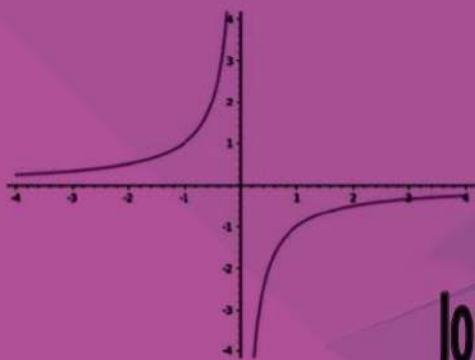




JEEPEMA

Jornal eletrônico de Ensino e Pesquisa de matemática

Cálculo

Diferencial

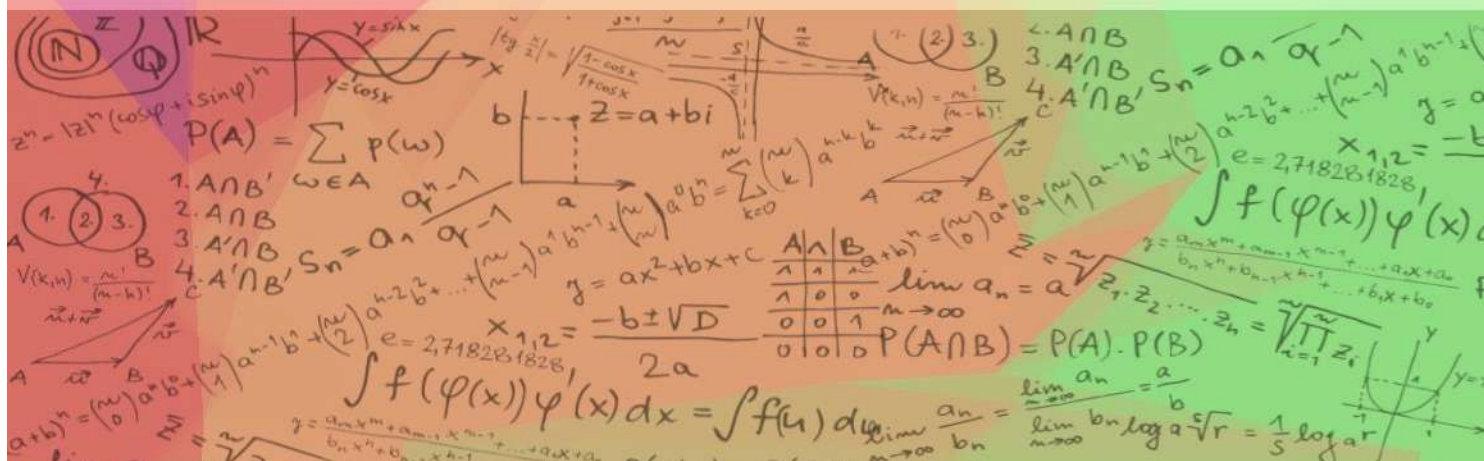
Integral:

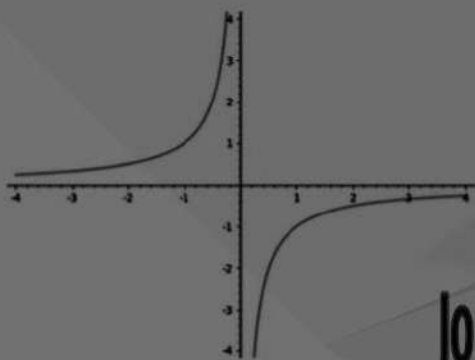


Exercícios • Apostilas • Resoluções • Vídeos Aulas •



um kit de sobrevivência!





JEEP EMA

Jornal eletrônico de Ensino e Pesquisa de matemática

Cálculo

Diferencial

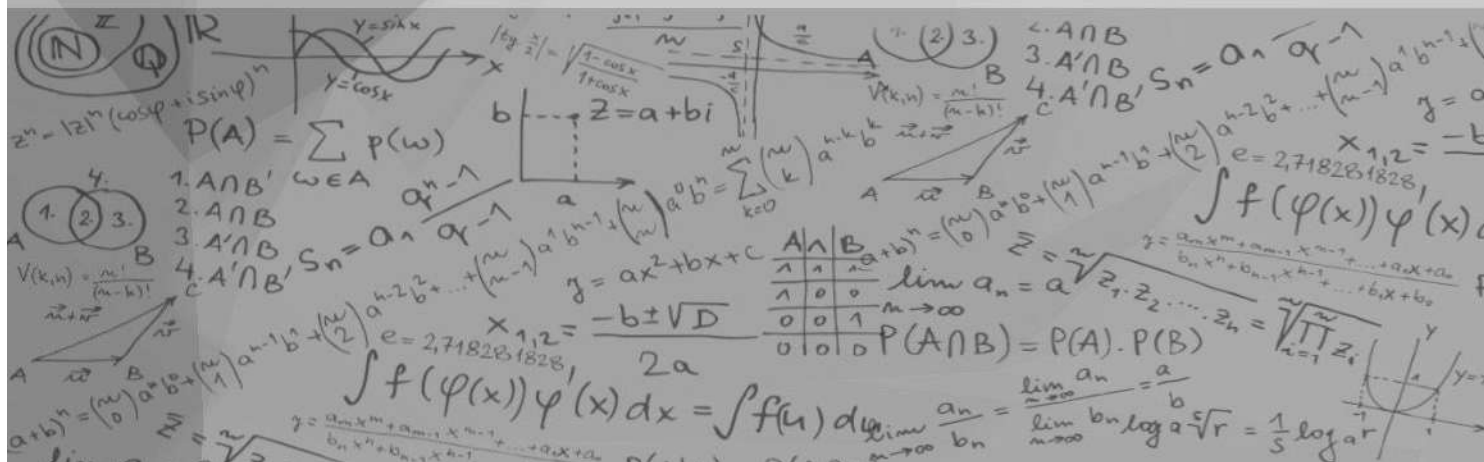
INTEGRAL



Exercícios • Apostilas • Resoluções • Vídeos Aulas •



um kit de sobrevivência!

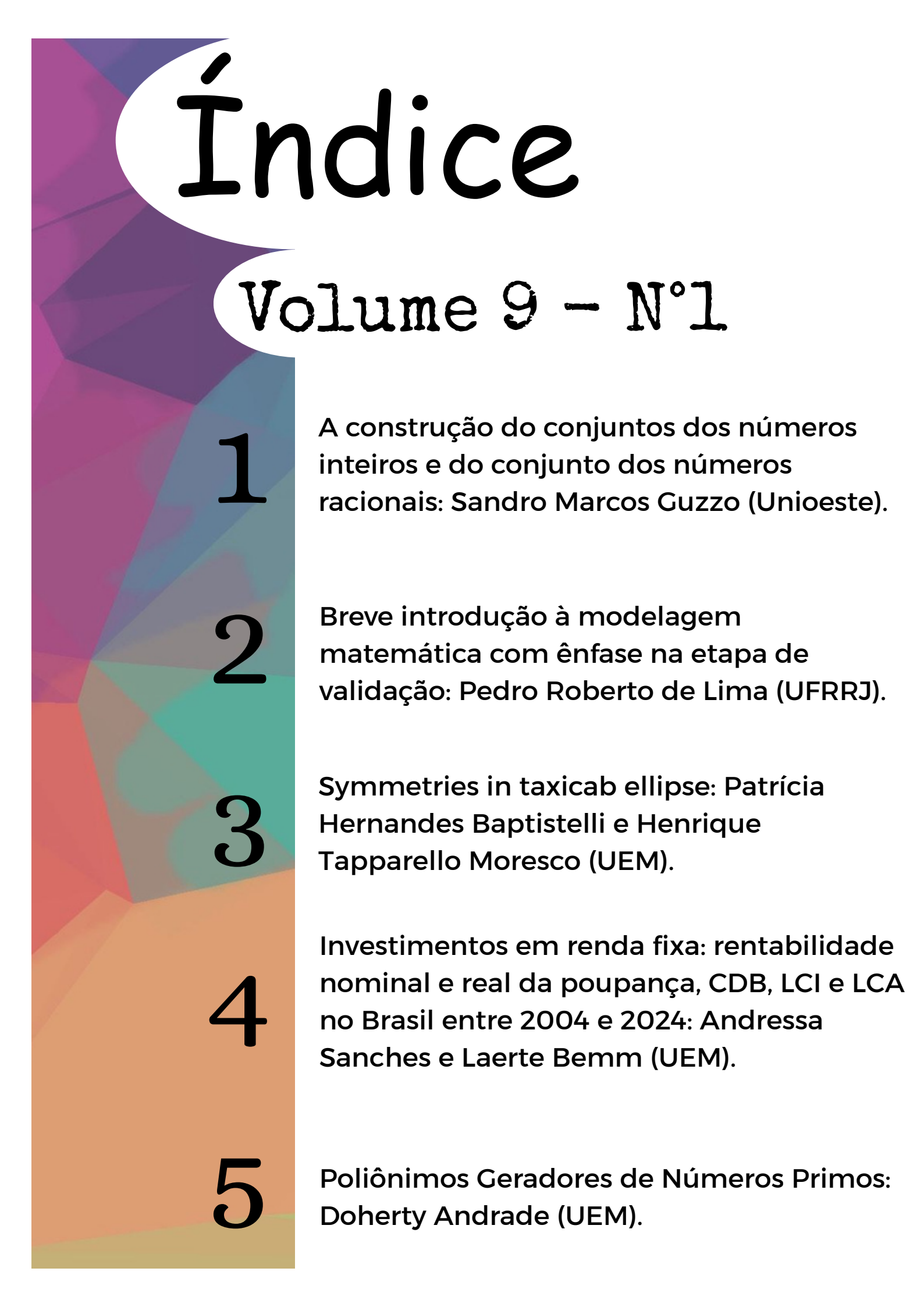


Aline E. de Medeiros	- editora assistente
Laerte Bemm	- editor assistente (DMA - UEM)
Doherty Andrade	- editor assistente
Marcela Duarte Ferrari	- editora assistente (DMA - UEM)
Rodrigo Martins	- editor chefe (DMA - UEM)
Rafaela Mayumi da S. Fuzioka	- identidade visual
Isadora Honório Guimarães	- identidade visual

Jornal Eletrônico de Ensino de Matemática - JEEPEMA
Universidade Estadual de Maringá, Maringá-PR - Brasil
ISSN: 2594-6323
DOI: 10.4025/jeepema

Vol. 9 N° 1 / 113 páginas - Julho/2025

Palavras-chave: Números inteiros; Classes de equivalência; Modelagem matemática; Equações diferenciais; non-Euclidean geometry; taxicab ellipse; Rentabilidade Nominal e Real; Simulações Financeiras; Comparação de Investimentos; Polinômios; Números Primos.



Índice

Volume 9 – N°1

1

A construção do conjuntos dos números inteiros e do conjunto dos números racionais: Sandro Marcos Guzzo (Unioeste).

2

Breve introdução à modelagem matemática com ênfase na etapa de validação: Pedro Roberto de Lima (UFRRJ).

3

Symmetries in taxicab ellipse: Patrícia Hernandes Baptistelli e Henrique Tapparello Moresco (UEM).

4

Investimentos em renda fixa: rentabilidade nominal e real da poupança, CDB, LCI e LCA no Brasil entre 2004 e 2024: Andressa Sanches e Laerte Bemm (UEM).

5

Poliônimos Geradores de Números Primos: Doherty Andrade (UEM).



A construção do conjunto dos números inteiros e do conjunto dos números racionais

Sandro Marcos Guzzo – Email: smguzzo@gmail.com

Resumo: A construção dos conjuntos numéricos é um assunto clássico na matemática, bem como o estudo das propriedades das operações definidas sobre estes conjuntos. Em geral, em um primeiro curso de álgebra ou de análise real, comumente oferecido aos alunos dos cursos de graduação em matemática, os estudantes se familiarizam com a construção dos conjuntos dos números inteiros, dos números racionais e dos números reais. Neste trabalho usaremos o conjunto dos números naturais para construir o conjunto dos números inteiros e o conjunto dos números racionais. Também, definiremos a adição e a multiplicação nestes conjuntos e provaremos as propriedades que tornam o conjunto dos números inteiros um anel de integridade e o conjunto dos números racionais um corpo.

Palavras-chave: Números inteiros; Números racionais; Classes de equivalência.

1. Introdução

A construção dos conjuntos numéricos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ é parte da ementa das disciplinas de álgebra e/ou análise real de muitos cursos de graduação em matemática. Assumindo a existência do conjunto dos números naturais, pode-se construir o conjunto dos números inteiros, e verificar que este novo conjunto é um anel de integridade sob as operações de adição e multiplicação nele definidas. De posse do conjunto dos números inteiros pode-se construir o conjunto dos números racionais, e verificar que este novo conjunto é um corpo sob as operações de adição e multiplicação.

A abordagem clássica para estas duas construções é o uso de relações de equivalência e classes de equivalência. Ao leitor com pouca familiaridade com estes dois conceitos recomendamos (DOMINGUES HYGINO H. & IEZZI, 1982).

Neste texto temos o objetivo de construir os conjuntos dos números inteiros e dos números racionais, a partir do conjunto dos números naturais. Esta construção segue as ideias mencionadas em (SAH, 1967).

Vamos considerar conhecido o conjunto dos números naturais. O conjunto dos números

naturais, neste texto, será considerado

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

e dotado de duas operações $+$ e $\cdot$, chamadas respectivamente de adição e de multiplicação, sobre as quais incidem as seguintes propriedades para quaisquer $m, n, r \in \mathbb{N}$:

- i)* (Comutatividade de $+$) $m + n = n + m$,
- ii)* (Associatividade de $+$) $(m + n) + r = m + (n + r)$,
- iii)* (Existência de elemento neutro para $+$) $m + 0 = 0 + m = m$,
- iv)* (Lei do cancelamento para $+$) Se $a + m = a + n$ então $m = n$,
- v)* (Comutatividade de $\cdot$) $m \cdot n = n \cdot m$,
- vi)* (Associatividade de $\cdot$) $(m \cdot n) \cdot r = m \cdot (n \cdot r)$,
- vii)* (Existência de elemento neutro para $\cdot$) $m \cdot 1 = 1 \cdot m = m$,
- viii)* (Distributividade de $\cdot$ em relação a $+$) $m \cdot (n + r) = m \cdot n + m \cdot r$,
- ix)* $m \cdot n = 0$ se e somente se $m = 0$ ou $n = 0$,
- x)* (Lei do cancelamento para $\cdot$) Se $a \cdot m = a \cdot n$ e $a \neq 0$ então $m = n$.

O conjunto dos números naturais é também dotado de uma relação de ordem total. A notação $m < n$ significa que m precede n , ou que n sucede m , pela relação de ordem. Escrevemos $m \leq n$ para dizer que $m < n$ ou $m = n$. Mais precisamente, a relação é dada por

$$a \leq b \quad \Leftrightarrow \quad a + k = b, \quad \text{para algum } k \in \mathbb{N},$$

e

$$a < b \quad \Leftrightarrow \quad a + k = b, \quad \text{para algum } k \in \mathbb{N} - \{0\}.$$

Neste texto (e comumente na matemática) usaremos a notação de multiplicação subentendida. Escreveremos simplesmente mn para representar $m \cdot n$. Escreveremos também $\mathbb{N}^*$ para representar $\mathbb{N} - \{0\}$.

2. Construção do conjunto dos números inteiros

A ideia da construção do conjunto dos números inteiros é definir um número inteiro como sendo a diferença entre dois números naturais. Assim, se $z \in \mathbb{Z}$ então $z = a - b$ para $a, b \in \mathbb{N}$. Dois problemas aqui ocorrem. Primeiro a diferença não é uma operação sobre o conjunto dos números naturais, e então para contornar isto, o número inteiro z será associado a um par (a, b) com $a, b \in \mathbb{N}$. A ideia é que este par represente o número $a - b$. O segundo problema é que, desta forma, um número inteiro z pode ser escrito de muitas maneiras como diferença de dois números naturais, e então temos que trabalhar com classes de equivalência.

Vamos aos detalhes técnicos desta construção. Considerando o conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, definimos a relação $\approx$ dada por

$$(a, b) \approx (x, y) \quad \text{se, e somente se,} \quad a + y = x + b.$$

Aqui, $+$ é a operação de adição de números naturais, sobre a qual incidem as propriedades citadas anteriormente. Vamos mostrar que $\approx$ é uma relação de equivalência. Dado qualquer $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, temos claramente que $a + b = a + b$, donde $(a, b) \approx (a, b)$. A relação é então reflexiva. Sejam agora $(a, b), (x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, tais que $(a, b) \approx (x, y)$. Da definição da relação temos que $a + y = x + b$ e claramente isto significa também que $x + b = a + y$ donde $(x, y) \approx (a, b)$. A relação é também simétrica. Agora, sejam $(a, b), (x, y), (m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tais que $(a, b) \approx (x, y)$ e $(x, y) \approx (m, n)$, isto é $a + y = x + b$ e $x + n = m + y$. Das propriedades da adição de números naturais, podemos deduzir que $a + y + n = (a + y) + n = (x + b) + n = (x + n) + b = (m + y) + b = m + y + b$. Pela lei do cancelamento de números naturais pela operação de adição, temos que $a + n = b + m$, donde $(a, b) \approx (m, n)$ e a relação é transitiva. Segue que $\approx$ é uma relação de equivalência sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Consideremos o conjunto quociente de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ pela relação $\approx$, isto é, o conjunto de todas as classes de equivalência determinadas pela relação $\approx$ em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Seja então

$$\mathbb{Z} = \frac{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}{\approx} = \left\{ \overline{(a, b)}; \quad (a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \right\}.$$

O conjunto $\mathbb{Z}$ será, deste ponto em diante, chamado de conjunto dos números inteiros, e um elemento deste conjunto é um número inteiro, ou simplesmente um inteiro. Lembremos ainda que $\overline{(a, b)} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}; \quad (x, y) \approx (a, b)\}$, e como já sabemos,

$$\overline{(a, b)} = \overline{(x, y)} \quad \Leftrightarrow \quad (a, b) \in \overline{(x, y)} \quad \Leftrightarrow \quad (a, b) \approx (x, y) \quad \Leftrightarrow \quad a + y = x + b.$$

Definiremos em $\mathbb{Z}$ duas operações chamadas de adição (ou soma) e multiplicação (ou

produto) representadas respectivamente por $+$ e $\cdot$, e dadas por

$$\overline{(a, b)} + \overline{(x, y)} = \overline{(a + x, b + y)},$$

e

$$\overline{(a, b)} \cdot \overline{(x, y)} = \overline{(ax + by, ay + bx)}.$$

Aqui, estamos usando no segundo membro destas definições, a notação $+$ para designar a adição de números naturais, e a notação ax para designar a multiplicação $a \cdot x$ de números naturais.

