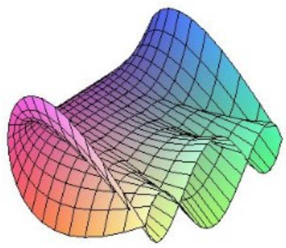

Cálculo Diferencial e Integral:
um kit de sobrevivência
"SageMath"

Vitória Vendramini Gongora.
Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Martins.

Multiplicadores de Lagrange - Parte II

Os multiplicadores de Lagrange nos auxilia a maximizar e minimizar uma função f que está sujeita a restrições de uma ou mais funçôes $g, h, ...$. Vamos ver a definiçao de gradiente e o Metodo dos Multiplicadores de Lagrange.

Definição: Se f é uma função de duas variáveis x e y, então o **gradiente** de f é a função vetorial ∇f definida por:

$$\nabla f(x,y) = \langle f_x(x,y), f_y(x,y) \rangle = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j$$

Definição: Para uma função f de três variáveis, o vetor gradiente, denotado por ∇f ou *grad* f é:

$$\nabla f(x,y,z) = \langle f_x(x,y,z), f_y(x,y,z), f_z(x,y,z) \rangle = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j + \frac{\partial f}{\partial z} k$$

Método dos Multiplicadores de Lagrange: Para determinar os valores máximo e mínimo de $f(x,y,z)$ sujeitos à restrição $t(x,y,z) = k$ [supondo que esses valores extremos existam e que $\nabla g \neq 0$ sobre a superfície $g(x,y,z) = k$]:

(a) Determine todos os valores de x, y, z e l tais que

$$\nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z)$$

e $g(x,y,z) = k$

(b) Calcule f em todos os pontos (x,y,z) que resultaram do passo (a). O maior desses valores será o valor máximo de f, e o menor será o valor mínimo de f.

Também podemos encontrar o máximo e o mínmo de $f(x,y,z)$ que esteja restrito por duas ou mais funções. Para isso, tomemos uma função $f(x,y,z)$ restrita por $g(x,y,z) = k$, $h(x,y,z) = c$. Geometricamente, isso significa que estamos procurando pelos valores extremos de f quando (x,y,z) está restrito a pertencer à curva C, obtida pela intersecção das superfícies de nível $g(x,y,z) = k$ e $h(x,y,z) = c$.

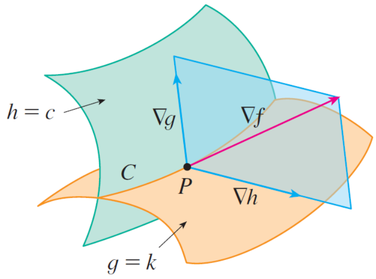

Figura 1: Imagem retirada de: STEWART, J. Cálculo, volume 2, pg.863.

Multiplicadores de Lagrange no SageMath:

Para facilitar, você pode copiar as áreas em azul e verde, colar no SageMath e substituir as verdes pelas informações que você tem, como a função, o ponto, o intervalo etc.

Defina as variáveis e as funções

y,z,... = var('y,z,...')

$f($ $x, y, z, ...)$= defina $f(x, y, ...)$

$g($ $x, y, z, ...)$= defina $g(x, y, z, ...)$

$h($ $x, y, z, ...)$= defina $g(x, y, z, ...)$

...

Calcule os gradintes em células separadas

f.gradient()

g.gradient()

h.gradient()

...

Agora definimos as variáveis l,m,... que correspondem a λ, μ ,...

l,m, ...=var('l,m')

Vamos calcular os valores de $x, y, z..., l, m, ...$ utiliando um sistema de algebra computacional.

sol=solve([coordenada x do gradiente de $f(x, y, z, ...)$ == l* coordenada x no gradiente de $g(x, y, z, ...)$ + m* coordenada x do gradiente de $h(x, y, z, ...)$, coordenada y do gradiente de $f(x, y, z, ...)$ == l* coordenada y do gradiente de $g(x, y, z, ...)$ + m* coordenada y do gradiente de $h(x, y, z, ...)$..., equação g,equação h, ...],(x,y,z,...,l,m,...))

sol

Dessa maneira fica visivelmente poluido, então utilizamos o comando show para facilidar a visualização

show(sol)

Agora, substituimos os valores de $x, y, z...$ na função $f(x, y, z, ...)$ para encontrarmos o máximo e o mínimo.

