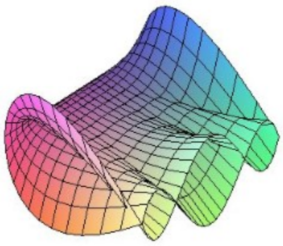


Cálculo Diferencial e Integral:
um kit de sobrevivência
"SageMath"

Vitória Vendramini Gongora.
Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Martins.

Máximos e mínimos de Funções:

Uma das aplicações de derivada é encontrar o valor máximo e o valor mínimo de uma função. Veremos a definiçao de máximo e mínimo e os Teoremas que relacionam derivada, máximo e mínimo de uma função, depois como calcular no SageMath.

Definição 1: Sejam f uma função, $A \subset D_f$ e $p \in A$. Dizemos que $f(p)$ é o *valor máximo* de em A ou que p um *ponto de máximo* de f em A se $f(x) \leqslant (p)$ para todo x em A. Se $f(x) \geqslant f(p)$ para todo x em A, dizemos então que $f(p)$ é o *valor mínimo* de f em A ou que p é um *ponto de mínimo* de f em A

Definição 2: Sejam f uma função e $p \in D_f$. Dizemos que $f(p)$ é o *valor máximo global* de f em A ou p um *ponto de máximo global* de f se, para todo x em D_f, $f(x) \leqslant (p)$. Se, para todo x em D_f, $f(x) \geqslant f(p)$, diremos então que $f(p)$ é o *valor mínimo global* de f ou que p é um *ponto de mínimo global* de f

Definição 3: Sejam f uma função e $p \in D_f$. Dizemos que $f(p)$ é o *ponto máximo local* de f se existir $r > 0$ tal que

$$f(x) \leqslant (p)$$

para todo x em $]p-r, p+r[\cap D_f$. Por outro lado, dizemos que p é o *ponto de mínimo local* de f se existir$r > 0$ tal que

$$f(x) \geqslant f(p)$$

para todo x em $]p-r, p+r[\cap D_f$.

Teorema 1: Seja f uma função derivável em p, onde p é um ponto interior a D_f. Uma condição necessária para que p seja ponto de máximo ou de mínimo local de f é que

$$f'(p) = 0.$$

Teorema 2: Sejam f uma função que admite derivada de 2° ordem contínua no intervalo aberto I e $p \in I$.

a)$f'(p) = 0$ e $f''(p) > 0 \Rightarrow p$ é ponto mínimo local.

b)$f'(p) = 0$ e $f''(p) < 0 \Rightarrow p$ é ponto máximo local.

Máximo e mínimo no SageMath

Para facilitar, você pode copiar as áreas em azul e verde, colar no SageMath e substituir as verdes pelas informações que você tem, como a função, o ponto, o intervalo etc.

Para encontrar os máximos e mínimos de uma função devemos:

$f(x) = definaf(x)$

$diff(f,x)$

Agora, ao usarmos o comando solve e pelo Teorema 1 teremos em quais pontos a derivada de f resulta em zero.

$solve(diff(f,x),x)$

Precisamos encontrar a derivada de segundo grau para saber se temos ponto máximo ou mínimo.

$h(x) = diff(f,x,2)$

Agora calcularemos $f''(x)$ do(s) valore(s) de x dado(s) no solve e utilizaremos o Teorema 2 para saber se é ponto de máximo ou de mínimo, se o resultado foi maior que zero, o ponto do solve é ponto de mínimo, se for maenoz que zero, o ponto do solve é ponto de máxima.

h(x_1 do solve)

h(x_2 do solve)

...

Podemos plotar o gráfico para facilitar a visualização

$plot(f,x,ymin =$valor minímo y,$ymax =$valor máximo y)+ point(x,f(x))

Exemplo 1

Encontre o(s) máximo(s) e o(s) mínimo(s) local(ais) da função $f(x) = x^3 + 4x^2$

In [1]:
```
f(x)=x^3+4*x^2
show(diff(f,x))
```
$x \mapsto 3\,x^2 + 8\,x$

In [2]:
```
show(solve(diff(f,x),x))
```
$\left[x = \left(-\frac{8}{3}\right), x = 0\right]$