Em primeiro lugar temos que verificar que a adição e a multiplicação de números inteiros estão bem definidas. Isto porque no primeiro membro da definição, temos uma classe $\overline{(a, b)}$ que é na verdade um conjunto de vários elementos relacionados entre si por $\approx$, enquanto no segundo membro temos os elementos a e b . Isto significa que usamos o par (a, b) como representante da classe $\overline{(a, b)}$, e precisamos ter certeza que esta escolha não afeta as operações.

Proposição 2.1. *As operações $+$ e $\cdot$ definidas no conjunto dos números inteiros, não dependem da escolha do representante das classes.*

Demonstração: Sejam $(a, b), (c, d), (x, y), (z, w) \in \mathbb{Z}$, de forma que $(a, b) \approx (c, d)$ e $(x, y) \approx (z, w)$. Da definição da relação temos que $a + d = b + c$ e também $x + w = y + z$. Segue que

$$(a + x) + (d + w) = (a + d) + (x + w) = (c + b) + (y + z) = (c + z) + (b + y),$$

donde $(a + x, b + y) \approx (c + z, d + w)$, ou ainda, $\overline{(a + x, b + y)} = \overline{(c + z, d + w)}$. Então

$$\overline{(a, b)} + \overline{(x, y)} = \overline{(a + x, b + y)} = \overline{(c + z, d + w)} = \overline{(c, d)} + \overline{(z, w)},$$

e a adição está bem definida. Também, temos que

$$(a + d)x + (c + b)y + c(x + w) + d(y + z) = (c + b)x + (a + d)y + c(y + z) + d(x + w),$$

ou

$$ax + dx + cy + by + cx + cw + dy + dz = cx + bx + ay + dy + cy + cz + dx + dw.$$

Da lei do cancelamento para a adição de números naturais, resta que

$$ax + by + cw + dz = bx + ay + cz + dw,$$

ou ainda,

$$(ax + by) + (cw + dz) = (cz + dw) + (ay + bx),$$

e da definição da relação temos que,

$$\overline{(ax + by, ay + bx)} = \overline{(cz + dw, cw + dz)},$$

donde segue que,

$$\overline{(a, b)} \cdot \overline{(x, y)} = \overline{(ax + by, ay + bx)} = \overline{(cz + dw, cw + dz)} = \overline{(c, d)} \cdot \overline{(z, w)},$$

e a multiplicação também está bem definida. ■

Vamos agora mostrar propriedades importantes sobre as operações $+$ e $\cdot$ no conjunto $\mathbb{Z}$. Propriedades estas que fazem deste conjunto um anel de integridade.

Proposição 2.2. *A adição de números inteiros é associativa e comutativa.*

Demonstração: Dados então $\overline{(a, b)}, \overline{(x, y)}, \overline{(m, n)} \in \mathbb{Z}$ arbitrários, temos que

$$\begin{aligned} \overline{(a, b)} + \left(\overline{(x, y)} + \overline{(m, n)} \right) &= \overline{(a, b)} + \overline{(x + m, y + n)} \\ &= \overline{(a + (x + m), b + (y + n))} = \overline{((a + x) + m, (b + y) + n)} \\ &= \overline{(a + x, b + y)} + \overline{(m, n)} = \left(\overline{(a, b)} + \overline{(x, y)} \right) + \overline{(m, n)}, \end{aligned}$$

que mostra que a adição é associativa. Também

$$\overline{(a, b)} + \overline{(x, y)} = \overline{(a + x, b + y)} = \overline{(x + a, y + b)} = \overline{(x, y)} + \overline{(a, b)},$$

mostrando que a adição é comutativa. ■

Proposição 2.3. *A adição admite um elemento neutro em $\mathbb{Z}$.*

Demonstração: Queremos encontrar um elemento $0_{\mathbb{Z}} = \overline{(x, y)} \in \mathbb{Z}$ que deve satisfazer a igualdade $\overline{(a, b)} + \overline{(x, y)} = \overline{(x, y)} + \overline{(a, b)} = \overline{(a, b)}$ para todos $\overline{(a, b)} \in \mathbb{Z}$. Como a adição é comutativa, vamos nos preocupar apenas com uma das igualdades. A outra será consequência direta da comutatividade.

A classe $\overline{(x, y)}$ procurada deve satisfazer então $\overline{(a + x, b + y)} = \overline{(a, b)}$. Da definição de classe de equivalência, temos $(a + x, b + y) \approx (a, b)$ e da definição da relação, segue que x e y devem satisfazer $a + x + b = b + y + a$. Da lei do cancelamento da adição de números naturais,

temos que $x = y$. Ou seja, $0_{\mathbb{Z}} = \overline{(x, y)}$ é uma classe de equivalência, onde os representantes são pares ordenados com coordenadas iguais. De fato, dado qualquer $n \in \mathbb{N}$, e qualquer $\overline{(a, b)} \in \mathbb{Z}$, temos que $(a + n) + b = a + (b + n)$, donde $\overline{(a + n, b + n)} = \overline{(a, b)}$, e disto, temos

$$\overline{(n, n)} + \overline{(a, b)} = \overline{(a + n, b + n)} = \overline{(a, b)}.$$

Segue portanto que $0_{\mathbb{Z}} = \overline{(n, n)}$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$. ■

O elemento $0_{\mathbb{Z}}$ da Proposição anterior, será representado apenas por 0 e chamado de zero.

Teorema 2.4. *Todo número inteiro admite simétrico para a operação de adição.*

Demonstração: Dado $\overline{(a, b)} \in \mathbb{Z}$ queremos mostrar que existe $\overline{(x, y)} \in \mathbb{Z}$ que satisfaz $\overline{(a, b)} + \overline{(x, y)} = \overline{(x, y)} + \overline{(a, b)} = 0 = \overline{(n, n)}$ qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$. Vamos mostrar apenas a última igualdade e a comutatividade da adição garantirá a primeira igualdade.

Queremos então que $\overline{(x, y)} \in \mathbb{Z}$ satisfaça $\overline{(x + a, y + b)} = \overline{(n, n)}$, que pela igualdade de classes de equivalência significa que $x + a + n = y + b + n$. Da definição da relação, esta última igualdade significa que $(x, y) \approx (b, a)$ e então $\overline{(x, y)} = \overline{(b, a)}$. Assim,

$$\overline{(x, y)} + \overline{(a, b)} = \overline{(b, a)} + \overline{(a, b)} = \overline{(a + b, b + a)} = 0.$$

Segue que todo elemento $\overline{(a, b)} \in \mathbb{Z}$ possui simétrico para a operação de adição e este elemento simétrico é precisamente o elemento $\overline{(b, a)}$. ■

O elemento simétrico $\overline{(b, a)}$, simétrico de $\overline{(a, b)}$ é chamado também de oposto de $\overline{(a, b)}$ e representado por $-\overline{(a, b)}$.

Proposição 2.5. *A multiplicação de números inteiros é associativa, comutativa e distributiva em relação à adição.*

Demonstração: Suponha então $\overline{(a, b)}, \overline{(x, y)}, \overline{(m, n)} \in \mathbb{Z}$ arbitrários. Então

$$\begin{aligned} \overline{(a, b)} \cdot \left(\overline{(x, y)} \cdot \overline{(m, n)} \right) &= \overline{(a, b)} \cdot \overline{(xm + yn, xn + ym)} \\ &= \overline{(a(xm + yn) + b(xn + ym), a(xn + ym) + b(xm + yn))} \\ &= \overline{(axm + ayn + bxn + bym, axn + aym + bxm + byn)} \\ &= \overline{((ax + by)m + (ay + bx)n, (ax + by)n + (ay + bx)m)} \\ &= \overline{(ax + by, ay + bx)} \cdot \overline{(m, n)} = \left(\overline{(a, b)} \cdot \overline{(x, y)} \right) \cdot \overline{(m, n)}, \end{aligned}$$

mostrando a associatividade da multiplicação.

Para a comutatividade, também temos que

$$\overline{(a, b)} \cdot \overline{(x, y)} = \overline{(ax + by, ay + bx)} = \overline{(xa + yb, ya + xb)} = \overline{(x, y)} \cdot \overline{(a, b)},$$

que prova a comutatividade da multiplicação.

Para a distributividade, temos que

$$\begin{aligned} \overline{(a, b)} \cdot \left(\overline{(x, y)} + \overline{(m, n)} \right) &= \overline{(a, b)} \cdot \overline{(x + m, y + n)} \\ &= \overline{(a(x + m) + b(y + n), a(y + n) + b(x + m))} \\ &= \overline{(ax + am + by + bn, ay + an + bx + bm)} \\ &= \overline{(ax + by, ay + bx)} + \overline{(am + bn, an + bm)} \\ &= \overline{(a, b)} \cdot \overline{(x, y)} + \overline{(a, b)} \cdot \overline{(m, n)}. \end{aligned}$$

A distributividade da multiplicação pela adição pela direita segue diretamente da comutatividade da multiplicação. ■

Proposição 2.6. *A multiplicação admite elemento neutro em $\mathbb{Z}$.*

Demonstração: Queremos encontrar um elemento $1_{\mathbb{Z}} = \overline{(x, y)} \in \mathbb{Z}$ de forma que $\overline{(a, b)} \cdot \overline{(x, y)} = \overline{(x, y)} \cdot \overline{(a, b)} = \overline{(a, b)}$, para qualquer $\overline{(a, b)} \in \mathbb{Z}$. Da igualdade desejada, $\overline{(a, b)} \cdot \overline{(x, y)} = \overline{(a, b)}$, temos que, $\overline{(xa + yb, xb + ya)} = \overline{(a, b)}$. Da definição de classe de equivalência, $(xa + yb, xb + ya) \approx (a, b)$ e da definição da relação segue que x e y devem satisfazer $ax + by + b = a + bx + ay$, ou ainda, $ax + b(y + 1) = a(y + 1) + bx$.

Esta última igualdade fica cumprida colocando $x = y + 1$ para quaisquer que sejam $a, b \in \mathbb{N}$. Desta forma, temos que $1_{\mathbb{Z}} = \overline{(x, y)} = \overline{(n + 1, n)}$ qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$. De fato, dado $n \in \mathbb{N}$, como $an + a + bn + b = bn + b + an + a$ da definição da relação temos que $\overline{(an + a + bn, bn + b + an)} = \overline{(a, b)}$, donde

$$\overline{(a, b)} \cdot \overline{(n + 1, n)} = \overline{(an + a + bn, bn + b + an)} = \overline{(a, b)},$$

provando que $\overline{(n + 1, n)}$ é o elemento neutro pela direita para a multiplicação. Da comutatividade da multiplicação, segue que este elemento é também elemento neutro pela esquerda. ■

Claro que o representante mais simples da classe $\overline{(n + 1, n)}$ é o elemento $\overline{(1, 0)}$ e deste ponto em diante, o elemento $1_{\mathbb{Z}} = \overline{(n + 1, n)} = \overline{(1, 0)}$ será representado simplesmente por 1 e chamado de unidade de $\mathbb{Z}$.

Proposição 2.7. *O conjunto $\mathbb{Z}$ não possui divisores próprios de 0, isto é, se $\overline{(a,b)} \cdot \overline{(x,y)} = 0$ então $\overline{(a,b)} = 0$ ou $\overline{(x,y)} = 0$.*

Demonstração: Sejam $\overline{(a,b)}, \overline{(x,y)} \in \mathbb{Z}$, tais que $\overline{(a,b)} \cdot \overline{(x,y)} = 0 = \overline{(n,n)}$, e suponha que $\overline{(a,b)} \neq \overline{(n,n)}$. Consequentemente $a + n \neq b + n$, isto é, $a \neq b$. Temos então que $\overline{(ax + by, bx + ay)} = \overline{(n,n)}$, e então $(ax + by, bx + ay) \approx (n, n)$. Da definição da relação, segue que $ax + by + n = bx + ay + n$, ou ainda, $ax + by = bx + ay$. Como $a \neq b$, restam ainda dois casos exclusivos.

Caso 1: $a < b$. Existe então $k \in \mathbb{N}^*$, tal que $a + k = b$, e usando este fato temos que $ax + (a + k)y = (a + k)x + ay$, e pela lei do cancelamento de números naturais para a adição, vem $ky = kx$. Esta por sua vez, pela lei do cancelamento de números naturais não nulos para a multiplicação nos leva a $y = x$, isto é, $\overline{(x,y)} = \overline{(y,y)} = 0$.

Caso 2: $b < a$. Neste caso $a = b + k$ para algum $k \in \mathbb{N}^*$. Substituindo em $ax + by = bx + ay$, chegamos a $(b + k)x + by = bx + (b + k)y$ e pelas mesmas leis de cancelamento citadas no caso 1, temos também que $x = y$. Segue aqui também que $\overline{(x,y)} = \overline{(y,y)} = 0$. ■

Esta última Proposição garante que o conjunto $\mathbb{Z}$ é um anel de integridade, dito anel de integridade dos números inteiros. O conjunto dos números inteiros não é um corpo, e portanto este é o ponto máximo que podemos chegar no sentido da estrutura algébrica deste conjunto. Contudo ainda mostraremos a lei do cancelamento de elementos não nulos para a multiplicação.

Proposição 2.8. *Se $\overline{(a,b)}, \overline{(x,y)}, \overline{(z,w)} \in \mathbb{Z}$ tais que $\overline{(a,b)} \cdot \overline{(x,y)} = \overline{(a,b)} \cdot \overline{(z,w)}$ e $\overline{(a,b)} \neq 0$ então $\overline{(x,y)} = \overline{(z,w)}$.*

Demonstração: Suponha então $\overline{(a,b)}, \overline{(x,y)}, \overline{(z,w)} \in \mathbb{Z}$ satisfazendo $\overline{(a,b)} \neq 0 = \overline{(n,n)}$, e portanto $a + n \neq b + n$, ou ainda $a \neq b$, e também

$$\overline{(a,b)} \cdot \overline{(x,y)} = \overline{(a,b)} \cdot \overline{(z,w)}.$$

Segue desta última igualdade que

$$\overline{(ax + by, ay + bx)} = \overline{(az + bw, aw + bz)},$$

ou ainda

$$ax + by + aw + bz = ay + bx + az + bw. \tag{1}$$

Como $a \neq b$ vamos ainda considerar dois casos exclusivos.

Caso 1: ($a < b$). Neste caso $a + k = b$ para algum $k \in \mathbb{N}^*$. Logo, de (1) temos que

$$ax + ay + ky + aw + az + kz = ay + ax + kx + az + aw + kw,$$

e da lei do cancelamento para a soma de números naturais, temos $k(y + z) = k(x + w)$ e usando a lei do cancelamento para o produto de números naturais não nulos, segue que $y + z = x + w$ ou ainda $(x, y) \approx (z, w)$ e isto significa que $\overline{(x, y)} = \overline{(z, w)}$.

Caso 2: ($a > b$). Agora $b + k = a$ para algum $k \in \mathbb{N}^*$, e com isto em (1) obtemos a igualdade

$$bx + kx + by + bw + kw + bz = by + ky + bx + bz + kz + bw,$$

e das leis do cancelamento segue (como no caso 1) que $y + z = x + w$ e portanto $\overline{(x, y)} = \overline{(z, w)}$. ■

3. Construção do conjunto dos números racionais

Nesta seção construiremos o corpo dos números racionais a partir do anel de integridade dos números inteiros. A ideia da construção do conjunto dos números racionais é definir um número racional como sendo o quociente entre dois números inteiros. Assim, se $q \in \mathbb{Q}$ então $q = \frac{m}{n}$ para $m, n \in \mathbb{Z}$ com $n \neq 0$. Dois problemas aqui ocorrem. Primeiro a divisão não é uma operação sobre o conjunto dos números inteiros, e então para contornar isto, o número racional q será associado a um par (m, n) com $m, n \in \mathbb{Z}$ e $n \neq 0$. A ideia é que este par represente o número $\frac{m}{n}$. O segundo problema é que, desta forma, um número racional q pode ser escrito de muitas maneiras como quociente de dois números inteiros, e então temos que trabalhar com classes de equivalência.

Vamos aos detalhes técnicos da construção. Considerando o conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, definimos a relação $\approx$ dada por

$$(a, b) \simeq (x, y) \quad \text{se, e somente se,} \quad ay = xb.$$

Notemos que:

i) para qualquer $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, como a multiplicação em $\mathbb{Z}$ é comutativa, $ab = ba$ e da definição da relação, segue que $(a, b) \simeq (a, b)$, para todo $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, mostrando que $\simeq$ é reflexiva.

ii) Dados (a, b) e (c, d) em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ com $(a, b) \simeq (c, d)$, temos da definição que $ad = bc$ e como $\mathbb{Z}$ é comutativo, temos que $cb = da$, o que significa que $(c, d) \simeq (a, b)$, mostrando que $\simeq$ é simétrica.

iii) Se $(a, b), (c, d), (e, f) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ satisfazem $(a, b) \simeq (c, d)$ e $(c, d) \simeq (e, f)$, então $ad = bd$ e $cf = de$. Assim,

$$afd = adf = bcf = bde = bed,$$

e como $d \neq 0$ então $af = be$ e da definição da relação, tem-se que $(a, b) \simeq (e, f)$, mostrando que $\simeq$ é transitiva.

