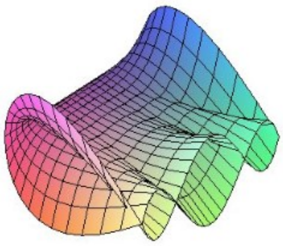

Cálculo Diferencial e Integral:
um kit de sobrevivência
"SageMath"

Ester Heloisa Bento.
Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Martins.

Integrais 2

A tentativa de resolvermos o problema de determinar áreas nos levou à definição de integral definida. Aplicaremos um procedimento semelhante para calcular o volume de um sólido, e este processo nos levará à definição de integral dupla.

Vamos considerar uma função f de duas variáveis definida em um retângulo fechado $R = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d\}$ e vamos inicialmente supor que $f(x, y) \geqslant 0$.
O primeiro passo consiste em dividir o retângulo R em sub-retângulos. Faremos isso dividindo o intervalo $[a, b]$ em m subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ de mesmo comprimento $\triangle x = \dfrac{(b-a)}{m}$ e dividindo o intervalo $[c, d]$ em n subintervalos $[y_{j-1}, y_j]$ de mesmo comprimento $\triangle y = \dfrac{(d-c)}{n}$. Formamos sub-retângulos cada um dos quais com área $\triangle A = \triangle x \triangle y$.

Definição: A **integral dupla** de f sobre o retângulo R é

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_i, y_j) \triangle A$$

se esse limite existir.

A soma na Definição

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_i, y_j) \triangle A$$

é chamada **soma dupla de Riemann** e é usada como uma aproximação do valor da integral dupla.

O seguinte teorema fornece um método prático para calcular uma integral dupla, expressando-a como uma integral iterada

Teorema de Fubini: Se f for contínua no retângulo
$R = \{(x,y)|a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d\}$, então
$$\iint_R f(x,y)dA = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\ dy\ dx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\ dx\ dy$$
De modo mais geral, esse resultado vale se supusermos que f seja limitada em R, f tenha descontinuidades apenas em um número finito de curvas suaves e que a integral iterada exista.

Vamos definir **integrais triplas** para funções de três variáveis. Trataremos de quando f é definida em uma caixa retangular:

$$B = \{f(x,y,z)|a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d, r \leqslant z \leqslant s\}$$

O primeiro passo é dividir B em subcaixas assim como feito para integrais duplas. Cada subcaixa tem volume $\triangle V = \triangle x \triangle y \triangle z$. Assim definimos a integral tripla como o limite das somas triplas de Riemann

Definição: A integral tripla de f na caixa B é
$$\iiint_B f(x,y,z)\ dV = \lim_{l,m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} f(x_i, y_j, z_k) \triangle V$$

Assim como para as integrais duplas, o método prático para calcular uma integral tripla consiste em expressá-la como uma integral iterada.

Integrais Duplas e Tripas no SageMath

Para facilitar, você pode copiar as áreas em azul, colar no SageMath e substituir as informações em verde pelas informações que você tem, como a função, o ponto, o intervalo etc.

- Para calcular a **integral dupla** de uma função devemos:
  var('definir as variaveis')
  f(x,y)=defina f(x,y)
  Usando o teorema de Fubini
  integrando primeiro em relação a x integrate(integrate(f(x,y),x),y)
  integrando primeiro em relação a y integrate(integrate(f(x,y),y),x)
  Calculando nos intervalos dados por R
  integrando primeiro em relação a x integrate(integrate(f(x,y),x,a,b)y,c,d)
  integrando primeiro em relação a y integrate(integrate(f(x,y),y,c,d)x,a,b)

- Para calcular a **integral tripla** de uma função devemos:
  var('definir as variaveis')
  f(x,y,z)=defina f(x,y,z)
  Usando o teorema de Fubini podemos usar qualquer uma das seis possíveis ordens de integração. Se escolhermos integrar primeiro em relação a x, depois em relação a y e então em relação a z, obteremos

integrate(integrate(integrate(f(x,y,z),x),y),z)
Calculando nos intervalos dados por B
integrate(integrate(integrate(f(x,y,z),x,a,b),y,c,d),z,r,s)

Exemplo 1

Calcule a integral dupla $\iint_R (x-3y^2)\, dA$, onde $R = \{(x,y)|0 \leqslant x \leqslant 2, 1 \leqslant y \leqslant 2\}$

In [1]:
```
var('x,y')
f(x,y)=x-3*y^2
show(integrate(integrate(f(x,y),x),y))
show(integrate(integrate(f(x,y),x,0,2),y,1,2))
```

$-xy^3 + \frac{1}{2}x^2y$

-12

Integrando primeiro em relação a x

In [2]:
```
var('x,y')
f(x,y)=x-3*y^2
show(integrate(integrate(f(x,y),y),x))
show(integrate(integrate(f(x,y),y,1,2),x,0,2))
```

$-xy^3 + \frac{1}{2}x^2y$

-12

Integrando primeiro em relação a y

Exemplo 2

Calcule a integral tripla $\iiint_B xyz^2\, dA$, onde B é a caixa retangular dada por

$$B = \{(x,y,z)|0 \leqslant x \leqslant 1, -1 \leqslant y \leqslant 2, 0 \leqslant z \leqslant 3$$

In [1]:
```
var('x,y,z')
f(x,y,z)=x*y*z^2
show(integrate(integrate(integrate(f(x,y,z),x),y),z))
show(integrate(integrate(integrate(f(x,y,z),x,0,1),y,-1,2),z,0,3))
```

$\frac{1}{12}x^2y^2z^3$

$\frac{27}{4}$

Escolhemos integrar primeiro em relação a x, depois em relação a y e então em relação a z

Referências

[1] STEWART, J. Cálculo, volume 2(7 edição). Tradução EZ2 Translate São Paulo : Cengage Learning, 2013.

[2] BARD, Gregory V. Sage para Estudiantes de Pregrado. Cochabamba: Sagemath, 2014. Tradução de: Diego Sejas Viscarra.