Exemplo 1

Determine os valores extremos da função $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ no círculo $x^2 + y^2 = 1$.

```
In [1]: y=var('y')

In [2]: f(x,y)= x^2+2*y^2

In [3]: g(x,y)= x^2+y^2

In [4]: f.gradient()
Out[4]: (x, y) |--> (2*x, 4*y)

In [5]: g.gradient()
Out[5]: (x, y) |--> (2*x, 2*y)

In [6]: l= var('l')

In [7]: sol= solve([2*x==l*2*x, 4*y==l*2*y, 1==x^2+y^2], (x,y,l))
        sol
Out[7]: [[x == 1, y == 0, l == 1], [x == -1, y == 0, l == 1], [x == 0, y == -1, l == 2], [x == 0, y == 1, l == 2]]

In [8]: show(sol)
```

$[[x = 1, y = 0, l = 1], [x = (-1), y = 0, l = 1], [x = 0, y = (-1), l = 2], [x = 0, y = 1, l = 2]]$

```
In [9]: 1^2+2*0^2
Out[9]: 1

In [10]: (-1)^2+2*0^2
Out[10]: 1

In [11]: (0)^2+2*(-1)^2
Out[11]: 2

In [12]: (0)^2+2*(1)^2
Out[12]: 2
```

Portanto, os valores extremos da função $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ no círculo $x^2 + y^2 = 1$ são: o máximo é 2 e o mínimo é 1.

Exemplo 2

Determine o valor máximo da função $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ na curva da intersecção do plano $x - y + z = 1$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

```
In [1]: y,z = var('y,z')

In [2]: f(x,y,z)=x+2*y+3*z

In [3]: g(x,y,z)= x-y+z

In [4]: h(x,y,z)= x^2 +y^2

In [5]: f.gradient()
Out[5]: (x, y, z) |--> (1, 2, 3)

In [6]: g.gradient()
Out[6]: (x, y, z) |--> (1, -1, 1)

In [7]: h.gradient()
Out[7]: (x, y, z) |--> (2*x, 2*y, 0)

In [8]: l,m= var('l,m')

In [9]: sol=solve([1==l*1+m*2*x, 2==l*(-1)+m*2*y, 3==l*1, 1==x-y+z, 1==x^2+y^2],(x,y,z,l,m))
        sol

Out[9]: [[x == -2/29*sqrt(29), y == 5/29*sqrt(29), z == 7/29*sqrt(29) + 1, l == 3, m == 1/2*sqrt(29)], [x == 2/29*sqrt(29), y == -5/29*
        sqrt(29), z == -7/29*sqrt(29) + 1, l == 3, m == -1/2*sqrt(29)]]

In [10]: 1  show(sol)
```

$$\left[\left[x = -\frac{2}{29}\sqrt{29}, y = \frac{5}{29}\sqrt{29}, z = \frac{7}{29}\sqrt{29} + 1, l = 3, m = \frac{1}{2}\sqrt{29}\right],\right.$$
$$\left.\left[x = \frac{2}{29}\sqrt{29}, y = -\frac{5}{29}\sqrt{29}, z = -\frac{7}{29}\sqrt{29} + 1, l = 3, m = -\frac{1}{2}\sqrt{29}\right]\right]$$

```
In [11]: -2/29*sqrt(29) + 2*(5/29*sqrt(29)) + 3*(7/29*sqrt(29) + 1)
Out[11]: sqrt(29) + 3

In [12]: 2/29*sqrt(29) + 2*(-5/29*sqrt(29)) + 3*(-7/29*sqrt(29) + 1)
Out[12]: -sqrt(29) + 3
```

Logo, o máximo da função $f(x, y, z)$ na curva da intersecção com o plano $x - y + z = 1$ e com o cilindro $x^2 + y^2 = 1$ é $\sqrt{29} + 3$.

Referências

[1] STEWART, J. Cálculo, volume 2; tradução EZ2 Translate., São Paulo : Cengage, Learning, 2013.

[2] JENNINGS, G. EXAMPLES of Lagrange multipliers: maximization and minimization with constraints. CoCalc Public Files. Disponível em:
https://share.cocalc.com/share/b3d1725f-1279-45c2-88cc-f7f99fcc7faa/MAT211f18/11.8%20Lagrange%20Multipliers.sagews?viewer=share.
Acesso em: 25 dez. 2020