Dos fatos (i), (ii) e (iii) temos que $\simeq$ é uma relação de equivalência em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, e portanto estabelece uma forma de estimar quando dois elementos deste conjunto são equivalentes.

Desta forma, $\overline{(a, b)}$ representa a classe de equivalência do elemento $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$. Isto é, $\overline{(a, b)} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*; (x, y) \simeq (a, b)\}$. Note que a expressão $\overline{(a, b)}$ denota um conjunto, e não um só elemento. $\overline{(a, b)}$ é o conjunto de todos os elementos que são equivalentes ao par (a, b) , pela relação de equivalência $\simeq$.

Consideremos $\frac{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*}{\simeq}$, o conjunto de todas as classes de equivalência determinadas por $\simeq$, e denotemos este conjunto por $\mathbb{Q}$. Então

$$\mathbb{Q} = \left\{ \overline{(a, b)}; \quad a \in \mathbb{Z}, \quad b \in \mathbb{Z}^* \right\}.$$

Vamos agora dotar este conjunto de duas operações e mostrar que com estas operações este conjunto tem estrutura de corpo. Observe que estas operações serão definidas exatamente como as operações usuais de soma e produto de frações no conjunto dos números reais.

Definimos em $\mathbb{Q}$ as operações $+$ e $\cdot$, chamadas respectivamente de adição e multiplicação, dadas por

$$\overline{(a, b)} + \overline{(x, y)} = \overline{(ay + bx, by)} \quad \text{e} \quad \overline{(a, b)} \cdot \overline{(x, y)} = \overline{(ax, by)},$$

para quaisquer $\overline{(a, b)}, \overline{(x, y)} \in \mathbb{Q}$. Observe que as operações envolvidas no segundo membro de cada igualdade, são as operações definidas no conjunto $\mathbb{Z}$ e portanto satisfazem as propriedades já provadas em $\mathbb{Z}$.

Nosso primeiro trabalho é verificar que estas operações em $\mathbb{Q}$ estão bem definidas. Como estamos fazendo operações com classes de equivalência, poderíamos perguntar se ao operarmos um elemento $\overline{(a, b)}$ podemos escolher qualquer um dos representantes desta classe, isto é, se $(a, b) \simeq (x, y)$ então $\overline{(a, b)} + \overline{(c, d)} = \overline{(x, y)} + \overline{(c, d)}$, qualquer que seja $\overline{(c, d)} \in \mathbb{Q}$. Vamos provar que se $(a, b) \simeq (x, y)$ então é irrelevante usar $\overline{(a, b)}$ ou $\overline{(x, y)}$ na adição e na multiplicação.

Proposição 3.1. *As operações $+$ e $\cdot$ definidas como acima, não dependem da escolha do representante das classes.*

Demonstração: Sejam $\overline{(a, b)}, \overline{(c, d)}, \overline{(x, y)}, \overline{(z, w)} \in \mathbb{Q}$, tais que $(a, b) \simeq (x, y)$ e $(c, d) \simeq$

(z, w) . Então, da definição de $\simeq$ temos $ay = bx$ e $cw = dz$. Assim, temos

$$\begin{aligned}(ad + bc)(yw) &= (adyw) + (bcyw) = (aydw) + (bycw) \\ &= (bxdw) + (bydz) = (xwbd) + (yzbd) = (xw + yz)(bd)\end{aligned}$$

e portanto, da definição da relação, $(ad + bc, bd) \simeq (xw + yz, yw)$, isto é, $\overline{(a, b)} + \overline{(c, d)} = \overline{(x, y)} + \overline{(z, w)}$.

Para a multiplicação, temos então,

$$acyw = aycw = bxdz = bdxz,$$

donde segue da definição da relação, que $(ac, bd) \simeq (xz, yw)$, e então, $\overline{(a, b)} \cdot \overline{(c, d)} = \overline{(x, y)} \cdot \overline{(z, w)}$. Portanto as operações $+$ e $\cdot$ não dependem do representante escolhido para cada uma das classes envolvidas. ■

Proposição 3.2. *A adição em $\mathbb{Q}$ é associativa e comutativa.*

Demonstração: Vamos mostrar que os axiomas da definição de corpo são todos satisfeitos. Dados quaisquer $\overline{(a, b)}, \overline{(x, y)}, \overline{(m, n)} \in \mathbb{Q}$, temos

$$\begin{aligned}\left(\overline{(a, b)} + \overline{(x, y)}\right) + \overline{(m, n)} &= \overline{(ay + bx, by)} + \overline{(m, n)} \\ &= \overline{((ay + bx)n + bym, byn)} \\ &= \overline{(ayn + bxn + bym, byn)} \\ &= \overline{(ayn + b(xn + ym), byn)} \\ &= \overline{(a, b)} \cdot \overline{(xn + ym, yn)} = \overline{(a, b)} \cdot \left(\overline{(x, y)} \cdot \overline{(m, n)}\right),\end{aligned}$$

e também,

$$\begin{aligned}\overline{(a, b)} + \overline{(x, y)} &= \overline{(ay + bx, by)} \\ &= \overline{(xb + ya, yb)} = \overline{(x, y)} + \overline{(a, b)},\end{aligned}$$

o que mostra que $+$ é associativa e comutativa. ■

Proposição 3.3. *A adição em $\mathbb{Q}$ admite elemento neutro.*

Demonstração: Queremos agora obter $0_{\mathbb{Q}} = \overline{(x, y)}$, tal que

$$\overline{(a, b)} + \overline{(x, y)} = \overline{(x, y)} + \overline{(a, b)} = \overline{(a, b)},$$

para todos $\overline{(a, b)} \in \mathbb{Q}$. Nestes termos $x, y \in \mathbb{Z}$ devem satisfazer

$$\overline{(ay + bx, by)} = \overline{(a, b)},$$

ou equivalentemente

$$(ay + bx, by) \simeq (a, b).$$

Da definição da relação deve então ocorrer que

$$(ay + bx)b = bya,$$

e assim,

$$ayb + bxb = bya,$$

donde $bxb = 0$.

Mas como $b \neq 0$, então segue que $x = 0$. Desta forma, o elemento $\overline{(x, y)}$ procurado é precisamente $\overline{(x, y)} = \overline{(0, y)}$. A escolha de $y \in \mathbb{Z}^*$ é irrelevante, já que dados $y_1, y_2 \in \mathbb{Z}^*$, temos que $(0, y_1) \simeq (0, y_2)$ e portanto $\overline{(0, y_1)} = \overline{(0, y_2)}$.

Notemos então que dado qualquer $\overline{(a, b)} \in \mathbb{Q}$ e $y \in \mathbb{Z}^*$, temos que

$$\overline{(a, b)} + \overline{(0, y)} = \overline{(ay + b \cdot 0, by)} = \overline{(ay, by)} = \overline{(a, b)},$$

já que $(ay, by) \simeq (a, b)$. Sendo a adição comutativa, vale também que $\overline{(a, b)} + \overline{(0, y)} = \overline{(0, y)} + \overline{(a, b)} = \overline{(a, b)}$. Segue portanto que $0_{\mathbb{Q}} = \overline{(0, y)}$ é o elemento neutro para a adição em $\mathbb{Q}$, qualquer que seja $y \in \mathbb{Z}^*$. Observe ainda que

$$\overline{(x, y)} = 0_{\mathbb{Q}} \quad \text{se e somente se} \quad x = 0.$$

■

Deste ponto em diante usaremos apenas o símbolo 0 para designar o elemento neutro $0_{\mathbb{Q}}$ e chamaremos este elemento de zero.

Proposição 3.4. *Todo elemento de $\mathbb{Q}$ admite simétrico para a operação de adição.*

Demonstração: Dado $\overline{(a, b)} \in \mathbb{Q}$ arbitrário, queremos agora obter $-\overline{(a, b)} = \overline{(x, y)} \in \mathbb{Q}$,

de forma que

$$\overline{(a, b)} + \overline{(x, y)} = \overline{(x, y)} + \overline{(a, b)} = 0 = \overline{(0, n)},$$

qualquer que seja $n \in \mathbb{Z}^*$. Os elementos $x, y \in \mathbb{Z}$ devem então satisfazer

$$\overline{(ay + bx, by)} = \overline{(0, n)},$$

ou ainda,

$$(ay + bx, by) \simeq (0, n),$$

e da definição da relação,

$$(ay + bx)n = by \cdot 0 = 0.$$

Como $n \neq 0$ então temos que $ay + bx = 0$ ou ainda $xb = bx = -(ay) = (-a)y$, e da definição da relação $(x, y) \simeq (-a, b)$ e portanto $\overline{(x, y)} = \overline{(-a, b)} \in \mathbb{Q}$. O elemento $\overline{(-a, b)}$ cumpre portanto a igualdade

$$\overline{(a, b)} + \overline{(-a, b)} = \overline{(-a, b)} + \overline{(a, b)} = \overline{(0, bb)} = 0,$$

donde todo $\overline{(a, b)} \in \mathbb{Q}$ é simetrizável sendo o seu simétrico o elemento $-\overline{(a, b)} = \overline{(-a, b)}$. Podemos ver também que $\overline{(-a, b)} = \overline{(a, -b)}$, já que $(-a, b) \simeq (a, -b)$ e portanto

$$-\overline{(a, b)} = \overline{(-a, b)} = \overline{(a, -b)},$$

qualquer que seja $\overline{(a, b)} \in \mathbb{Q}$.

■

Proposição 3.5. *A multiplicação em $\mathbb{Q}$ é associativa, comutativa e distributiva em relação à adição.*

Demonstração: Sejam $\overline{(a, b)}, \overline{(x, y)}, \overline{(m, n)} \in \mathbb{Q}$ arbitrários. Então

$$\begin{aligned} \left(\overline{(a, b)} \cdot \overline{(x, y)} \right) \cdot \overline{(m, n)} &= \overline{(ax, by)} \cdot \overline{(m, n)} \\ &= \overline{((ax)m, (by)n)} \\ &= \overline{(a(xm), b(yn))} \\ &= \overline{(a, b)} \cdot \overline{(xm, yn)} = \overline{(a, b)} \cdot \left(\overline{(x, y)} \cdot \overline{(m, n)} \right), \end{aligned}$$

e também,

$$\overline{(a, b)} \cdot \overline{(x, y)} = \overline{(ax, by)} = \overline{(xa, yb)} = \overline{(x, y)} \cdot \overline{(a, b)},$$

mostrando que $\cdot$ é também associativa e comutativa. Para a distributividade, temos que

$$\begin{aligned}
 \overline{(a, b)} \cdot \left(\overline{(x, y)} + \overline{(m, n)} \right) &= \overline{(a, b)} \cdot \overline{(xn + ym, yn)} \\
 &= \overline{(a(xn + ym), b(yn))} \\
 &= \overline{(axn + aym, byn)} \\
 &= \overline{(b(axn + aym), bbyn)} \\
 &= \overline{(axbn + byam, (by)(bn))} \\
 &= \overline{(ax, by)} + \overline{(am, bn)} \\
 &= \left(\overline{(a, b)} \cdot \overline{(x, y)} \right) + \left(\overline{(a, b)} \cdot \overline{(m, n)} \right),
 \end{aligned}$$

donde a multiplicação é distributiva em relação à adição pela esquerda. Também vale a distributividade pela direita em virtude da comutatividade da multiplicação. Segue que $\cdot$ é distributiva em relação a $+$. ■

Proposição 3.6. *A multiplicação admite elemento neutro em $\mathbb{Q}$.*

Demonstração: Para mostrar que $\mathbb{Q}$ possui elemento neutro para a multiplicação, queremos obter $1_{\mathbb{Q}} = \overline{(x, y)} \in \mathbb{Q}$ de forma que

$$\overline{(a, b)} \cdot \overline{(x, y)} = \overline{(x, y)} \cdot \overline{(a, b)} = \overline{(a, b)},$$

para todo $\overline{(a, b)} \in \mathbb{Q}$. Os elementos $x, y \in \mathbb{Z}$ devem então satisfzer

$$\overline{(ax, by)} = \overline{(a, b)},$$

e portanto

$$(ax, by) \simeq (a, b),$$

e da definição da relação segue que $axb = bya$. Como $b \neq 0$ segue que $ax = ya$, e novamente da definição da relação $(x, y) \simeq (a, a)$ donde $\overline{(x, y)} = \overline{(a, a)}$. Evidentemente esta escolha para $\overline{(x, y)}$ só pode ser feita quando $a \neq 0$.

O caso em que $a = 0$ não afeta a procura por $\overline{(x, y)}$ já que no caso em que $a = 0$, então $\overline{(0, by)} = \overline{(0, y)}$, já que $(0, by) \simeq (0, y)$, e desta forma é imediato que

$$\overline{(0, b)} \cdot \overline{(x, y)} = \overline{(0 \cdot x, by)} = \overline{(0, by)} = \overline{(0, y)},$$

para qualquer escolha de $\overline{(x, y)}$.

Desta forma, para qualquer $n \in \mathbb{Z}^*$ podemos verificar que $\overline{(n, n)} \in \mathbb{Q}$ cumpre

$$(an, bn) \simeq (a, b),$$

e portanto

$$\overline{(a, b)} \cdot \overline{(n, n)} = \overline{(an, bn)} = \overline{(a, b)},$$

para todo $\overline{(a, b)} \in \mathbb{Q}$. Da comutatividade da multiplicação, segue também que $\overline{(n, n)} \cdot \overline{(a, b)} = \overline{(a, b)}$. Portanto o elemento neutro para a multiplicação em $\mathbb{Q}$ é o elemento $1_{\mathbb{Q}} = \overline{(n, n)}$ qualquer que seja $n \in \mathbb{Z}^*$. ■

O elemento neutro para a multiplicação em $\mathbb{Q}$, representado por $1_{\mathbb{Q}}$, será representado apenas por 1 e chamado de unidade de $\mathbb{Q}$.

Proposição 3.7. *Todo elemento não nulo de $\mathbb{Q}$ admite simétrico para a multiplicação.*

Demonstração: Consideremos $\overline{(a, b)} \in \mathbb{Q}$ com $\overline{(a, b)} \neq 0$ e portanto $a \neq 0$. Queremos obter $\overline{(a, b)}^{-1} = \overline{(x, y)} \in \mathbb{Q}$ de forma que

$$\overline{(a, b)} \cdot \overline{(x, y)} = \overline{(x, y)} \cdot \overline{(a, b)} = 1 = \overline{(n, n)},$$

qualquer que seja $n \in \mathbb{Z}^*$. Os elementos $x, y \in \mathbb{Z}$ devem então satisfazer

$$\overline{(ax, by)} = \overline{(n, n)},$$

ou ainda

$$(ax, by) \simeq (n, n),$$

e da definição da relação temos que $axn = byn$. Como $n \neq 0$ então segue que $ax = by$, e da definição da relação $(x, y) \simeq (b, a)$. Desta forma,

$$\overline{(x, y)} = \overline{(b, a)},$$

e como $a \neq 0$, então $\overline{(b, a)} \in \mathbb{Q}$. Podemos então ver que dado $\overline{(a, b)} \in \mathbb{Q}$ com $a \neq 0$, então $\overline{(b, a)} \in \mathbb{Q}$ cumpre

$$\overline{(a, b)} \cdot \overline{(b, a)} = \overline{(ab, ba)} = 1.$$

Da comutatividade da operação $\cdot$ temos também que $\overline{(b, a)} \cdot \overline{(a, b)} = 1$. Segue que todo elemento não nulo $\overline{(a, b)} \in \mathbb{Q}$ admite simétrico para a operação de multiplicação, sendo $\overline{(b, a)} \in \mathbb{Q}$ o inverso, isto é, $\overline{(a, b)}^{-1} = \overline{(b, a)}$. ■

O elemento $\overline{(a, b)}^{-1} = \overline{(b, a)}$, será chamado de inverso do elemento não nulo $\overline{(a, b)} \neq 0$.

Decorre portanto, que $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ tem estrutura de corpo. O corpo $\mathbb{Q}$ é então chamado de corpo dos números racionais.

Conclusões

Como pretendido, construímos o conjunto dos números inteiros mostrando que é um anel de integridade e o conjunto dos números racionais mostrando que é um corpo.

Embora tenhamos considerado o conjunto dos números naturais, cabe ressaltar que é possível construir este conjunto também a partir dos chamados Axiomas de Peano. O leitor interessado nesta construção pode consultar (SAH, 1967). Outras construções sobre os conjuntos dos números inteiros e dos números racionais podem ainda ser feitas, como por exemplo, a construção de uma relação de ordem nestes conjuntos. O passo seguinte deste processo é a construção do corpo dos números reais, que pode ser construído de várias maneiras. Para a construção do conjunto dos números reais pelo método das sequências de Cauchy recomendamos (MONTEIRO, 1978), pelo método dos Cortes de Dedekind recomendamos (GUIDORIZZI, 2001) e pelo método dos Quase-Homomorfismos recomendamos (STREET, 1985). Pode-se ainda avançar com a construção do corpo dos números complexos e depois do conjunto dos quatérnios. Sobre o conjunto dos quatérnios recomendamos (GUZZO SANDRO M. & TOSTI, 2017).

