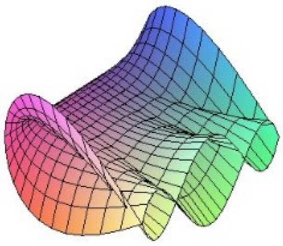


Cálculo Diferencial e Integral: um kit de sobrevivência "SageMath"

Vitória Vendramini Gongora.
Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Martins.

Funções Contínuas:

Uma maneira intuitiva de pensar na função contínua é lembrar que é aquela que não possui “quebras”em seu gráfico. Podemos ter funções contínuas em um ponto e em um intervalo. Vamos observar a definição formal para cada um dos casos.

Definição: Uma funçao f é contínua em um número a se $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Em outras palavras, para uma função f ser contínua no ponto a ele deve:

i . $a \in D_f$;

ii . $\lim_{x \to a} f(x)$ existe (não sendo infinito);

iii . $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Se um ou mais dos tópicos acima não forem satisfeitos chamamos essa função de descontínua em a.

Definição: Uma funçao f será contínua em um intervalo se for contínua em todos os números do intervalo. (Se f for definida somente de um lado do extremo do intervalo, entendemos continuidade no extremo como continuidade à direita ou à esquerda.)

(Para essas definições e mais: Referência [1], pg. 147, 149)

Exemplos com o SageMath:

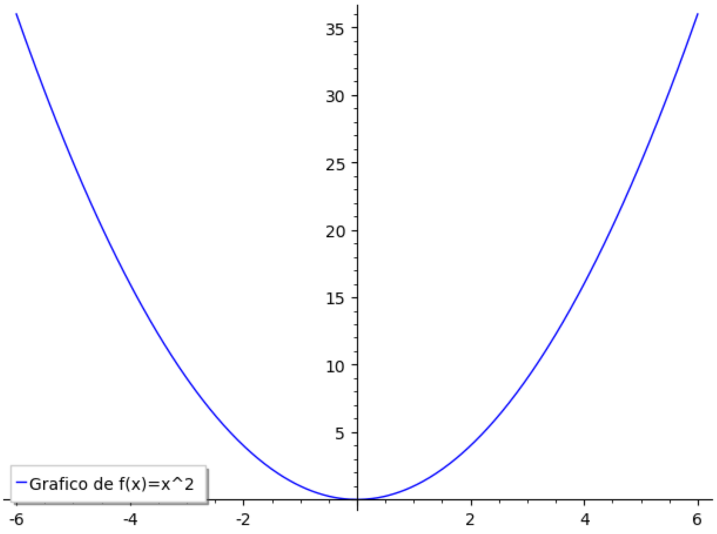
Exemplo 1

Vamos obserar se a função $f(x) = x^2$ é contínua no ponto $x = 3$.

```
In [1]: limit(x**2, x=3)
Out[1]: 9

In [2]: f(x)=x**2
        f(3)
Out[2]: 9

In [4]: plot(x**2, -6,6, legend_label='Grafico de f(x)=x^2')
Out[4]:
```



Como auxílio do SageMath podemos ver que:

$$\lim_{x \to 3} x^2 = 9 = f(3).$$

Assim, pela definição de função contínua em um ponto a, a função $f(x) = x^2$ é contínua no ponto $x = 3$.

Exemplo 2

Agora vamos analisar a função g, onde,

$$g(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \leq 3, \\ x^2, & \text{se } x > 3. \end{cases} \tag{1}$$

- A função $g(x)$ é contínua no ponto $x = 1$?

```
In [1]: limit(x, x=1)
Out[1]: 1

In [2]: g = True

        while g:

            x = int(input("Entre com o valor de x: "))

            if ( x <= 3 ):
                print("g(%(x)d) = %(x)d" % {"x": x, "x":x} )

            if ( x > 3 ):
                final = ( x ** 2)
                print("g(%(x)d) = %(x)d^2 " % {"x": x, "x": x})
                print("g(%(x)d) = %(final)d" % {"x": x, "final":final})

            if input("Iniciar novamente? [s]im [n]ao: ") == "n":
                g = False
        print (exit)

        Entre com o valor de x: 1
        g(1) = 1
        Iniciar novamente? [s]im [n]ao: n
        <IPython.core.autocall.ZMQExitAutocall object at 0x6fffe6df208>

In [ ]:
```

Observe que:

$$\lim_{x \to 1} g(x) = 1 = g(1)$$

Logo $g(x)$ é contínua no ponto $x = 1$.

