009. 589 p.

[2] ROSEN, Kenneth H.. **Matemática Discreta e Suas Aplicações**. 6. ed. Rio de Janeiro: Academic Press, 2019. 448 p.

[3] BANON, Gerald Jean Francis; BARRERA, Junior. **Bases da Morfologia Matemática para Análise de Imagens Binárias**. 2. ed. São José dos Campos: MCT/INPE, 1998. 230 p.