Referências

- 1 DOMINGUES HYGINO H. & IEZZI, Gelson. **Álgebra Moderna**. 2. ed. São Paulo: Editora Atual, 1982. P. 283.
- 2 GUIDORIZZI, Hamilton L. **Um curso de cálculo. Volume 1**. 5. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2001. P. 635.
- 3 GUZZO SANDRO M. & TOSTI, Náisa C. G. Funções elementares no conjunto dos quatérnios: Abordagem por série de potências. **Jeepema - Jornal Eletrônico de Ensino e Pesquisa de Matemática**, v. 1, n. 1, p. 44–98, 2017.
- 4 MONTEIRO, L. H. Jacy. **Elementos de Álgebra**. 2. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1978. P. 552.
- 5 SAH, Chih-Han. **Abstract algebra**. 1. ed. New York: Academic Press, 1967. P. 342.
- 6 STREET, Ross. An efficient construction of the real numbers. **Gazette of the Australian Mathematical Society**, v. 12, n. 12, p. 57–58, 1985.



Breve introdução à modelagem matemática com ênfase na etapa da validação

Pedro Roberto de Lima – Email: pedrorobertodelima@ufrrj.br

Resumo: Fazendo uso das equações diferenciais, este texto apresenta uma breve introdução à modelagem matemática com ênfase na etapa da validação – a qual, ao confrontar previsões teóricas com resultados experimentais, mostra o modelo “em funcionamento” se revelando, desta forma, uma etapa bastante interessante para finalidades didáticas.

Palavras-chave: Modelagem matemática, Validação, Equações diferenciais, Ensino de matemática.

1. Introdução

1.1. Considerações iniciais

Em muitas situações, é necessário responder questões sobre determinados fenômenos do mundo real. Por exemplo: Qual é a distância máxima que um projétil disparado pode atingir? A maneira mais direta de tentar obter uma resposta para essa pergunta é realizando experimentos concretos e observando os seus efeitos. Assim, pode-se realizar disparos em diferentes ângulos e observar a distância atingida (veja a Figura 1).

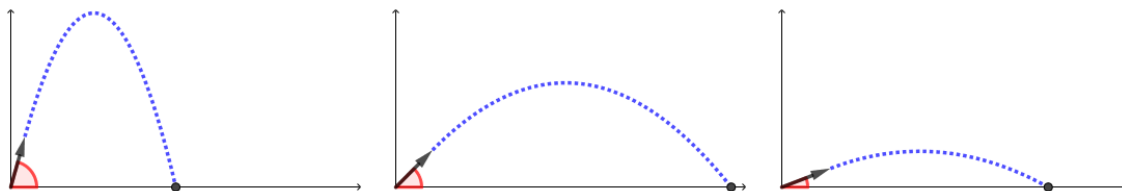


Figura 1: Disparos realizados a partir de ângulos distintos. Fonte: Elaborada pelo autor.

Porém, o interesse pode estar em conclusões gerais que vão além das condições particulares do experimento. Por exemplo, pode haver interesse em determinar a distância máxima seja qual for a velocidade inicial – mas um experimento produzirá conclusões válidas apenas para a velocidade específica utilizada no experimento realizado. Além disso, em certos casos pode não ser possível realizar experimentos. Por exemplo, pode haver interesse em determinar como evolui o número de infecções causadas por um novo vírus que ataca humanos – mas

uma situação assim não pode ser experimentada. Assim, experimentos concretos não são a maneira mais viável de produzir conclusões sobre certos fenômenos do mundo real. O objetivo desta exposição é introduzir uma maneira alternativa, bastante eficiente e muito utilizada: a modelagem matemática.

1.2. O que é modelagem matemática?

Seguindo [Banasiak \(s.d.\)](#), [Banerjee \(2014\)](#), [Bender \(1978\)](#), [Eck, Garcke e Knabner \(2017\)](#), [Fulford, Forrester e Jones \(1997\)](#) e [Giordano, Fox e Horton \(2014\)](#), é possível conceituar a modelagem matemática como segue.

Definição 1.1 *Um **modelo matemático** é uma descrição matemática simplificada de um fenômeno específico do mundo real. A **modelagem matemática** é um processo que compreende a criação e o estudo de um modelo matemático com a finalidade de tirar conclusões sobre algum problema do mundo real.*

A ideia central da modelagem matemática é destacada por [Bassanezi \(2002\)](#) e [Meerschaert \(2013\)](#), conforme segue.

A modelagem matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real ([BASSANEZI, 2002](#)).

Mathematical modeling is the link between mathematics and the rest of the world. You ask a question. You think a bit, and then you refine the question, phrasing it in precise mathematical terms. Once the question becomes a mathematics question, you use mathematics to find an answer. Then finally (and this is the part that too many people forget), you have to reverse the process, translating the mathematical solution back into a comprehensible, no-nonsense answer to the original question. Some people are fluent in English, and some people are fluent in calculus. We have plenty of each. We need more people who are fluent in both languages and are willing and able to translate. These are the people who will be influential in solving the problems of the future ([MEERSCHAERT, 2013](#)).

É importante observar que modelagem matemática não é sinônimo de problema contextualizado ([BLISS; FOWLER; GALLUZZO, 2014](#)). Considere, por exemplo, os seguintes problemas:

1. A população de uma cidade é composta por 20.000 pessoas e 35% delas reciclam suas garrafas de plástico. Se cada pessoa usa 2 garrafas por semana, quantas garrafas são recicladas por semana nessa cidade?

2. Quanto plástico é reciclado na sua cidade?

A Tabela 1 traça uma comparação entre os problemas acima, destacando algumas características fundamentais dos problemas de modelagem matemática – geralmente ausentes em problemas contextualizados comuns.

	Problema 1	Problema 2
Enunciado	Fornece todas as informações necessárias.	Aparenta não fornecer informações suficientes.
Resolução	Basta executar os cálculos apropriados para obter “a” resposta correta.	É necessário matemática e criatividade para obter “uma” resposta.
Abordagem	Não convida a examinar se o cenário é realístico. Assume que a informação dada será aceita e os cálculos necessários serão efetuados.	É necessário estudar a situação por conta própria, fazer as próprias hipóteses e traçar a própria estratégia de resolução.
Natureza	Não é um problema de modelagem.	É um problema de modelagem.

Tabela 1: Comparação entre os problemas 1 e 2. Fonte: Elaborada pelo autor com base na discussão de [Bliss, Fowler e Galluzzo \(2014\)](#).

2. Etapas da modelagem matemática

2.1. Descrição

A modelagem matemática é um processo composto de várias etapas, as quais podem diferir de um autor para outro. Entretanto, extraindo as principais etapas de [Bassanezi \(2002\)](#), [Fulford, Forrester e Jones \(1997\)](#), [Giordano, Fox e Horton \(2014\)](#) e [Velten \(2009\)](#), é possível sintetizá-las da seguinte forma:

1. **Análise da literatura:** Fazer uma análise minuciosa da literatura existente para verificar se existem registros de investigações similares das quais se possa tirar proveito.
2. **Elaboração de hipóteses:** Identificar as variáveis mais relevantes para o problema e então fazer hipóteses sobre a maneira como elas se relacionam. Essa etapa:
 - Envolve simplificar o problema original de modo a enfatizar os atributos prováveis de serem os mais importantes.
 - Geralmente é a mais difícil requerendo criatividade e, muitas vezes, a intuição e a experiência de especialistas.

3. **Formulação matemática:** Introduzir símbolos para representar as variáveis e então escrever as hipóteses em forma de expressões matemáticas. (Em muitas situações, essa etapa acaba produzindo equações diferenciais ou equações de diferenças.)
4. **Resolução:** Resolver/estudar as equações e interpretar as respostas obtidas como afirmações sobre o problema original. Essa etapa:
 - Muitas vezes, só pode ser viabilizada por meio de métodos computacionais (os quais geralmente podem fornecer apenas uma solução aproximada).
 - Pode falhar se as equações forem muito complicadas para serem resolvidas. Nesse caso, deve-se retornar à Etapa 2 e tentar simplificar as hipóteses a fim de obter equações mais fáceis de resolver.
 - Pode gerar o desenvolvimento de novas técnicas matemáticas, caso as técnicas conhecidas não sejam suficientes para fornecer soluções.
5. **Validação:** Verificar se os resultados obtidos são razoáveis e, se possível, se eles concordam com dados experimentais. Essa etapa pode mostrar que os resultados produzidos pelo modelo:
 - Se ajustam bem a resultados experimentais reais; nesse caso, o modelo está pronto para uso.
 - Não se ajustam satisfatoriamente a resultados experimentais reais; nesse caso, deve-se retornar à Etapa 2 e tentar tornar as hipóteses mais realísticas.
6. **Uso:** Usar os resultados fornecidos pelo modelo para influenciar o mundo real (fazer previsões, tomar decisões, explicar fenômenos, etc.).
7. **Modificação:** Ajustar o modelo para contemplar possíveis mudanças no problema original e/ou fatores que se tornaram importantes, mas que haviam sido previamente desprezados. Conforme [Bassanezi \(2002\)](#): “Nenhum modelo deve ser considerado definitivo, podendo sempre ser melhorado”.

As etapas da modelagem matemática, e as principais inter-relações entre elas, podem ser representadas esquematicamente como na Figura 2.

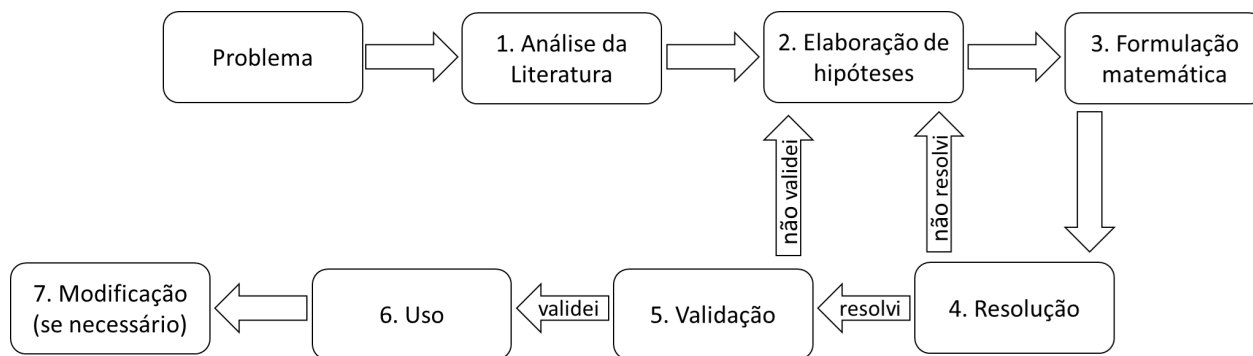


Figura 2: Ciclo da Modelagem Matemática. Fonte: Elaborada pelo autor.

Na prática, o modelo matemático é construído na etapa da formulação matemática. [Velten \(2009\)](#), [Segel e Edelstein-Keshet \(2013\)](#) e [Nachbin e Tabak \(1997\)](#) ajudam na compreensão de quando ele pode ser considerado “bom”, conforme segue.

The best model is the simplest model that still serves its purpose, that is, which is still complex enough to help us understand a system and to solve problems ([VELTEN, 2009](#)).

A model can be regarded as a caricature of a real system. An excellent caricature sums up the physiognomy of an important individual in a few key lines: the essence is captured and detail neglected. Concentration on the essential is a central feature of a good model ([SEGEL; EDELSTEIN-KESHET, 2013](#)).

O “pulo do gato”, que exige experiência, é saber como simplificar um modelo o suficiente para que possamos resolvê-lo com um esforço razoavelmente pequeno, mas ao mesmo tempo deixá-lo “rico” o bastante para que fenômenos de interesse possam ser simulados através do modelo final. Note que um modelo “pobre” é aquele que não serve para simular nada além do trivial. É nesse ponto que se torna importante a colaboração com especialistas de outras áreas (por exemplo, dependendo do problema, um físico ou químico ou biólogo etc ...) para interagir na questão da modelagem e saber o que devemos “buscar” e qual a nossa meta final ([NACHBIN; TABAK, 1997](#)).

2.2. Exemplo

O objetivo desta seção é exemplificar as etapas da modelagem matemática por meio da modelagem do “arremesso de peso” – uma modalidade do atletismo em que os atletas competem para arremessar uma bola de metal o mais longe possível. Nesse sentido, o seguinte problema será considerado: *Como aprimorar os lançamentos no arremesso de peso?*

1. **Análise da literatura.** Uma análise da literatura existente sobre o tema demonstra que o problema ilustrativo acima proposto é conhecido e bem estudado: conforme [Linthorne \(2001\)](#), o ângulo ótimo de lançamento no arremesso de peso oscila em torno de 31° . Assim sendo, a análise da literatura já é capaz de fornecer informações relevantes para a resolução do problema. Por exemplo, pode-se utilizar a informação mencionada sobre o ângulo ótimo para direcionar o treino dos atletas.

Observação 2.1 *Como o objetivo desta seção é ilustrar as etapas da modelagem matemática, em vez de fazer um aprofundamento na análise da literatura existente (como seria feito numa situação prática real), será suposto que o problema é inédito e as demais etapas serão visitadas.*

2. **Elaboração de hipóteses.** O estudo do problema revela que as principais variáveis aparentam ser as seguintes:

- Velocidade inicial da bola.
- Altura inicial da bola.
- Ângulo de lançamento da bola.
- Massa da bola.
- Posição da bola.
- Forças que agem sobre a bola.

Nesse contexto, parece ser razoável fazer as seguintes hipóteses:

- As variáveis se relacionam obedecendo as leis da mecânica newtoniana (pois esta é a teoria mais apropriada para explicar e prever o movimento de corpos macroscópicos com baixas velocidades).
- O movimento é bidimensional: a bola se desloca para frente, para cima e para baixo, mas não para as laterais.
- A única força que age na bola é a gravidade (forças devidas a outros fatores como resistência do ar, possíveis ventos e obstáculos estão sendo desprezadas).

Observação 2.2 *Numa situação prática real, pode ser que nem todas as variáveis e hipóteses relevantes sejam identificadas de imediato. Alternativamente, pode ser que alguma hipótese assumida se revele muito restritiva ou de difícil manipulação do ponto de vista matemático. Nessas situações, o conjunto de variáveis e hipóteses deve ser ajustado posteriormente conforme a necessidade seja percebida durante a execução das demais etapas.*

3. **Formulação matemática.** É conveniente começar estabelecendo notações para as variáveis identificadas:

- v_0 = velocidade inicial.
- h = altura inicial.
- θ = ângulo de lançamento.
- m = massa da bola.
- $P(t)$ = posição no instante t ; $P(t) = (x(t), y(t))$.
- F_R = força resultante; $F_R = (F_x, F_y)$.

Agora, deve-se equacionar as variáveis conforme as hipóteses. Pela 2ª Lei de Newton:

$$F_R = mP'' \quad \Leftrightarrow \quad m(x'', y'') = (F_x, F_y) = (0, -mg) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x'' = 0, \\ y'' = -g. \end{cases}$$

Além disso,

$$P(0) = (x(0), y(0)) = (0, h), \quad P'(0) = (x'(0), y'(0)) = (v_0 \cos \theta, v_0 \sin \theta).$$

Assim, o modelo matemático é dado pelo seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} x'' = 0, \\ y'' = -g, \\ x(0) = 0, y(0) = h, x'(0) = v_0 \cos(\theta), y'(0) = v_0 \sin(\theta). \end{cases} \quad (1)$$

4. **Resolução.** Integrando duas vezes, conclui-se que a solução geral das equações que compõem o PVI anterior são dadas por

$$x(t) = c_1 t + c_2 \quad \text{e} \quad y(t) = -g \frac{t^2}{2} + k_1 t + k_2.$$

Pelas condições iniciais, obtém-se

$$c_1 = v_0 \cos(\theta), \quad c_2 = 0, \quad k_1 = v_0 \sin(\theta), \quad k_2 = h.$$

Assim, a solução do PVI é dada por

$$\begin{cases} x(t) = t v_0 \cos(\theta), \\ y(t) = -\frac{g}{2} t^2 + t v_0 \sin(\theta) + h. \end{cases}$$

Note que a bola atinge o chão no instante t_0 se $y(t_0) = 0$, ou seja,

$$t_0 = \frac{v_0 \sin(\theta) + \sqrt{v_0^2 \sin^2(\theta) + 2gh}}{g}.$$

Note, também, que a distância d alcançada pela bola é

$$d = x(t_0) = v_0 \cos(\theta) \frac{v_0 \sin(\theta) + \sqrt{v_0^2 \sin^2(\theta) + 2gh}}{g}. \quad (2)$$

Observação 2.3 *Conforme a expressão acima, a distância alcançada é uma função de três variáveis: $d = d(v_0, h, \theta)$. Mas note que h e v_0 dependem da estrutura física do atleta (estatura e força) de modo que não podem ser controladas com muita flexibilidade. Assim sendo, com vistas ao aprimoramento dos lançamentos, resta tentar controlar θ .*

5. **Validação.** A seguir, na Tabela 2, a fim de testar a eficácia do modelo produzido, ele será confrontado com dados experimentais reais extraídos de [Linthorne \(2001\)](#).

Atleta	h (m)	v_0 (m/s)	θ (grau)	Distância real alcançada (m)	Distância prevista pelo modelo (m)	Erro relativo
1	2,11	11,90	34,1	15,90	16,03	0,82%
2	2,06	11,80	31	15,60	15,35	1,60%
3	2,16	11,50	34,9	15,10	15,24	0,93%
4	2,13	11,20	46,4	14,60	14,64	0,27%
5	2,09	11,10	31,6	13,80	13,95	1,09%

Tabela 2: Comparação de resultados experimentais com resultados previstos pelo modelo. Fonte: Elaborada pelo autor com dados de [Linthorne \(2001\)](#).

Note que, relativamente aos dados experimentais considerados, as previsões do modelo possuem um erro relativo médio de 0,95%. Sim, há erro! E, no contexto da modelagem matemática, isso não é inesperado. De fato, como disse [Box \(1979\)](#): “All models are wrong but some are useful”. Assim, não é perfeita exatidão que devemos procurar, mas sim utilidade. Dessa forma, a depender da necessidade, a acurácia obtida no exemplo acima pode ser considerada suficiente e o modelo pode ser utilizado.

