

Cálculo Diferencial e Integral: um kit de sobrevivência "SageMath"

Ester Heloisa Bento.
Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Martins.

Soma de Riemann

Consiste em se fazer uma aproximação da área delimitada por uma função, curva ou gráfico através de retângulos. Ou seja, determina-se a área de cada retângulo e soma-se todas essas áreas juntas para aproximar ao valor de área pretendido para a função em questão.

Soma de Riemann: Seja f uma função definida em $[a, b]$ e $P : a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ uma partição de $[a, b]$. Para cada índice i ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) seja c_i um número em $[x_{i-1}, x_i]$ escolhido arbitrariamente. Assim, o número

$$\sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i = f(c_1) \Delta x_1 + f(c_2) \Delta x_2 + \dots + f(c_n) \Delta x_n$$

denomina-se *soma de Riemann* f , relativa à partição P e aos números c_i

Imagine que queremos aproximar a área sob o gráfico de f no intervalo $[a, b]$ com n subdivisões iguais. Assim podemos definir:

- Δx como largura de cada retângulo, então $\Delta x = \frac{b-a}{n}$
- Seja c_i a extremidade direita de cada retângulo, então $c_i = a + \Delta x * i$

Soma de Riemann à esquerda:

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(c_i) \Delta x_i$$

Soma de Riemann à direita:

$$\sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$$

Soma de Riemann no Sagemath

Para facilitar, você pode copiar as áreas em azul, colar no SageMath e substituir as informações que você tem, como a função, o ponto, o intervalo etc.

Para calcular a Soma de Riemann de uma função devemos inserir o seguinte comando

```
f(x) = defina f(x)
delta = (b-a)/n
c = a + delta * i
g(i) = f(c) * delta
n(sum(g(i) for i in((0 ou 1)..n)))
```

Substitua f(x),a,b e n pelos valores desejados

Ou apenas

```
@interact
def _soma_riemann(f = x2, a=pi, b=2 * pi, n=(15,(1,50,1)), auto_update=True,
percet_intervalo=(0.5, (0, 1, 0.1))):
    , , ,
```

Entradas:

f - expressao algebrica

a - ponto inicial do intervalo

b - ponto final do intervalo

n - numero de subintervalos da particao

saida: Grafico de f com os retangulos da soma de Riemann

```
, , ,
```

```
G = Graphics()
```

```
n_passos = n
```

```
passo = 0
```

```
pmi = 0
```

```
area = 0
```

```
variacao = (b-a)/n
```

```
for i in range(n_passos):
```

```
    inicio = a + passo
```

```
    fim = a + passo + variacao
```

```
    pmi = f(x=inicio+percet_intervalo*(fim-inicio)) # (f(x=inicio) + f(x=fim))/2
```

```
    area=area+pmi*variacao
```

```
    int_do_passo = [inicio, fim]
```

```
    G = G + plot(pmi, inicio, fim , fill='axis', color='gray') + line([(fim,0), (fim, pmi)],
color='gray') + line([(inicio,0), (inicio, pmi)], color='gray')
```

```
    passo = passo+variacao
```

```
G = G + plot(f, a, b)
```

```
return G * show(figsize=[4,4], title = ' area = ' + str(float(area)))
```

- Podemos mudar a função trocando x^2 acima pela função desejada ou apenas troca-la no espaço onde esta a função.
- Podemos trocar o ponto inicial do intervalo mudando $a = pi$ por $a = valor\ desejado$ ou apenas mudar o valor no espaço de a.
- Podemos trocar o ponto final do intervalo mudando $b = 2 * pi$ por $b = valor\ desejado$ ou apenas mudar o valor no espaço de b.

Observação: O início do intervalo nunca pode ser maior que o final do intervalo pois isso ocasiona um erro.

Exemplo

Calcule a Soma de Riemann pela esquerda e pela direita da função $f(x) = x^2$ no intervalo $[0,3]$.

