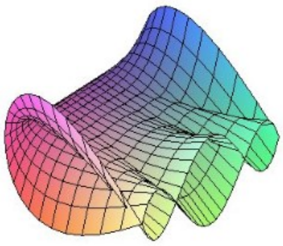


Cálculo Diferencial e Integral:
um kit de sobrevivência
"SageMath"

Ester Heloisa Bento.
Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Martins.

Integrais

Veremos sobre duas formas de integrais: **integral definida** e a **integral indefinida**

De uma forma geral, a integral indefinida de uma função f é conhecida como sendo a primitiva de f. Em outras palavras, a integral indefinida representa toda uma família de funções que são diferenciadas por uma constante C.

Primitiva de uma Função: Seja f uma função definida num intervalo I. Uma *primitiva* de f em I é uma função F definida em I, tal que $F(x)' = f(x)$.

Integral Indefinida: O conjunto de todas as primitivas de$f$ em I recebe o nome de *integral indefinida* de f e será denotada por

$$\int f(x)\ dx = F(x) + C$$

onde $F(x)' = f(x)$ e C é uma constante arbitrária.

A integral definida pode ser interpretada como a área resultante de uma região. Além disso, ela é um valor em seu resultado final, ou seja, não depende da variável x podendo esta ser trocada por qualquer outra variável sem a alteração do valor da integral.

Integral de Riemann: Seja f uma função definida em$[a, b]$ e L um número real. Dizemos que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(c_i) \triangle x_i$ tende a L, quando $||P|| = max\{\triangle x_i\} \to 0$, e escrevemos:

$$\lim_{||P|| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \triangle x_i = L$$

se para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ que só dependa de ϵ mas não da particular escolha de c_i, tal que

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \triangle x_i - L \right| < \epsilon$$

para toda partição P de $[a, b]$, com $||P|| = \delta$

Tal número L, que quando existe é único, demonina-se integral(de Riemann) de f em $[a, b]$ e indica-se por $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx$, então por definição:

$$\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{||P|| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \triangle x_i \ \text{, sendo } ||P|| = max\{\triangle x_i\}$$

Se $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx$ existe, então diremos que f é integrável(segundo Riemann) em $[a, b]$, ou que a integral definida de f em $[a, b]$ existe.

Pomos, ainda, por definição

$$\int_a^b f(x)\ dx = 0 \text{ e } \int_a^b f(x)\ dx = -\int_b^a f(x)\ dx \ \text{, sendo } a < b.$$

Teorema fundamental do Cálculo: Se f é integrável em$[a, b]$ e se F é qualquer primitiva de f em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a).$$

Integrais no SageMath

Para facilitar, você pode copiar as áreas em azul, colar no SageMath e substituir as informações em verde pelas informações que você tem, como a função, o ponto, o intervalo etc.

- Para calcular a Integral Indefinida de uma função devemos:
  $f(x) =$defina $f(x)$
  i=integrate(f(x),x) ou podemos ainda usar i=integral(f(x),x)
  i.show()

- Podemos calcular a Integral Definida no intervalo $[a, b]$
  $f(x) =$defina $f(x)$
  i=integrate(f(x),x,a, b) ou podemos ainda usar i=integral(f(x),x,a, b)
  i.show()

- Podemos determinar a área entre o gráfico de $y = f(x)$ e o eixo x no intervalo$[a, b]$:
  Definimos: $f(x) =$defina $f(x)$
  Determimanos as raizes de f: solve(f,x)
  As raizes vão dividir o intervalo $[a, b]$ em subintervalos. E vamos calcular a integral de f

em cada subintervalo:
show(integral(f(x),x,a,$subintervalo$ 1))
show(integral(f(x),x,$subintervalo$ 1,$subintervalo$ 2))
show(integral(f(x),x,$subintervalo$ 2,b))
E por fim, vamos somar os valores absolutos das integrais: abs(integral(f(x),x,$subintervalo$ 2,b)+ abs(integral(f(x),x,$subintervalo$ 1,$subintervalo$ 2))+ abs(integral(f(x),x,$subintervalo$ 2,b))

- Podemos plotar o gráfico da função e mostrar a área ocupada por ela:
  $f(x)$ =defina $f(x)$
  P = plot($f(x)$,x,a,b,fill=true)
  P

Exemplo 1

Calcule a Intergral Indefinida da função $f(x) = 3x^7 - 8x$.

In [1]:
```
f(x) =  3*x^8-8*x
i=integrate(f(x),x)
i.show()
```

$$\frac{1}{3}x^9 - 4x^2$$

Exemplo 2

Vamos calcular a Integral Definida da função $f(x) = cos(x)$ no intervalo $[0, \pi]$:

In [1]:
```
f(x) =  cos(x)
i=integrate(f(x),x,0,pi)
i
```

Out[1]: 0

Exemplo 3

Determinemos a área da região entre o eixo x e o gráfico de $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$, sendo $-1 \leq x \leq 2$

In [1]:
```
f(x) = x^3-x^2-2*x
solve(f,x)
```

Out[1]: [x == 2, x == -1, x == 0]

In [2]:
```
show(integral(f,x,-1,0))
```

$$\frac{5}{12}$$

In [3]:
```
show(integral(f,x,0,2))
```

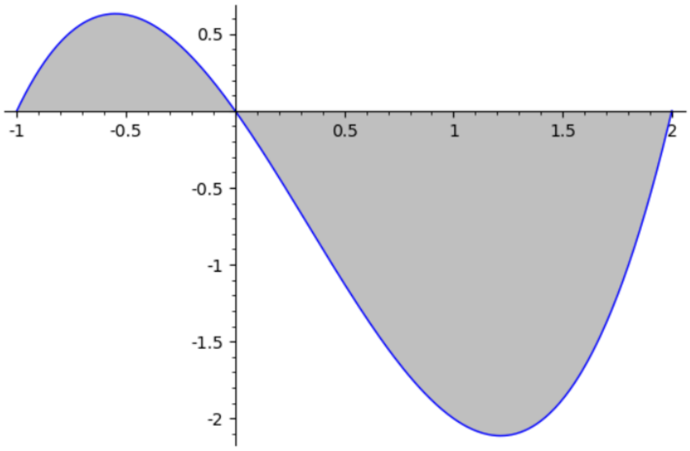
$$-\frac{8}{3}$$

In [4]:
```
abs(integral(f,x,-1,0))+abs(integral(f,x,0,2))
```

Out[4]: 37/12

In [2]:
```
f(x) =x^3-x^2-2*x
P = plot(f(x),x,-1,2,fill=true)
P
```

Out[2]:



Referências

[1] GUIDORIZZI, H. L. Um curso de cálculo. 5. ed. Rio de Janeiro: Ltc, 2001. 1 v.

[2] Sage, Manual de referencias do sage 9.1. Disponível em: <https://doc.sagemath.org/html/en/reference/plotting/sage/plot/plot.html> Acesso em: 07 de outubro de 2020.