- A função g(x) é contínua no ponto $x = 3$?

  Para calcular o limite no ponto $x = 3$ temos que analisar os limites laterais no ponto 3.

```
In [3]: limit(x, x=3, dir='left')
Out[3]: 3

In [4]: limit(x**2, x=3, dir='right')
Out[4]: 9

In [ ]:
```

Note que os limtes laterais no ponto $x = 3$ são diferentes, logo

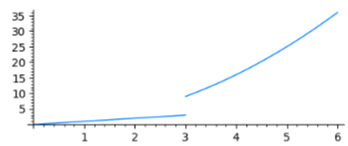
$$\lim_{x \to 3} g(x) = \nexists$$

portanto, $g(x)$ é descontínua no ponto $x = 3$.

- E no intervalo $[1, 4]$?

  Seguindo a definição dada, para uma função ser contínua em um intervalo ela deve ser contínua em todo ponto pertencente ao intervalo.
  O ponto $x = 3 \in [1, 4]$ e já vimos que $g(x)$ é descontínua no ponto $x = 3$, assim, $g(x)$ é descontínua no intervalo $[1, 4]$. Podemos ver essa descontinuidade no gráfico de $g(x)$.

```
In [2]: g = piecewise( [ [(-infinity,3),x], [[3,3],x], [(3,infinity),x^2] ] )
        show( plot( g, 0, 6, figsize=[4.5,2], color=(0,.5,1), exclude=[3] ) )
```




```
In [ ]:
```

Observação

Segue a explicação detelhada de como foi construida a função por partes $g(x)$. Em azul estão resentado os comados que precisam ser digitados no SageMath, exatamente daquela maneira, e em preto a explicação.

Código	Significado/Resultado
g= True	A função com nome g está definida como “true”(verdadeira).
while g:	Ou seja, enquanto g for verdadeira.
x=int(input(”Entre com o valor de x:”))	A variável x é igual à um número inteiro “INT”e definimos o valor dela com “INPUT”, nesse caso entrará o valor de x que queremos achar $g(x)$.
if (x <= 3):	Se $x \leq 3$.
print(”g(%(x)d) = %(x)d”% {”x”: x })	Mostre $g(x) = x$, o %(x)d faz com que esse x seja o que você deifiniu anteriormente ,ou seja, o valor de x no qual queremos achar $g(x)$.
if (x > 3):	Se $x > 3$.
final = (x ** 2)	Definimos a variável “final”que calcula x^2.
print(”g(%(x)d) = %(x)d∧2 ”% {”x”:x})	Mostrará $g(x) = x^2$.
print(”g(%(x)d) = %(final)d”% {”x”:x, ”final”:final})	Mostrará $g(x)$=final, sendo “final” a variável que definimos antes como x^2.
if input(”Iniciar novamente? [s]im [n]ao: ”) == ”n”:	Perguntamos se deseja-se calcular $g(x)$ para outro valor de x, se a resposta for “n” ele definirá g como falsa.
g = False	Definimos g como falsa, logo, não queremos mais calcular g.
print (exit)	

Referências

[1] Stewart, J. (2006). Cálculo, vol. 1, 5ª edição. Editora Thompson.

[2] BARD,G. V. Sage para Estudiantes de Pregrado. Cochabamba: Sagemath, 2014. Tradução de: Diego Sejas Viscarra. Disponível em < http://www.sage-para-estudiantes.com/ >. Acesso: 17/08/20