6. **Uso.** A seguir, o modelo construído será utilizado para procurar o ângulo ótimo de lançamento, ou seja, o ângulo que produz a maior distância possível para cada atleta relacionado na Tabela 2. Em outras palavras, deseja-se achar $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ que maximiza a função d definida em (2) para os valores de h e v_0 dados na Tabela 2. Por exemplo,

para o Atleta 1, deseja-se maximizar

$$d(\theta) = (11,90) \cos(\theta) \frac{(11,90) \sin(\theta) + \sqrt{(11,90)^2 \sin^2(\theta) + 2(9,8)(2,11)}}{9,8}.$$

A Tabela 3 mostra o resultado dos cálculos.

Atleta	h (m)	v ₀ (m/s)	ângulo ótimo previsto (grau)	Distância prevista com ângulo ótimo (m)	Ganho (m)
1	2,11	11,90	41,34	16,43	0,53
2	2,06	11,80	41,36	16,14	0,54
3	2,16	11,50	41,03	15,51	0,41
4	2,13	11,20	40,9	14,78	0,18
5	2,09	11,10	40,9	14,51	0,71

Tabela 3: Ângulo ótimo de lançamento previsto pelo modelo para cada atleta e distância atingida com esse ângulo. Fonte: Elaborada pelo autor.

Em vista dos dados apresentados, o modelo prevê que os atletas poderiam aprimorar o arremesso treinando para obter um ângulo de lançamento próximo de 41° (com ganho médio de 0,47 m no alcance).

Observação 2.4 *O ângulo ótimo e o respectivo valor da distância apresentados na Tabela 3 foram computados por meio do software livre Geogebra com o comando Extremo(<Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>).*

Observação 2.5 *O modelo previu que, fixadas a altura e a velocidade inicial, a distância máxima é atingida quando o ângulo está próximo de 41°. A princípio, essa conclusão poderia ser utilizada para nortear os treinos. Porém, estudos mais aprofundados indicam que a alteração do ângulo de lançamento pode causar uma diminuição da velocidade inicial (o atleta pode perder força). Logo, a distância máxima depende tanto do ângulo de lançamento quanto da quantidade de força que o atleta perde ao alterar o ângulo. Levando isso em conta, conforme Linthorne (2001), estima-se que o ângulo ótimo real oscile em torno de 31°.*

- Modificação.** Uma forma de deixar o modelo mais realístico seria considerando a resistência do ar. Nesse caso, sendo f_1 a força de arrasto na direção horizontal e f_2 a

força de arrasto na direção vertical, o PVI dado em (1) tomaria a forma

$$\begin{cases} x'' = -f_1, \\ y'' = -g - f_2, \\ x(0) = 0, y(0) = h, x'(0) = v_0 \cos(\theta), y'(0) = v_0 \sin(\theta). \end{cases}$$

Aqui, uma análise mais sofisticada seria necessária (tanto do ponto de vista físico quanto do ponto de vista matemático).

3. Modelos populacionais

O objetivo desta seção é apresentar dois modelos básicos para a população de uma localidade isolada em função do tempo. O termo “isolada” significa que não há migração.

3.1. Modelo malthusiano

Seja $P(t)$ a população de uma localidade isolada no instante t . Chamando de N o número de nascimentos e de M o número de mortes, obtém-se

$$\frac{dP}{dt} = N - M. \quad (3)$$

Num primeiro momento, parece razoável supor que se uma população que habita uma região R_1 é o dobro de uma população similar que habita uma região R_2 , então em R_1 haverá duas vezes mais nascimentos e duas vezes mais mortes do que em R_2 . A mesma afirmação parece razoável trocando “dobro” por “metade”, “triplo”, etc. Ou seja, parece razoável supor N e M são proporcionais a P :

$$N = nP \quad \text{e} \quad M = mP, \quad (4)$$

em que n e m são constantes positivas.

Substituindo a hipótese (4) na equação (3), segue que

$$\frac{dP}{dt} = aP,$$

em que $a = n - m$ é uma constante chamada de **taxa de crescimento da população**. Resolvendo essa equação diferencial, obtém-se

$$P(t) = P_0 e^{at}, \quad (5)$$

em que $P_0 = P(0)$ é a população inicial.

O modelo (5) é chamado de **modelo malthusiano** em referência ao economista britânico T. R. Malthus que o aplicou a populações humanas em 1798 (FIGUEIREDO; NEVES, 2010). Note que, numa análise inicial, esse modelo parece fazer sentido:

$$\begin{aligned} \text{Mais nascimentos} &\Rightarrow n > m \Rightarrow a > 0 \Rightarrow \text{População aumenta} \\ \text{Mais mortes} &\Rightarrow n < m \Rightarrow a < 0 \Rightarrow \text{População diminui} \end{aligned}$$

Mas, será que o modelo subsiste quando confrontado com dados experimentais? Em certas situações, sim – como mostrado abaixo.

- Tomando $a = 0,4$, o modelo descreve bem uma população de ratos silvestres (*Microtus arvalis*) com população inicial $P_0 = 2$. Nesse caso, o modelo é dado por $P(t) = 2e^{0,4t}$ com t medido em meses (veja a Tabela 4).



Mês:	0	2	6	10
População prevista pelo modelo:	2	4,5	22	109,2
População observada:	2	5	20	109

Tabela 4: Crescimento populacional da espécie *Microtus arvalis*. Fonte: Elaborada pelo autor com dados de Braun (1993) e imagem de TD (2005).

- Conforme Braun (1993), no período de 1960–1970 estimou-se que a população humana estava crescendo com uma taxa anual média de 2%. Conforme WORLD... (2024), em 1960 a população humana foi estimada em 3,02 bilhões. Nessa situação, o modelo de crescimento populacional a partir de 1960 toma a forma $P(t) = 3,02e^{0,02t}$ com t medido em anos e descreve bem a evolução da população durante a década (veja a Tabela 5).

Ano:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Prevista:	3,02	3,08	3,14	3,21	3,27	3,34	3,41	3,47	3,54	3,62	3,69
Observada:	3,02	3,07	3,13	3,20	3,27	3,34	3,41	3,48	3,55	3,62	3,70

Tabela 5: População humana entre 1960 e 1970 (em bilhões). O ano t corresponde a t anos a partir de 1960. Fonte: Elaborada pelo autor com dados de WORLD... (2024).

Embora o modelo se mostre preciso nesses dois exemplos, ele não é infalível. Por exemplo, no contexto do segundo item, a previsão para 2023 seria 10,65 – algo bem distante do valor real de 8,05. Pior do que isso, o modelo prevê um crescimento exponencial ilimitado de modo que, em algum momento, a superfície do planeta estaria repleta (quer seja de pessoas, quer seja de ratos!) – o que não foi e nem será o caso.

Observação 3.1 *No modelo malthusiano, quando os parâmetros P_0 e a não são dados, eles podem ser obtidos dos dados observados via regressão exponencial. Uma forma de se fazer isso é por meio do software livre Geogebra com o comando `RegressãoExponencial(<Lista de Pontos>)`. Por exemplo, `RegressãoExponencial((0,2),(2,5),(6,20),(10,109))` produz $P_0 = 2,08$ e $a = 0,39$ que, após arredondamento, correspondem aos valores utilizados no caso dos ratos.*

3.2. Modelo logístico (ou modelo de Verhulst).

A principal deficiência do modelo malthusiano é a suposição de que a taxa de crescimento a é constante durante todo o tempo. Essa hipótese não é realística, pois o aumento da população obriga os seus membros a competirem entre si por espaço, recursos naturais e comida. E essa competição tem a tendência de retardar o crescimento. Ou seja: o aumento da população gera diminuição da taxa de crescimento. Assim, para melhorar o modelo, deve-se incorporar os efeitos dessa competição. A forma mais simples de se fazer isso é supondo que a decresce linearmente com a população, isto é, tem a forma

$$a = \alpha - \beta P,$$

em que α e β são constantes positivas. Nesse caso, a equação diferencial toma a forma

$$\frac{dP}{dt} = (\alpha - \beta P)P. \quad (6)$$

Esse modelo é chamado de **modelo logístico** ou **modelo de Verhulst**. Ele é dado por uma EDO separável conhecida como **equação logística** ou **equação de Verhulst-Pearl**. Os nomes fazem referência ao matemático belga P. F. Verhulst que usou o modelo para estudar as populações da França e da Bélgica em 1834 e ao biólogo americano R. Pearl que, ao lado do bioestatístico americano L. Reed, aplicou o modelo no estudo da população norte-americana em 1920 ([FIGUEIREDO; NEVES, 2010](#)).

A solução da equação (6) é dada por

$$P(t) = \frac{\alpha P_0}{\beta P_0 + (\alpha - \beta P_0)e^{-\alpha t}} \quad (7)$$

Note que:

$$P \text{ é crescente se } P_0 < \frac{\alpha}{\beta}, \quad P \text{ é decrescente se } P_0 > \frac{\alpha}{\beta}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = \frac{\alpha P_0}{\beta P_0 + 0} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Assim:

- Se P_0 começa abaixo de $\frac{\alpha}{\beta}$, então $P(t)$ cresce tendendo a $\frac{\alpha}{\beta}$.
- Se P_0 começa acima de $\frac{\alpha}{\beta}$, então $P(t)$ decresce tendendo a $\frac{\alpha}{\beta}$.

Em nenhum dos casos $P(t)$ ultrapassa o valor $\frac{\alpha}{\beta}$. Esse valor é chamado de **população limite** ou **capacidade de suporte**. O gráfico de cada situação é ilustrado na Figura 3, onde pode-se observar que esse modelo elimina o problema do crescimento ilimitado da população.

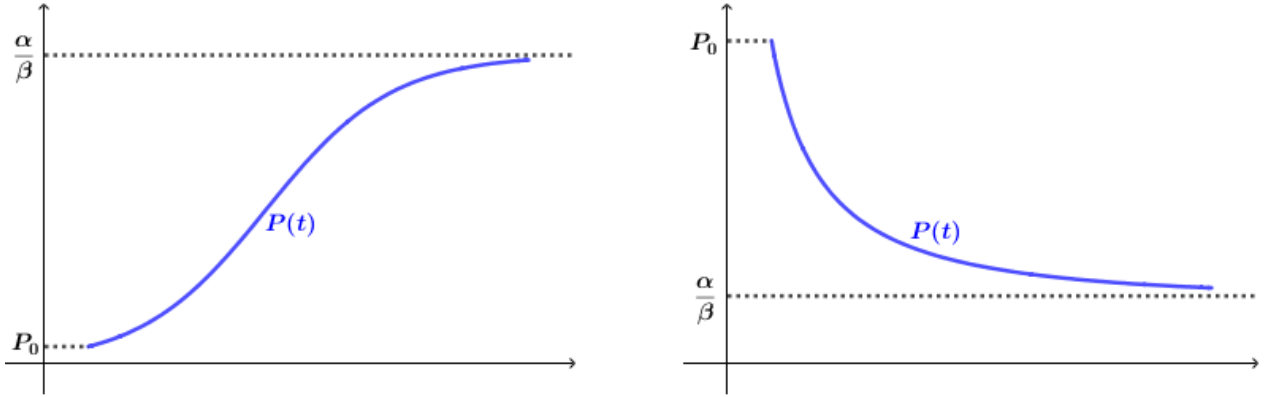


Figura 3: Gráficos das soluções da equação logística com população inicial menor e maior do que a capacidade de suporte, respectivamente. Fonte: Elaborada pelo autor.

Note que a função (7) pode ser expressa por

$$P(t) = \frac{b}{c + e^{-\alpha t}}, \quad (8)$$

em que $b = \frac{\alpha P_0}{\alpha - \beta P_0}$ e $c = \frac{\beta P_0}{\alpha - \beta P_0}$. É possível demonstrar que, a partir de três pontos com abscissas igualmente espaçadas, essas constantes podem ser determinados de modo único. Na modelagem da população dos Estados Unidos apresentada por Pearl e Reed em 1920, elas foram determinadas a partir dos três valores mostrados na Tabela 6.

Ano:	1790	1850	1910
População:	3929000	23192000	91972000

Tabela 6: População dos Estados Unidos. Fonte: Elaborada pelo autor com dados de [Pearl e Reed \(1920\)](#).

A função por eles obtida foi a seguinte:

$$P(t) = \frac{2930,3009}{0,014854 + e^{-0,0313395t}}, \quad (9)$$

a qual fornece a população em milhares, t anos a partir de 1780. Como mostrado na Figura 4, essa modelagem se mostrou precisa até 1950, mas perdeu precisão a partir dessa data.

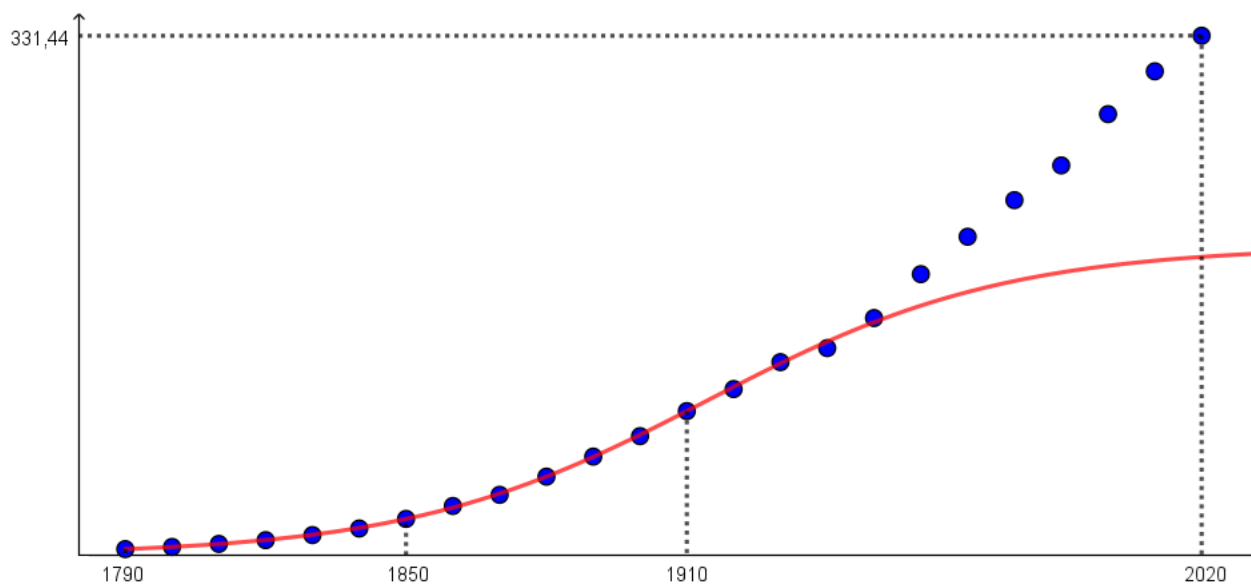


Figura 4: Comparação do modelo de Pearl e Reed (linha) com os dados observados (pontos). Fonte: Elaborada pelo autor com dados de [Pearl e Reed \(1920\)](#) e [HISTORICAL... \(2021\)](#).

Mas qual será a razão dessa imprecisão? Uma possível explicação, conforme sugerido por [Lipkin e Smith \(2001\)](#), é que a população norte-americana passou pela Guerra Civil Americana entre 1861 e 1865, pela 1ª Guerra Mundial entre 1914 e 1918, pela Grande Depressão entre 1929 e 1939 e pela Segunda Guerra Mundial entre 1939 e 1945. Assim, olhando em retrospecto, pode-se dizer que o modelo foi construído e utilizado num momento de condições desfavoráveis para o crescimento populacional que, ao serem superadas, desencadearam um crescimento mais acelerado.

De modo geral, a ineficiência do modelo logístico para executar previsões de longo prazo de populações humanas pode se dar por muitos outros fatores. Por exemplo: avanços médicos podem reduzir a taxa de mortalidade aumentando, desta forma, a taxa de crescimento; avanços tecnológicos podem melhorar a produção de alimentos e ampliar a área habitável do planeta aumentando, desta forma, a capacidade de suporte; idade e distribuição geográfica dos membros da população não são capturadas pelo modelo ([FULFORD; FORRESTER; JONES, 1997](#); [FIGUEIREDO; NEVES, 2010](#)).

Observação 3.2 Uma forma de obter os parâmetros α e b do modelo (8) a partir dos dados é por meio do software livre *Geogebra* com o comando `RegressãoLogística(<Lista de Pontos>)`. Por exemplo, arredondando para 7 casas decimais, o comando `RegressãoLogística((0, 3929),`

$(60, 23192), (120, 91972))$ produz a função

$$p(t) = \frac{197273,5833631}{1 + 49,2096165e^{-0,0313395t}} = \frac{4008,8421206}{0,0203212 + e^{-0,0313395t}}$$

que fornece a população (em milhares) dos Estados Unidos t anos a partir de 1790. Para obter a população t anos a partir de 1780, como feito em (PEARL; REED, 1920), basta tomar

$$P(t) = p(t - 10) = \frac{4008,8421206}{0,0203212 + e^{-0,0313395t}e^{0,313395}} = \frac{2930,30775}{0,014854 + e^{-0,0313395t}}$$

que, exceto pela precisão do arredondamento, equivale a (9). Para obter a população usando o ano como variável, como feito em (BRAUN, 1993), basta tomar

$$P(t) = p(t - 1790) = \frac{197273,5833631}{1 + e^{3,8960891}e^{-0,0313395(t-1790)}} = \frac{197273,5833631}{1 + e^{-0,0313395(t-1914,3188022)}}.$$

4. Proposta de atividade para sala de aula

Como visto, a modelagem matemática é composta por várias etapas. A etapa da validação parece ser uma etapa bastante interessante para finalidades didáticas, pois realmente mostra o modelo em funcionamento ao confrontar previsões teóricas com dados experimentais. Porém, ministrar atividades de modelagem que incluam a etapa da validação pode ser particularmente desafiador devido, por exemplo, à dificuldade de se obter dados reais apropriados que se encaixem nos modelos escolhidos. Buscando contribuir nesse sentido, a presente seção apresenta uma sugestão de atividade de modelagem que inclui a etapa da validação.

