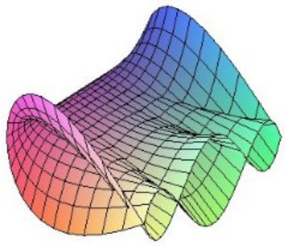

Cálculo Diferencial e Integral:
um kit de sobrevivência
"SageMath"

Vitória Vendramini Gongora.
Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Martins.

Multiplicadores de Lagrange - Parte I

Os multiplicadores de Lagrange nos auxilia a maximizar e minimizar uma função f que está sujeita a restrições de uma função g. Vamos retomar a definiçao de gradiente do Metodo dos Multiplicadores de Lagrange.

Definição: Se f é uma função de duas variáveis x e y, então o **gradiente** de f é a função vetorial ∇f definida por:

$$\nabla f(x,y) = (f_x(x,y), f_y(x,y)) = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j$$

Definição: Para uma função f de três variáveis, o vetor gradiente, denotado por ∇f ou *grad* f é:

$$\nabla f(x,y,z) = (f_x(x,y,z), f_y(x,y,z), f_z(x,y,z)) = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j + \frac{\partial f}{\partial z} k$$

Método dos Multiplicadores de Lagrange: Para determinar os valores máximo e mínimo de $f(x,y,z)$ sujeitos à restrição $t(x,y,z) = k$ [supondo que esses valores extremos existam e que $\nabla g \neq 0$ sobre a superfície $g(x,y,z) = k$]:

(a) Determine todos os valores de x, y, z e l tais que

$$\nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z)$$

e $g(x,y,z) = k$

(b) Calcule f em todos os pontos (x,y,z) que resultaram do passo (a). O maior desses valores será o valor máximo de f, e o menor será o valor mínimo de f.

Multiplicadores de Lagrange no SageMath:

Para facilitar, você pode copiar as áreas em azul e verde, colar no SageMath e substituir as verdes pelas informações que você tem, como a função, o ponto, o intervalo etc.

Há três maneiras de minimizar uma função no Sage, nesse texto apresentaremos duas e a terceira estará no texto Multiplicadores de Lagrange - Parte II.

- 1°)

  $var($ 'x y L '$)$

  $F(x,y,z,L) = define\ f(x,y,z)$+L*$(define\ g(x,y,z))$

  $minimize(F,$ [0,0,0,0], $verbose = True$)

  Porém essa pode não ser tão precisa, então a próxima é mais recomendada.

- 2°)

  $var($ 'x y L '$)$

  $F(x,y,z,L) = define\ f(x,y,z)$+L*$(define\ g(x,y,z))$

  $derivate(F)$

  Que nos resulta em algumas equações, então precisamos copia-las na próxima célula e iguala-las a 0

  $eqn1 : define\ eqn1{=}0$

  $eqn2 : define\ eqn2{=}0$

  ...

  $eqnt : define\ eqnt{=}0$

  $solve\ ([eqn1,eqn2,\ ...,\ eqnt]$

  Agora observando os resultados nós conseguimos concluir que o menor resultado é o mínimo e o maior é o máximo.

Exemplo 1:

Minimize a função $f(x,y,z) = (x-3)^2+(y-1)^2+(z+1)^2$ sujeitio a $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-4 = 0$.

```
In [7]: var('y z L')
        F(x, y, z, L) = (x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 + L*(x^2 + y^2 + z^2 - 4)
        minimize(F, [0,0,0,0], verbose=True)

        Warning: Desired error not necessarily achieved due to precision loss.
                 Current function value: 8.927236
                 Iterations: 1
                 Function evaluations: 143
                 Gradient evaluations: 131

Out[7]: (1.5646852718677962, 0.5215617572892653, -0.5215617572892653, 1.0431235145785307)
```

Como dito anteriormente, pode acontecer do comando minimize não conseguir ser tão preciso, então optamos fazer utilizando a segunda forma.

```
In [1]: var('y z L')
        F(x, y, z, L) = (x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 + L*(x^2 + y^2 + z^2 - 4)
        show(derivative(F))
```

$$(x,y,z,L) \mapsto (2Lx+2x-6,\ 2Ly+2y-2,\ 2Lz+2z+2,\ x^2+y^2+z^2-4)$$

```
In [2]: eqn1 = 2*L*x + 2*x - 6 == 0
        eqn2 = 2*L*y + 2*y - 2 == 0
        eqn3 = 2*L*z + 2*z + 2 == 0
        eqn4 = x^2 + y^2 + z^2 - 4 == 0

        show(solve([eqn1, eqn2, eqn3, eqn4], [x, y, z, L]))
```

$$\left[\left[x = -\frac{6}{11}\sqrt{11}, y = -\frac{2}{11}\sqrt{11}, z = \frac{2}{11}\sqrt{11}, L = -\frac{1}{2}\sqrt{11}-1\right], \left[x = \frac{6}{11}\sqrt{11}, y = \frac{2}{11}\sqrt{11}, z = -\frac{2}{11}\sqrt{11}, L = \frac{1}{2}\sqrt{11}-1\right]\right]$$

Referências

[1] STEWART, J. Cálculo, volume 2; tradução EZ2 Translate., São Paulo : Cengage, Learning, 2013.

[2] BARD, G. V. Sage para Estudiantes de Pregrado. Cochabamba: Sagemath, 2014. Tradução de: Diego Sejas Viscarra.