In [3]:
```
h(x)=diff(f,x,2)
show(h(x))
```
$6\,x + 8$

In [4]:
```
h(-8/3)
```
Out[4]: -8

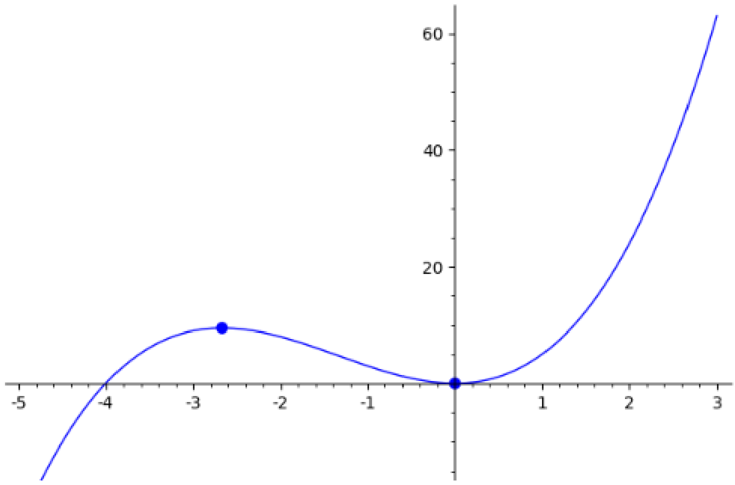
In [5]:
```
h(0)
```
Out[5]: 8

Note que $h(\frac{-8}{3}) = -8 < 0$, logo $(\frac{-8}{3}, f(\frac{-8}{3}))$ é um ponto de máximo local de f.

Além disso, $h(0) = 8 > 0$, logo $(0, f(0))$ é um ponto de mínimo local de f.

O gráfico é uma ótima ilustração dessa situação, veja:

In [6]:
```
plot(f,x,-5,3) + point((0,f(0)), size=50) + point((-8/3,f(-8/3)), size=50)
```
Out[6]:



Exemplo 2

Encontre o(s) máximo(s) e o(s) mínimo(s) local(ais) da função $f(x) = \dfrac{1}{x^4 + 2x^3 + x^2 + 1}$

In [1]:
```
f(x)=1/(x^4+2*x^3+x^2+1)
show(diff(f,x))
```
$$x \mapsto -\frac{2\,(2\,x^3 + 3\,x^2 + x)}{(x^4 + 2\,x^3 + x^2 + 1)^2}$$

In [2]:
```
show(solve(diff(f,x),x))
```
$$\left[x = \left(-\frac{1}{2}\right), x = (-1), x = 0\right]$$

In [3]:
```
h(x)=diff(f,x,2)
show(h(x))
```
$$\frac{8\,(2\,x^3 + 3\,x^2 + x)^2}{(x^4 + 2\,x^3 + x^2 + 1)^3} - \frac{2\,(6\,x^2 + 6\,x + 1)}{(x^4 + 2\,x^3 + x^2 + 1)^2}$$

In [4]:
```
h(-1/2)
```
Out[4]: 256/289

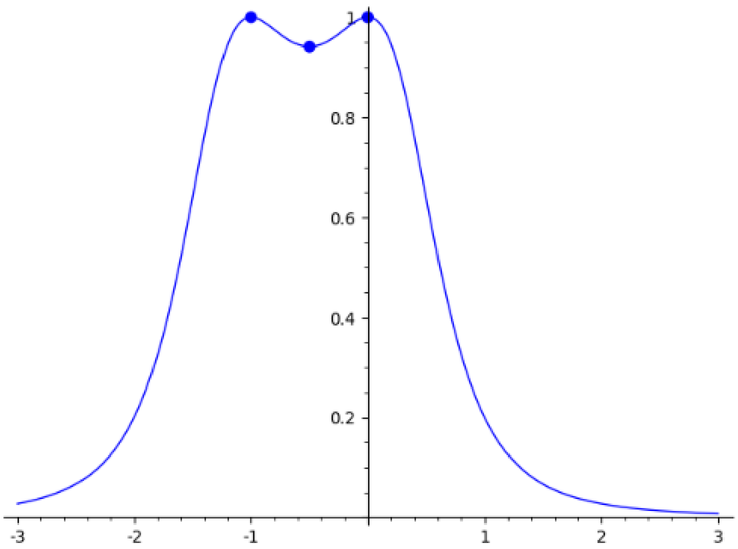
In [5]:
```
h(-1)
```
Out[5]: -2

In [6]:
```
h(0)
```
Out[6]: -2

Note que $h(\frac{-1}{2}) = \frac{258}{289} > 0$, logo $(\frac{-1}{2}, f(\frac{-1}{2}))$ é um ponto de mínimo local de f.
Além disso, $h(-1) = -2 < 0$, logo $(-1, f(-1))$ é um ponto de máximo local de f.
Também temos que, $h(0) = -2 < 0$, logo $(0, f(0))$ é um ponto de máximo local de f.
O gráfico é uma ótima ilustração dessa situação, veja:

In [7]:
```
plot(f,x,-3,3) + point((-1/2,f(-1/2)), size=50) + point((-1,f(-1)), size=50) + point((0,f(0)), size=50)
```

Out[7]:



Referências

[1] GUIDORIZZI, H. L. Um curso de cálculo. 5. ed. Rio de Janeiro: Ltc, 2001. 1 v.

[2] BARD,G. V. Sage para Estudiantes de Pregrado. Cochabamba: Sagemath, 2014. Tradução de: Diego Sejas Viscarra. Disponível em < http://www.sage-para-estudiantes.com/ >. Acesso: 17/08/2020.