4.1. Problema

No basquete, o **lance livre** é um arremesso concedido a um jogador em razão de certos tipos de faltas. O lance livre não tem marcação da equipe adversária e ocorre de uma posição relativamente próxima da cesta (veja a Figura 5).

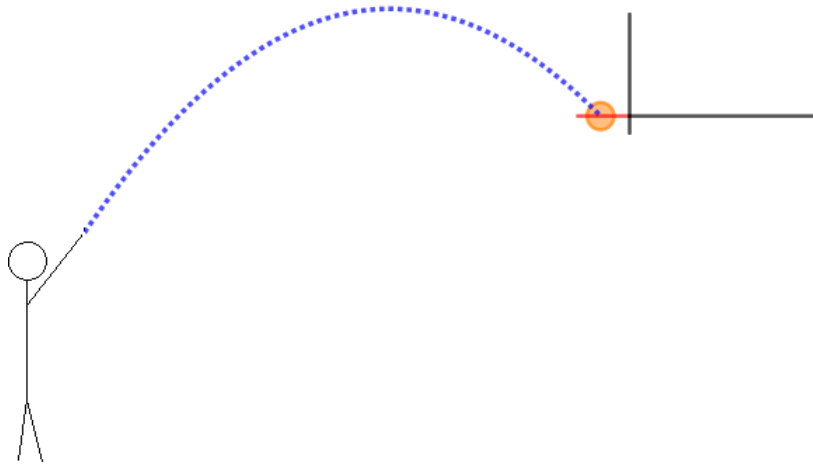


Figura 5: Ilustração do lance livre no basquete. Fonte: Elaborada pelo autor.

- (a) Crie um modelo capaz de determinar se um dado arremesso cai dentro ou fora da cesta podendo, desta forma, fornecer informações úteis para aprimorar treinamentos.
- (b) Implemente a etapa da validação confrontando as previsões do modelo com os dados experimentais apresentados na Tabela 7.

Arremesso	h (m)	v_0 (m/s)	θ (grau)	Resultado experimental
1	2,02	7,49	55,71	Dentro
2	2,02	7,61	56,69	Dentro
3	2,02	7,38	58,29	Fora
4	2,02	7,54	55,68	Dentro
5	2,02	7,65	55,1	Fora
6	2,02	7,41	58,46	Fora
7	2,02	7,55	56,74	Dentro
8	2,02	6,99	54,65	Fora
9	2,02	7,65	57,38	Dentro
10	2,02	7,62	57,09	Dentro
11	2,02	7,46	55,4	Dentro
12	2,02	7,29	56,28	Fora
13	2,02	7,62	56,58	Dentro
14	2,02	7,19	56,24	Fora
15	2,02	7,56	56,1	Dentro
16	2,02	7,54	56,32	Dentro
17	2,02	7,82	56,04	Fora
18	2,02	7,72	54,86	Fora
19	2,02	7,36	56,68	Fora
20	2,02	7,10	53,89	Fora
21	2,02	7,47	54,74	Dentro
22	2,02	7,53	55,79	Dentro
23	2,02	7,15	53,28	Fora
24	2,02	7,12	55,1	Fora
25	2,02	7,60	56,18	Dentro

Tabela 7: Dados experimentais de 25 lances livres de basquete em que h é a altura de lançamento, v_0 é a velocidade inicial da bola, θ é o ângulo de lançamento da bola, a distância entre o atleta e a cesta é $D = 4,60$, o raio da bola é $r = 0,12$, o raio do aro é $R = 0,23$ e a altura da cesta é $H = 3,05$. Fonte: Elaborada pelo autor com dados de [Barzykina \(2017\)](#).

4.2. Abordagem sugerida

Em geral, pode haver mais de um caminho possível para se abordar um problema de modelagem matemática. Nesta seção, buscando contribuir com o leitor interessado, apresentamos uma possível abordagem (trabalhada por alunos do presente autor em sala de aula) que pode produzir boas previsões relativamente aos dados da Tabela 7.

- As principais variáveis do problema são a velocidade inicial da bola v_0 , o ângulo de lançamento da bola θ e as seguintes medidas mostradas na Figura 6: raio da bola r , raio do aro R , altura de lançamento h (altura em que a bola sai da mão do atleta), altura da cesta H , altura máxima atingida pela bola M , distância D entre o atleta

(ponto de partida da bola) e o centro da cesta.

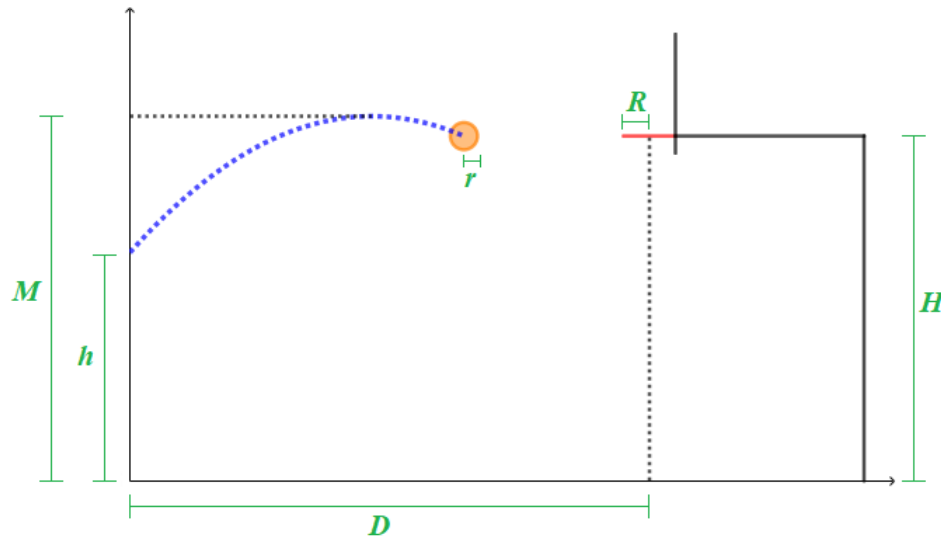


Figura 6: Algumas variáveis relevantes para o problema do lance livre. Fonte: Elaborada pelo autor.

- Seja $(x(t), y(t))$ a posição do centro da bola no instante t . Obtenha equações para $x(t)$ e $y(t)$. Para isso, pode-se utilizar as mesmas ideias do arremesso de peso exemplificado na Seção 2.2.
- Suponha que um lançamento cai dentro da cesta se existe um momento em que ocorrem três coisas simultaneamente: (i) a bola está caindo, (ii) o centro da bola atinge a altura do aro e (iii) a bola está inteiramente contida no aro como ilustrado na Figura 7.

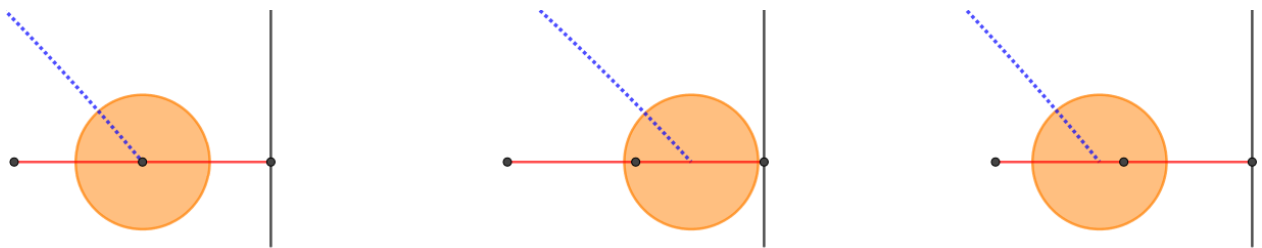


Figura 7: Exemplos de situações que satisfazem a condição de lançamento dentro. Fonte: Elaborada pelo autor.

- Caso a condição do item anterior não seja satisfeita, para fins de simplificação, suponha que o lançamento cai fora da cesta. Essa situação é ilustrada na Figura 8. Note que as duas primeiras configurações dessa figura representam casos em que a bola se choca com a tabela ou com o aro, mas são impossíveis de ocorrer na prática exatamente conforme

o desenho (pois a bola não atravessa meios materiais). Na prática, um caso em que há choque com o aro ou com a tabela pode produzir um lançamento dentro; porém, dentro da hipótese simplificadora acima sugerida, o modelo não captura esse detalhe (todo choque é considerado lançamento fora).

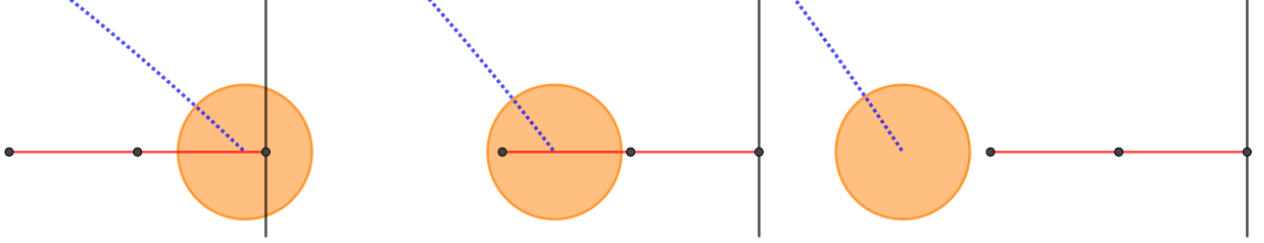


Figura 8: Exemplos de situações que não satisfazem a condição de lançamento dentro. Fonte: Elaborada pelo autor.

- Se t_H é o instante em que a bola atinge a altura H pela segunda vez (isto é, no momento em que está caindo), então a condição de lançamento dentro definida anteriormente se expressa matematicamente por $D - R + r < x(t_H) < D + R - r$ (veja Figura 9).

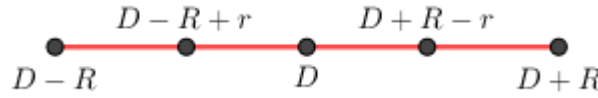


Figura 9: Coordenadas no aro. Fonte: Elaborada pelo autor.

- Treinamentos poderiam ser aprimorados procurando determinar como ajustar v_0 e/ou θ de modo que um lançamento incorreto se transformasse num “lançamento perfeito”, isto é, satisfazendo $(x(t_H), y(t_H)) = (D, H)$.

5. Considerações finais

Neste texto, fizemos uma introdução à modelagem matemática apresentando sua conceitualização, principais etapas e alguns exemplos clássicos que ocorrem no contexto do lançamento de corpos e do crescimento populacional. Nosso intuito foi estudar os modelos tratados em conexão com a etapa da validação, a qual possibilita comparar as previsões teóricas do modelo construído com resultados experimentais concretos fornecendo, desta forma, uma visão prática de como um modelo pode ser utilizado bem como uma ideia geral de seu grau de acurácia – o que é de extrema importância do ponto de vista das aplicações reais. Entendendo que essas características da etapa da validação tornam sua discussão bastante apropriada ao

contexto do ensino da modelagem matemática e que, ao mesmo tempo, sua implementação em sala de aula nem sempre é fácil devido ser necessário dispor de dados experimentais relativos ao fenômeno estudado, encerrarmos a exposição com uma sugestão de atividade que, com base em experiência prévia, é possível de ser trabalhada pelo professor. Com isso, esperamos ter contribuído no contexto do estudo e ensino da modelagem matemática. O desenvolvimento de materiais que permitam uma abordagem incluindo a etapa da validação num nível didático apropriado para modelos diferentes daqueles aqui tratados fica como possibilidade para trabalhos futuros.

6. Agradecimentos

O autor agradece pelas sugestões do parecerista anônimo que ajudaram a melhorar a qualidade do trabalho.

Referências

- 1 BANASIAK, J. **Difference and differential equations in mathematical modelling**. [S.l.]. Disponível em: <https://www.up.ac.za/media/shared/259/Documents/Teaching%20material/book-jb.zp158054.pdf>.
- 2 BANERJEE, S. **Mathematical Modeling. Models, Analysis and Applications**. Boca Raton: CRC Press, 2014.
- 3 BARZYKINA, I. **The physics of an optimal basketball free throw**. 2017. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/1702.07234>.
- 4 BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**. Campinas: Editora Contexto, 2002.
- 5 BENDER, E. A. **An Introduction to Mathematical Modeling**. New York: Wiley, 1978.
- 6 BLISS, K. M.; FOWLER, K. R.; GALLUZZO, B. J. **Math Modeling. Getting started & getting solutions**. Philadelphia: SIAM, 2014.
- 7 BOX, G. E. P. Robustness in the Strategy of Scientific Model Building. In: LAUNER, R. L.; WILKINSON, G. N. (Org.). **Robustness in Statistics**. New York: Academic Press, 1979. P. 201–236.
- 8 BRAUN, M. **Differential equations and their applications: An introduction to applied mathematics**. 4. ed. New York: Springer, 1993.
- 9 ECK, C.; GARCKE, H.; KNABNER, P. **Mathematical Modeling**. [S.l.]: Springer, 2017.
- 10 FIGUEIREDO, D. G.; NEVES, A. F. **Equações Diferenciais Aplicadas**. 3. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2010.

- 11 FULFORD, G.; FORRESTER, P.; JONES, A. **Modelling with Differential and Difference Equations**. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.
- 12 GIORDANO, F. R.; FOX, W. P.; HORTON, S. B. **A First Course in Mathematical Modeling**. 5. ed. Boston: Brooks/Cole, 2014.
- 13 HISTORICAL Population Change Data (1910-2020). United States Census Bureau. 2021. Disponível em: <https://www.census.gov/data/tables/time-series/dec/popchange-data-text.html>.
- 14 LINTHORNE, Nicholas P. Optimum release angle in the shot put. **Journal of Sports**, v. 19, n. 5, p. 359–372, 2001.
- 15 LIPKIN, L.; SMITH, D. Logistic Growth Model. **JOMA**, v. 1, n. 3, 2001. Disponível em: <https://maa.org/press/periodicals/loci/joma/logistic-growth-model-introduction>.
- 16 MEERSCHAERT, M. M. **Mathematical Modeling**. 4. ed. Waltham: Academic Press, 2013.
- 17 NACHBIN, A.; TABAK, E. **Equações Diferenciais em Modelagem Matemática Computacional**. Rio de Janeiro: IMPA, 1997. Disponível em: https://impa.br/wp-content/uploads/2017/04/21_CBM_97_01.pdf.
- 18 PEARL, R.; REED, L. J. On the rate of growth of the population of the United States since 1790 and its mathematical representation. **Proceedings of the National Academy of Sciences**, v. 6, n. 6, p. 275–288, 1920.
- 19 SEGEL, L. A.; EDELSTEIN-KESHET, L. **A Primer on Mathematical Models in Biology**. Philadelphia: SIAM, 2013.
- 20 TD, Dieter. **Feldmaus *Microtus arvalis*.jpg**. Licensed under the [CC BY-SA 3.0](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/) license, via Wikimedia Commons. 2005. Disponível em: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Feldmaus_Microtus_arvalis.jpg.
- 21 VELTEN, K. **Mathematical Modeling and Simulation**. Weinheim: Wiley-VCH, 2009.
- 22 WORLD Population by Year. Worldometer. 2024. Disponível em: <https://www.worldometers.info/world-population/world-population-by-year/>.



Symmetries in Taxicab Ellipse

Patrícia Hernandes Baptistelli – Email: phbaptistelli@uem.br

Henrique Tapparello Moresco – Email: morescohenrique1997@gmail.com

Abstract: This article presents geometric aspects of the ellipse analyzed from the point of view of the taxicab metric. We first construct the taxicab ellipse by exploring its symmetric properties. From this, we analyze the action of isometries of the Euclidean context and verify whether these are transformations that preserve distances on the taxicab geometry. In particular, we study the behaviour of the taxicab ellipse with respect to rotations. We also obtain an algebraic equation for the regular octagon in the plane directly from the fact that every regular octagon is an taxicab ellipse.

Keywords: Non-Euclidean geometry; Symmetries; Taxicab ellipse; Regular octagon

1. Introduction

The Euclidean metric is defined as the measure of a line segment connecting any two points, derived from the basic geometry developed by Euclid (300 b.C.). This method of measurement is not always the best choice to represent the displacement of people and vehicles, particularly in large urban centers, because moving in a straight line is not always an option. Thus, choosing a more convenient metric is a good way to describe the urban displacement and, in this sense, the taxicab metric is a good alternative.

The taxicab geometry was introduced by the German mathematician Hermann Minkowski (1864-1909). It is a form of geometry in which the Euclidean metric is replaced by the sum metric, or the so-called taxicab metric, given on the Euclidean plane by the function $d_T : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ defined by

$$d_T((x_1, y_1), (x_0, y_0)) = |x_1 - x_0| + |y_1 - y_0|. \quad (1)$$

This distance gives the minimum length of a path from $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ to $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ constructed from horizontal and vertical line segments (see Figure 1). So the taxicab metric, also called Manhattan metric, is the most used in urban networks because it is more consistent

with the perpendicular lines of the streets and avenues of modern and planned cities. We cite references (DREILING, 2012; HANSON, 2012; INY, 1984; KRAUSE, 1986; KUNWAR, 2018; REINHARDT, 2005; SOWELL, 1989; THOMPSON; DRAY, 2000) for an introductory study of concepts of taxicab geometry. In these works, the authors explore this new geometry in relation to Euclidean geometry. In (REINHARDT, 2005), for example, the distance defined in (1) is used to find the solutions to three problems proposed by Eugene F. Krause in (KRAUSE, 1986).