Soma à Esquerda

```
In [4]: f(x)=x^2
delta=(3-0)/15
c=0+delta*i
g(i)=f(c)*delta
n(sum(g(i) for i in(0..14)))
```

Out[4]: 8.120000000000000

Soma à Direita

```
In [3]: f(x)=x^2
delta=(3-0)/15
c=0+delta*i
g(i)=f(c)*delta
n(sum(g(i) for i in(1..15)))
```

Out[3]: 9.920000000000000

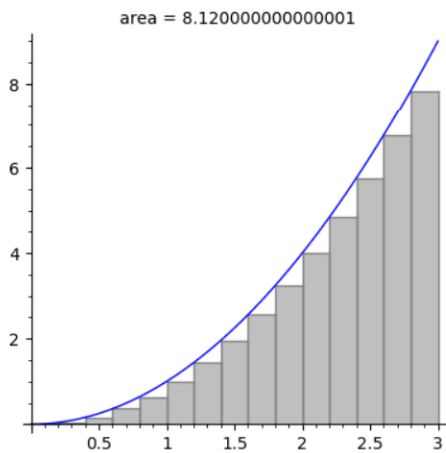
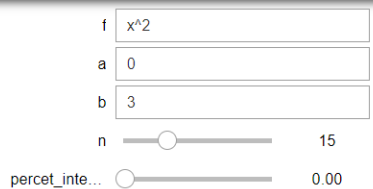
De outra forma

```
In [1]: @interact
def _soma_riemann(f=x^2, a=pi, b=2*pi, n=(15,(1,50,1)), auto_update=True, percent_intervalo=(0.5, (0, 1, 0.1))):
    """
    Entradas:
    f - expressão algébrica
    a - ponto inicial do intervalo
    b - ponto final do intervalo
    n - numero de subintervalos da partição
    saída: Gráfico de f com os retângulos da soma de Riemann
    """
    G = Graphics()
    n_passos = n
    passo = 0
    pmi = 0
    area = 0
    variacao = (b-a)/n
    for i in range(n_passos):
        inicio = a + passo
        fim = a + passo + variacao
        pmi = f(x=inicio+percent_intervalo*(fim-inicio)) #(f(x=inicio) + f(x=fim))/2

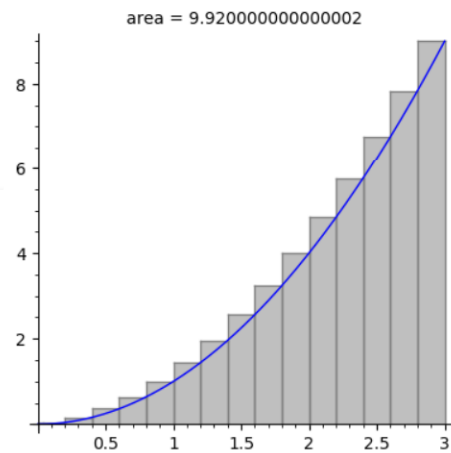
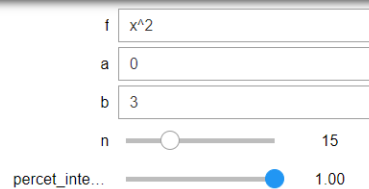
        area=area+pmi*variacao
        int_do_passo = [inicio, fim]

        G = G + plot(pmi, inicio, fim , fill='axis', color='gray') + line([(fim,0), (fim, pmi)], color='gray') + line([(inicio,
0), (inicio, pmi)], color='gray')
        passo = passo+variacao

    G = G + plot(f, a, b)
    return G.show(figsize=[4,4], title = ' area = ' + str(float(area)))
```



Soma à Esquerda



Soma à Direita

Referências

- [1] Praciano-Pereira, Tarcisio. Integral de riemann. Technical report, Sobral Matemática, 2007.
- [2] Sage, Manual de referencias do sage 9.1. Disponível em: <<https://doc.sagemath.org/html/en/reference/plotting/sage/plot/plot.html>> Acesso em: 22 setembro de 2020.
- [3] Somas de Riemann em notação de somatório, Khan Academy 2020. Disponível em: <<https://pt.khanacademy.org/math/ap-calculus-ab/ab-integration-new/ab-6-3/a/riemann-sums-with-summation-notation>>. Acesso em: 22 de setembro de 2020.
- [4] SILVA, Leon; SANTOS, Marcelo; MACHADO, Ricardo; Elementos de Computação Matemática com SageMath. Disponível em: <https://sagectu.com.br/sage_interativo.html>. Acesso em: 22 de setembro de 2020.