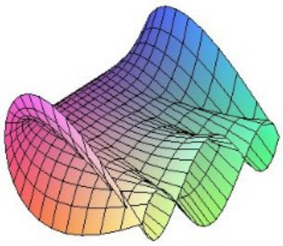

Cálculo Diferencial e Integral: um kit de sobrevivência "SageMath"

Vitória Vendramini Gongora.
Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Martins.

Limite de funções

Para começar nossos estudos sobre limite abordaremos a noção intuitiva e as definições formais.

Observe a Figura 1 que correspode ao gráfico da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x - 3$:

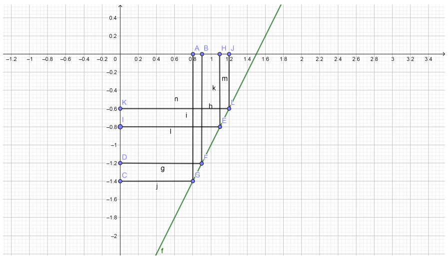

Figura 1: Gráfico da função $f(x) = 2x - 3$

Analisando alguns pontos pertencentes ao gráfico de $f(x)$ obtemos a seguinte tabela:

x	$f(x)$		x	$f(x)$
$0,8$	$-1,4$		$1,2$	$-0,6$
$0,9$	$-1,2$		$1,1$	$-0,8$
$0,99$	$-1,02$		$1,11$	$-0,78$
$0,9999$	$-1,0002$		$1,1111$	$-0,7778$

Podemos perceber, com o auxílio da tabela e da Figura 1, que ao tomarmos valores de x menores que 1, mas que se aproximam de 1, $f(x)$ se aproxima de -1.

O mesmo vale para x maiores, mas próximos de 1, logo, podemos concluir que, quanto mais próximo de 1 o valor de x for, mais próximo de -1 o valor de f(x) será, ou seja, $f(x)$ tende a -1, quando x tende a 1, ou ainda, em linguagem matemática,

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} 2x - 3 = -1.$$

Em outras palavras, podemos expressar estas distâncias usando módulo, assim, para tomar distâncias tão pequenas quanto quisermos entre $f(x)$ e -1, basta encontrar $|x - 1|$ pequeno o suficiente. Para aproximarmos $|x - 1|$ usaremos ε (epsilon), já para $|f(x) - (-1)|$ adotaremos δ (delta).

Note que podemos tomar valores de x menores que 1, ou seja, se aproximar de 1 pela esqueda, ou tomar valores de x maiores que 1, ou seja, se aproximar de 1 pela direita, assim como mostrado na tabela.

A esses dois casos damos os nomes "Limite Lateral à Esquerda"e "Limite Lateral à Direita"respectivamente.

Agora que já temos uma ideia da noção intuitiva podemos escrever a definição formal de limite.

Definição de limite: Considere uma função definida para todo número em algum intervalo aberto contendo a, exceto possivelmente no próprio número a.
O limite de $f(x)$ quando x tende a a será L, escrito como:
$\lim_{x\to a} f(x) = L$
se a seguinte afirmativa for verdadeira.
Dado $\varepsilon > 0$ qualquer, existe um $\delta > 0$, tal que
se $0 < |x - a| < \delta$ então $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Definição de limite lateral pela direita: Seja f uma função que está definida em todos os números de algum intervalo aberto (a, c). Então, o limite de $f(x)$ quando x tende a a pela direita é L, escrevemos
$\lim_{x\to a^+} f(x) = L$
se, para todo $\varepsilon > 0$, existir um $\delta > 0$, tal que
se $0 < x - a < \delta$ então $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Definição de limite lateral pela esquerda: Seja f uma função definida em todos os números de algum intervalo aberto (d, a). Então, o limite de $f(x)$ quando x tende a a pela esquerda é L, escrevemos
$\lim_{x\to a^-} f(x) = L$
se, para todo $\varepsilon > 0$, existir um $\delta > 0$, tal que
se $0 < a - x < \delta$ então $|f(x) - L| < \varepsilon$.

(Podemos encontrar essas definições e muito mais em [1] , pag.58,73,74.)

Como calcular limite no SageMath:

Sendo f uma função, para calcular limite no SageMath basta escrever:

limit(f(x), x=valor que f(x) esta tendendo)

Já para calcular limites laterais basta adicionar dir='right' para limite à direita, ou, dir='left' para limite à esquerda depois do valor que x está tendendo, ou seja:

limit(f(x), x=valor que f(x) esta tendendo, dir='right')
limit(f(x), x=valor que f(x) esta tendendo, dir='left')

Podemos ver um exemplo na Figura 2 com as funções $f(x) = 2x - 3$ e $g(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$:

```
In [1]: limit(2*x-3, x=1)
Out[1]: -1

In [2]: limit(2*x-3, x=1, dir='right')
Out[2]: -1

In [4]: limit(2*x-3, x=1, dir='left')
Out[4]: -1

In [5]: limit((x**2)/(x-1), x=1)
Out[5]: Infinity

In [6]: limit((x**2)/(x-1), x=1, dir='right')
Out[6]: +Infinity

In [7]: limit((x**2)/(x-1), x=1, dir='left')
Out[7]: -Infinity

In [ ]:
```

Figura 2: Exemplo

Observações: O software SageMath só entende a letra x como variável, se quiser utilizar outras será necessário definí-las.

Referências

[1] LEITHOLD, L. O Cálculo com Geometria Analítica, vol. 1 (terceira edição). Editora Harbra.

[2] BARD, Gregory V. Sage para Estudiantes de Pregrado. Cochabamba: Sagemath, 2014. Tradução de: Diego Sejas Viscarra.