Figure 1: Taxicab metric.

Therefore, taxicab geometry is a non-Euclidean geometry with the advantage of being quite intuitive compared to other non-Euclidean geometries, although some geometric properties obtained in the usual metric do not remain in this new perspective. An example of this is the change in the geometric configuration of the conics, with the appearance of singularities. In this direction, taxicab geometry reveal interesting and surprising properties, as can be seen in (CHICIU, 2012; CRUZ, 2015; LOIOLA; COSTA, 2015; PETROVIC et al., 2025). In particular, in (CHICIU, 2012) the author examines conics under different metrics, including the taxicab metric, by a graphical approach. In (CRUZ, 2015), it is presented some symmetry conditions of taxicab ellipse that help in the recognition of its geometric properties. In (PETROVIC et al., 2025), the authors analyze the geometry of some curves (conics, circles and trifocal ellipses) in this context, including the study of area and perimeter.

In this article, we analyze the ellipse defined under the taxicab metric by taking advantage of its symmetries in the process of its geometric construction. Section 2 contains general results for this construction. In Section 3 we verify if Euclidean isometries also preserve distances in this new context. In Section 4 we use the taxicab ellipse to provide an algebraic equation for the set of points in a regular octagon.

2. Ellipse on the taxicab geometry

We start with the definition of an ellipse in the Euclidean plane $\mathbb{R}^2$.

Definition 2.1 *Let $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ be an arbitrary metric and $F_1, F_2 \in \mathbb{R}^2$ two fixed points such that $d(F_1, F_2) = 2c$, for some $c > 0$. An ellipse Φ_{F_1, F_2} of foci F_1 and F_2 is the locus of points on the plane whose sum of the distances to F_1 and to F_2 is a constant $2a > 0$, where $a > c$. Symbolically,*

$$\Phi_{F_1, F_2} = \{P \in \mathbb{R}^2 : d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a\}.$$

Therefore, an ellipse is a plane curve surrounding two focus points F_1 and F_2 . The standard form of an ellipse in the Euclidean metric is known as in Figure 2. However, the metric d in the Definition 2.1 is arbitrary and we can consider the taxicab metric.

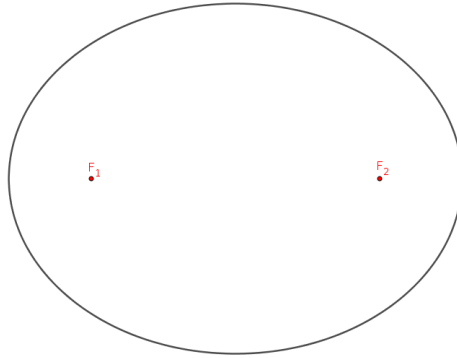


Figure 2: Euclidean ellipse.

From now on, we consider the Euclidean plane $\mathbb{R}^2$ equipped with the taxicab metric defined in (1), namely

$$d_T(P, Q) = |x_1 - x_0| + |y_1 - y_0|, \quad (2)$$

for all $P = (x_1, y_1)$, $Q = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. We will call the ellipse defined with the metric d_T of taxicab ellipse, or simply of taxi-ellipse. According to Definition 2.1, if $F_1 = (x_1, y_1)$ and $F_2 = (x_2, y_2)$ are the foci of the taxi-ellipse, then Φ_{F_1, F_2} is the set of all points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ such that

$$|x - x_1| + |y - y_1| + |x - x_2| + |y - y_2| = 2a. \quad (3)$$

In the search for ordered pairs that satisfy equation (3), we recognize the importance of

investigating some type of symmetry in the taxi-ellipse. For this purpose, we present the following proposition.

Proposition 2.2 *Let Φ_{F_1, F_2} be a taxi-ellipse of foci $F_1 = (x_1, y_1)$ and $F_2 = (x_2, y_2)$. Then $(x, y) \in \Phi_{F_1, F_2}$ if and only if $(x, y_1 + y_2 - y) \in \Phi_{F_1, F_2}$. Similarly, $(x, y) \in \Phi_{F_1, F_2}$ if and only if $(x_1 + x_2 - x, y) \in \Phi_{F_1, F_2}$.*

Proof: We have $(x, y) \in \Phi_{F_1, F_2}$ if and only if (x, y) satisfies the equation (3). Obviously, this equality is the same as

$$|x - x_1| + |y_2 - y| + |x - x_2| + |y_1 - y| = 2a,$$

which is equivalent to

$$|x - x_1| + |(y_1 + y_2 - y) - y_1| + |x - x_2| + |(y_1 + y_2 - y) - y_2| = 2a.$$

In turn, this last equality occurs if and only if $(x, y_1 + y_2 - y) \in \Phi_{F_1, F_2}$. In the same way, (3) is the same as

$$|x_2 - x| + |y - y_1| + |x_1 - x| + |y - y_2| = 2a,$$

which is equivalent to

$$|(x_1 + x_2 - x) - x_1| + |y - y_1| + |(x_1 + x_2 - x) - x_2| + |y - y_2| = 2a.$$

Therefore, $(x, y) \in \Phi_{F_1, F_2}$ if and only if $(x_1 + x_2 - x, y) \in \Phi_{F_1, F_2}$. ■

Corollary 2.3 *Let Φ_{F_1, F_2} be a taxi-ellipse of foci $F_1 = (x_1, y_1)$ and $F_2 = (x_2, y_2)$. Then $(x, y) \in \Phi_{F_1, F_2}$ if and only if $(x_1 + x_2 - x, y_1 + y_2 - y) \in \Phi_{F_1, F_2}$.*

Using Proposition 2.2 and Corollary 2.3, we can do an alternative analysis of the geometric behavior of a taxi-ellipse taking into account its symmetries. For this, assume without loss of generality that $x_1 \leq x_2$ and $y_1 \leq y_2$. Given $(x, y) \in \Phi_{F_1, F_2}$, consider the cases:

(i) If $x \leq x_1$ and $y \leq y_1$, the equation (3) reduces to

$$-x + x_1 - y + y_1 - x + x_2 - y + y_2 = 2a,$$

that is, (x, y) lies on the straight line

$$r : y = -x - a + \frac{1}{2}(x_1 + y_1 + x_2 + y_2).$$

(ii) If $x \leq x_1$ and $y_1 \leq y \leq y_2$, the equation (3) becomes

$$-x + x_1 + y - y_1 - x + x_2 - y + y_2 = 2a,$$

that is, (x, y) lies on the straight line

$$s : x = -a + \frac{1}{2}(x_1 - y_1 + x_2 + y_2).$$

(iii) If $x_1 \leq x \leq x_2$ and $y \leq y_1$, the equation (3) becomes

$$x - x_1 - y + y_1 - x + x_2 - y + y_2 = 2a,$$

that is, (x, y) lies on the straight line

$$t : y = -a + \frac{1}{2}(-x_1 + y_1 + x_2 + y_2).$$

The geometric representation of the points $(x, y) \in \Phi_{F_1, F_2}$ that satisfy the cases (i), (ii) and (iii) is given in Figure 3, for hypothetical F_1 and F_2 .

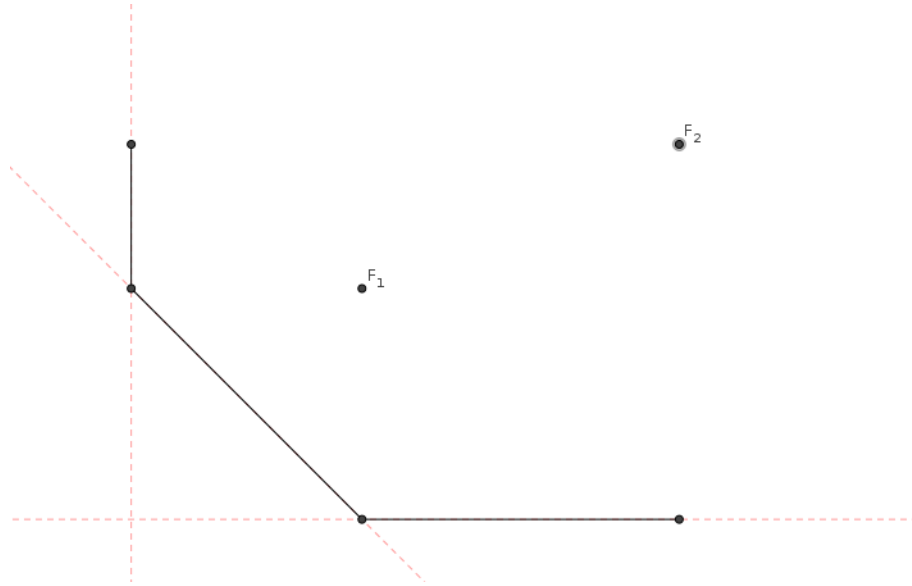


Figure 3: Part of a taxi-ellipse.

There are more straight lines in the plane that satisfy equation (3). In fact, by Proposition 2.2, if $(x, y) \in \Phi_{F_1, F_2}$, then $(x_1 + x_2 - x, y) \in \Phi_{F_1, F_2}$. Supposing that $x \geq x_2$ and $y \leq y_1$, we

have

$$x' = x_1 + x_2 - x \leq x_1 \quad \text{and} \quad y \leq y_1$$

In this case, since $(x', y) \in \Phi_{F_1, F_2}$, it follows that $(x', y) \in r$, that is,

$$y = -x' - a + \frac{1}{2}(x_1 + y_1 + x_2 + y_2).$$

Therefore, (x, y) lies on the line

$$r' : y = x - a + \frac{1}{2}(-x_1 + y_1 - x_2 + y_2).$$

In other words, for $x \geq x_2$ and $y \leq y_1$, the points (x, y) that belong to the taxicab ellipse Φ_{F_1, F_2} are on the line segment r' .

Similarly, if $(x, y) \in \Phi_{F_1, F_2}$, then $(x, y') \in \Phi_{F_1, F_2}$, where $y' = y_1 + y_2 - y$. Assuming that $x \leq x_1$ and $y \geq y_2$, we have $x \leq x_1$ and $y' \leq y_1$. In this case, $(x, y') \in r$, that is,

$$y' = -x - a + \frac{1}{2}(x_1 + y_1 + x_2 + y_2).$$

Thus, (x, y) lies on the line

$$s' : y = x + a + \frac{1}{2}(-x_1 + y_1 - x_2 + y_2).$$

Therefore, for $x \leq x_1$ and $y \geq y_2$ the points $(x, y) \in \Phi_{F_1, F_2}$ are on the line segment s' .

Now using Corollary 2.3, if $(x, y) \in \Phi_{F_1, F_2}$, then $(x', y') \in \Phi_{F_1, F_2}$, where $x' = x_1 + x_2 - x$ and $y' = y_1 + y_2 - y$. Note that $x \geq x_2$ and $y \geq y_2$ if and only if $x' \leq x_1$ and $y' \leq y_1$. In this case $(x', y') \in r$, that is,

$$y' = -x' - a + \frac{1}{2}(x_1 + y_1 + x_2 + y_2),$$

so that (x, y) lies on the line

$$t' : y = -x + a + \frac{1}{2}(x_1 + y_1 + x_2 + y_2).$$

Therefore, for $x \geq x_2$ and $y \geq y_2$, the points $(x, y) \in \Phi_{F_1, F_2}$ are on the line segment t' .

So far, we obtain the taxi-ellipse for the regions of the plane such that $x \leq x_1$; $x_1 \leq x \leq x_2$ and $y \leq y_1$; $x \geq x_2$ and $y \leq y_1$; $x \geq x_2$ and $y \geq y_2$. The geometric representation of Φ_{F_1, F_2} is in accordance with Figure 4.

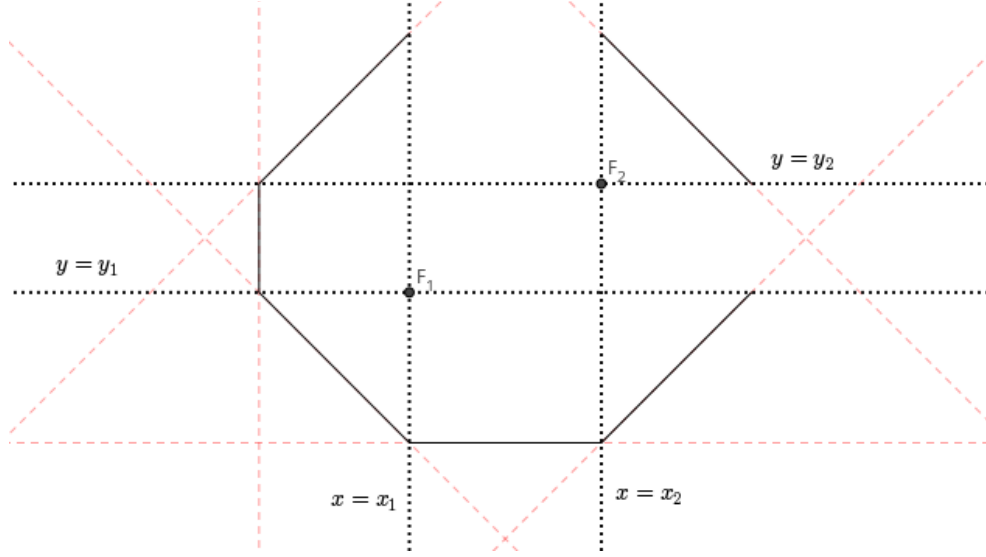


Figure 4: Incomplete taxi-ellipse.

Only three cases remain to be analyzed: $x \geq x_2$ and $y_1 \leq y \leq y_2$; $x_1 \leq x \leq x_2$ and $y \geq y_2$; $x_1 \leq x \leq x_2$ and $y_1 \leq y \leq y_2$. First, we assume $x \geq x_2$ and $y_1 \leq y \leq y_2$. Again, if $(x, y) \in \Phi_{F_1, F_2}$, then $(x', y) \in \Phi_{F_1, F_2}$, where $x' = x_1 + x_2 - x$. In this case $x' \leq x_1$ and $y_1 \leq y \leq y_2$, so that $(x', y) \in s$. Therefore

$$x' = -a + \frac{1}{2}(x_1 - y_1 + x_2 + y_2),$$

which implies that (x, y) belongs to the line

$$u : x = a + \frac{1}{2}(x_1 + y_1 + x_2 - y_2).$$

We assume now that $x_1 \leq x \leq x_2$ and $y \geq y_2$. Again, if $(x, y) \in \Phi_{F_1, F_2}$, then $(x, y') \in \Phi_{F_1, F_2}$, where $y' = y_1 + y_2 - y$. In this case $x_1 \leq x \leq x_2$ and $y' \leq y_1$, so that $(x, y') \in t$. Thus,

$$y' = -a + \frac{1}{2}(-x_1 + y_1 + x_2 + y_2),$$

or equivalently

$$u' : y = a + \frac{1}{2}(x_1 + y_1 - x_2 + y_2).$$

Therefore, for $x_1 \leq x \leq x_2$ and $y \geq y_2$, the only points $(x, y) \in \Phi_{F_1, F_2}$ are on the line segment u' . It remains only to analyze the case $x_1 \leq x \leq x_2$ and $y_1 \leq y \leq y_2$. For this region, the equation (3) becomes

$$x_2 - x_1 + y_2 - y_1 = 2a.$$

Then

$$d_T(F_1, F_2) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1| = 2a.$$

Since $d_T(F_1, F_2) = 2c$, we conclude that $c = a$, which contradicts the hypothesis $a > c$ in Definition 2.1. Therefore, there are no points in the taxicab ellipse Φ_{F_1, F_2} in this region.

Note that the geometric configuration of Φ_{F_1, F_2} for the case $x_1 \leq x_2$ and $y_1 \leq y_2$ is that of an octagon, as shown in Figure 5. However, we also have taxi-ellipses in the form of hexagons, as we shall see in the next section. We suggest using GeoGebra software ([GEOGEBRA...](#), 2025) for a better visualization of the geometrical behaviour of taxi-ellipses when we vary the foci F_1 and F_2 .

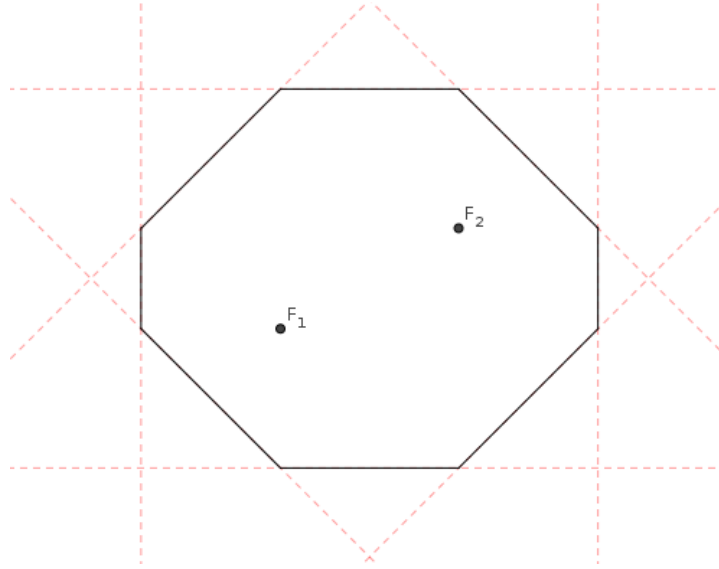


Figure 5: Taxi-ellipse.

3. Symmetries of the taxi-ellipse

In this section, we present some properties of the taxi-ellipse related to its symmetries in the Euclidean context. Geometrically, symmetries are defined in terms of isometries, that is, geometric transformations that preserve the distance between any two points. However, not every isometry is a symmetry. More specifically, we have the following definition.

Definition 3.1 *Let (M, d_M) and (N, d_N) be metric spaces. We say that $f : M \rightarrow N$ is an isometry if $d_N(f(x), f(y)) = d_M(x, y)$, for all $x, y \in M$.*

With the standard metric, isometries are transformations that do not change the size and the configuration of a figure, but they can change its position on the space. In this context,

we cite the translations, rotations, reflections and glide reflections as the only four types of isometries (different from the identity) on the plane. Based on the concept of isometry, we define the symmetries of a figure as follows.

Definition 3.2 *We say that a plane figure is symmetric if there exists an isometry on $\mathbb{R}^2$ different from the identity that transforms that figure into itself. In this case, such isometry is called a symmetry of the figure.*

Therefore, by the geometric configuration of the taxi-ellipse Φ_{F_1, F_2} obtained in the Figure 5, we can see that some rotations and reflections behave as symmetries of Φ_{F_1, F_2} in the Euclidean context. For example, we will show in the next section that every regular octagon is a taxi-ellipse. In this case, rotation around the origin of angle $\theta = \frac{\pi}{4}$, as well as reflections around coordinate axes, constitutes its Euclidean symmetries.

It is important to question whether rotations and reflections also act as symmetries in taxicab geometry. To address this, we first verify whether translations, rotations, and reflections are isometries under the metric d_T defined in (2). We will see that the answer to this question is affirmative for translations and negative for rotations and reflections.

Proposition 3.3 *Translations under the taxicab metric are isometries.*

Proof: Let $T_a : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ be the translation $T_a(x, y) = (x + a_1, y + a_2)$, with $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ fixed. For any $(x, y), (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, we have

$$\begin{aligned} d_T((x, y), (x_1, y_1)) &= |x - x_1| + |y - y_1| \\ &= |(x + a_1) - (x_1 + a_1)| + |(y + a_2) - (y_1 + a_2)| \\ &= d_T((x + a_1, y + a_2), (x_1 + a_1, y_1 + a_2)) \\ &= d_T(T_a(x, y), T_a(x_1, y_1)), \end{aligned}$$

implying that every translation is an isometry in the taxicab geometry. ■

Also in the Euclidean plane, a rotation is a transformation that turns every point of a figure through a specified angle and around a fixed point. The rotation around the origin of angle $\theta \in \mathbb{R}$ is the linear mapping $R_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ defined by

$$R_\theta(x, y) = (\cos \theta x - \sin \theta y, \sin \theta x + \cos \theta y).$$

As we mentioned, R_θ is an isometry under the Euclidean metric for all $\theta \in \mathbb{R}$. However, the same is not true under taxicab metric. In fact, consider $P = (1, 0)$ and $Q = (0, 1)$. Then

$$d_T(P, Q) = |1 - 0| + |0 - 1| = 2$$

and

$$d_T(R_\theta(P), R_\theta(Q)) = d_T((\cos \theta, \sin \theta), (-\sin \theta, \cos \theta)) = |\cos \theta + \sin \theta| + |\sin \theta - \cos \theta|.$$

For $0 < \theta \leq \frac{\pi}{4}$, we have

$$d_T(R_\theta(P), R_\theta(Q)) = \cos \theta + \sin \theta - \sin \theta + \cos \theta = 2 \cos \theta \neq 2.$$

Similar calculations show that $d_T(R_\theta(P), R_\theta(Q)) \neq d_T(P, Q)$, for all $\theta \neq \frac{k\pi}{2}$, with $k \in \mathbb{Z}$. It is important to emphasize that R_θ is an isometry under the taxicab metric for all $\theta = \frac{k\pi}{2}$, with $k \in \mathbb{Z}$. For the simplicity of the computations, we omit the proof of this statement here.

Similarly, reflections can change the distance between two points of $\mathbb{R}^2$ in the taxicab geometry. More precisely, a reflection is a transformation whose set of fixed points forms a hyperplane. In two dimensions, this set is called the axis of reflection, and the image of a figure under a reflection is its mirror image across this axis. In algebraic terms, a reflection across a straight line that passes through the origin and forms an angle α with the x -axis, for $0 \leq \alpha < \pi$, is the linear mapping $M_\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ defined by

$$M_\alpha(x, y) = (\cos 2\alpha x + \sin 2\alpha y, \sin 2\alpha x - \cos 2\alpha y).$$

For $P = (1, 0)$, $Q = (0, 1)$ and $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{8}$, we have

$$\begin{aligned} d_T(M_\alpha(P), M_\alpha(Q)) &= d_T((\cos 2\alpha, \sin 2\alpha), (\sin 2\alpha, -\cos 2\alpha)) \\ &= |\cos 2\alpha - \sin 2\alpha| + |\sin 2\alpha + \cos 2\alpha| \\ &= \cos 2\alpha - \sin 2\alpha + \sin 2\alpha + \cos 2\alpha \\ &= 2 \cos 2\alpha \neq 2. \end{aligned}$$

Direct calculations show that $d_T(M_\alpha(P), M_\alpha(Q)) \neq d_T(P, Q)$, for all $\alpha \neq \frac{k\pi}{4}$, with $k \in \{0, 1, 2, 3\}$. However, M_α is an isometry under the taxicab metric for all $\alpha = \frac{k\pi}{4}$, with $k \in \{0, 1, 2, 3\}$. Again, we omit the proof of this statement. Therefore, we have the following result:

Proposition 3.4 *Rotations R_θ are isometries under the taxicab metric if and only if $\theta = \frac{k\pi}{2}$, with $k \in \mathbb{Z}$. In the same way, reflections M_α are isometries under the taxicab metric if and only if $\alpha = \frac{k\pi}{4}$, with $k \in \{0, 1, 2, 3\}$.*

We then conclude that in the taxicab geometry the rotation of angle $\theta = \frac{\pi}{4}$ can not be a symmetry of the regular octagon, contrary to what occurs in the Euclidean context. The

previous proposition suggest that rotations and reflections can change the size and shape of a plane figure in this new context. To verify this, we analyze the behavior of the taxi-ellipse under rotations by applying usual trigonometric relations (of Euclidean geometry). For an approach to trigonometry developed in the taxicab geometry, we refer to (THOMPSON; DRAY, 2000).

For the remainder of this section we follow the approach presented in (CRUZ, 2015, pp. 42-48), where the author discusses the rotation movements of the focal line of a taxi-ellipse for the particular case in which $c = 1$ and $a = 2$. In our study, the values of c and a ($a > c$) are arbitrary.

Consider the foci $F_1 = (x_1, y_1)$ and $F_2 = (x_2, y_2)$ of the taxi-ellipse Φ_{F_1, F_2} with respect to the canonical basis of $\mathbb{R}^2$. Denote by $\hat{r}$ the focal line determined by F_1 and F_2 . We want to write the foci F_1 and F_2 as vector functions of the angle θ formed between $\hat{r}$ and the x -axis (see Figure 6). Without loss of generality, we assume the taxi-ellipse with center at the origin and F_2 in the first quadrant. For $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, we have

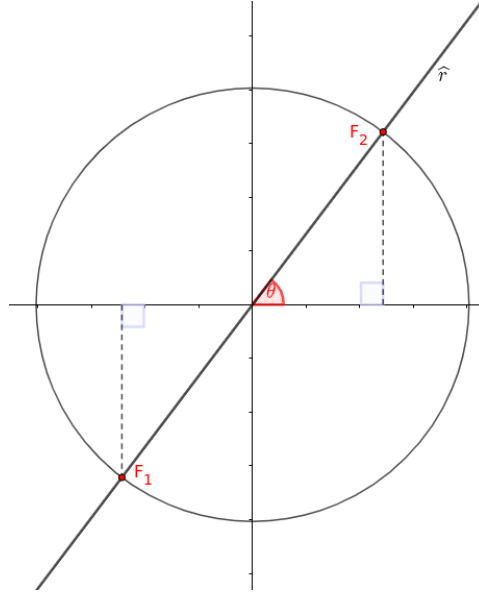
$$\cos(\theta) = \frac{x_2}{l} \quad \text{and} \quad \sin(\theta) = \frac{y_2}{l},$$

where $l = \frac{d_E(F_1, F_2)}{2}$ and d_E is the Euclidean metric. Therefore,

$$F_1 = (-l \cos(\theta), -l \sin(\theta)) \quad \text{and} \quad F_2 = (l \cos(\theta), l \sin(\theta)). \quad (4)$$

Replacing the coordinates of F_1 and F_2 in the equation (3), the relation that determines the points $(x, y) \in \Phi_{F_1, F_2}$ is given by

$$|x + l \cos(\theta)| + |y + l \sin(\theta)| + |x - l \cos(\theta)| + |y - l \sin(\theta)| = 2a. \quad (5)$$

Figure 6: Angle between $\hat{r}$ and the x -axis.

We now rotate the taxi-ellipse Φ_{F_1, F_2} by varying the value of θ in order to analyze the changes that can occur in its geometric configuration. For this, we rotate the focal line $\hat{r}$ determined by F_1 and F_2 .

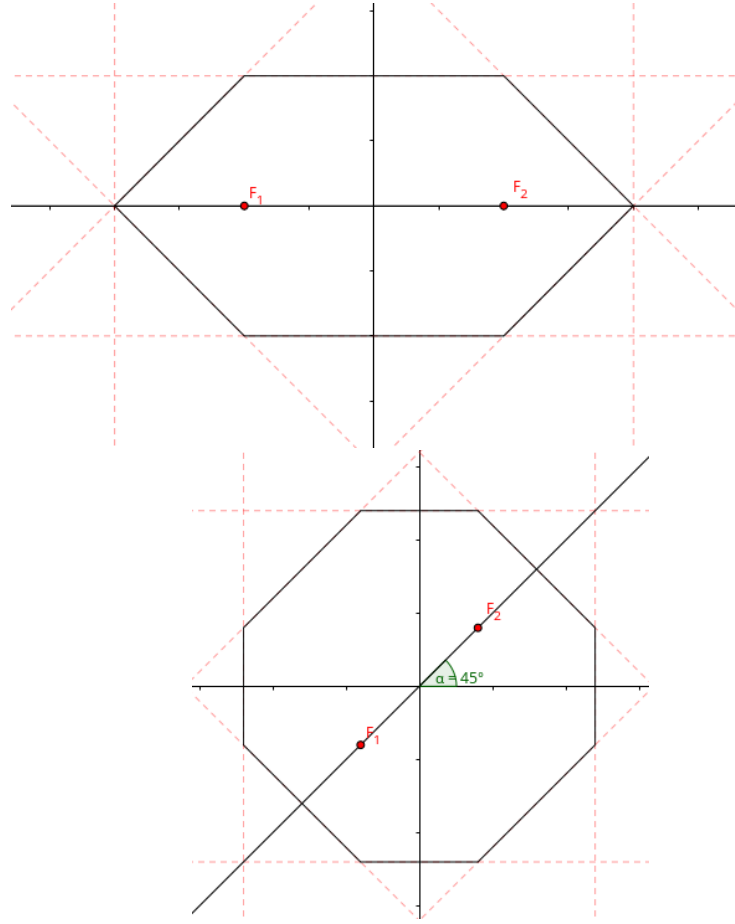
Considering $\theta = 0$ (foci on the x -axis), we have $F_1 = (-l, 0)$ e $F_2 = (l, 0)$. In this case, by using the equations of the line segments r, s, t, r', s', t', u and u' obtained in Section 2 for $x_1 = -x_2 = -l$ and $y_1 = y_2 = 0$, we obtain

$$\begin{aligned}
 r : & y = -x - a, \text{ for } x \leq -l \text{ and } y \leq 0, \\
 s : & x = -a, \text{ for } x \leq -l \text{ and } y = 0, \\
 t : & y = -a + l, \text{ for } -l \leq x \leq l \text{ and } y \leq 0, \\
 r' : & y = x - a, \text{ for } x \geq l \text{ and } y \leq 0, \\
 s' : & y = x + a, \text{ for } x \leq -l \text{ and } y \geq 0, \\
 t' : & y = -x + a, \text{ for } x \geq l \text{ and } y \geq 0, \\
 u : & x = a, \text{ for } x \geq l \text{ and } y = 0, \\
 u' : & y = a - l, \text{ for } -l \leq x \leq l \text{ and } y \geq 0.
 \end{aligned}$$

Therefore, the geometric configuration in this case is characterized by a hexagon, as we show in Figure 7.

Similarly, considering $\theta = \frac{\pi}{4}$ and using the equations of the line segments r, s, t, r', s', t', u and u' obtained in Section 2 for $x_1 = y_1 = -l\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $x_2 = y_2 = l\frac{\sqrt{2}}{2}$, we have an octagon as in

Figure 7.

Figure 7: Taxi-ellipse for $\theta = 0$ and $\theta = \frac{\pi}{4}$, respectively.

For $\theta = \frac{\pi}{3}$, taking $x_1 = -x_2 = -\frac{l}{2}$ and $y_1 = -y_2 = -l\frac{\sqrt{3}}{2}$ in the equations of the line segments r, s, t, r', s', t', u and u' obtained in Section 2, we obtain an octagon as in Figure 8.

The last analyzed case refers to $\theta = \frac{\pi}{2}$ (foci on the y -axis) whose geometric configuration is given by a hexagon, as in Figure 8.

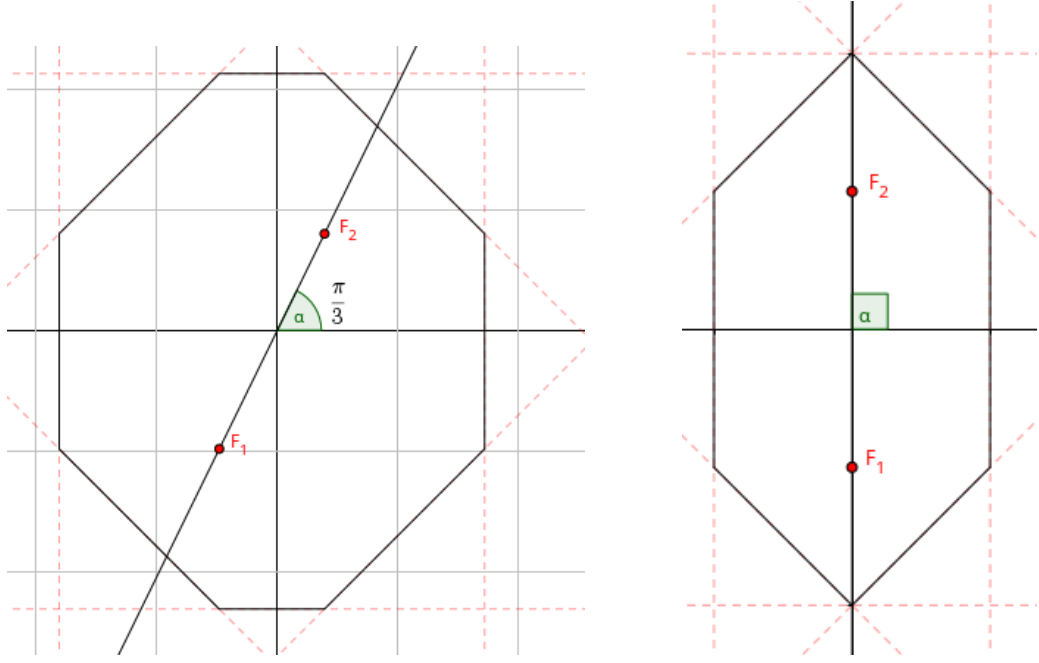


Figure 8: Taxi-ellipse for $\theta = \frac{\pi}{3}$ and $\theta = \frac{\pi}{2}$, respectively.

According to these examples, rotations of angles $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$ and $\frac{\pi}{2}$ clearly change the geometric configuration of a taxi-ellipse and, therefore, are not symmetries. In particular, the rotation $R_{\frac{\pi}{2}}$ is an isometry on $\mathbb{R}^2$ (Proposition 3.4) that is not a symmetry of Φ_{F_1, F_2} .

4. Equation for the regular octagon

The purpose of this section is to obtain an algebraic equation for the regular octagon in the plane. We first explore some properties of the internal angles of the taxi-ellipse Φ_{F_1, F_2} and then show that every regular octagon is a taxi-ellipse.

We restrict our study to the first quadrant, since Φ_{F_1, F_2} is symmetrical with respect to the coordinate axes under the Euclidean metric (see Proposition 2.2). Again, we write F_1 and F_2 as in (4), with $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. By the fundamental trigonometric identity, the equation (5) can be rewritten as

$$|x + l \cos \theta| + |y + l \sqrt{1 - \cos^2 \theta}| + |x - l \cos \theta| + |y - l \sqrt{1 - \cos^2 \theta}| = 2a. \quad (6)$$

Note that $x + l \cos \theta \geq 0$ and $y + l \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \geq 0$, since $\cos \theta \in [0, 1]$. Therefore, (6) becomes

$$x + l \cos \theta + y + l \sqrt{1 - \cos^2 \theta} + |x - l \cos \theta| + |y - l \sqrt{1 - \cos^2 \theta}| = 2a$$

whose equality implies in the following cases:

- a) If $x \geq l \cos \theta$ and $y \geq l\sqrt{1 - \cos^2 \theta}$, then $(x, y) \in \Phi_{F_1, F_2}$ satisfies the equation $x + y = a$.
- b) If $x \geq l \cos \theta$ and $y \leq l\sqrt{1 - \cos^2 \theta}$, then $(x, y) \in \Phi_{F_1, F_2}$ satisfies the equation $x = a - l\sqrt{1 - \cos^2 \theta}$.
- c) If $x \leq l \cos \theta$ and $y \geq l\sqrt{1 - \cos^2 \theta}$, then $(x, y) \in \Phi_{F_1, F_2}$ satisfies the equation $y = a - l \cos \theta$.

It is not necessary to consider the case $x \leq l \cos \theta$ and $y \leq l\sqrt{1 - \cos^2 \theta}$, because there are no points of Φ_{F_1, F_2} in this region. In fact, the symmetric properties of Φ_{F_1, F_2} allow it to be centered at the origin (see Figure 9).

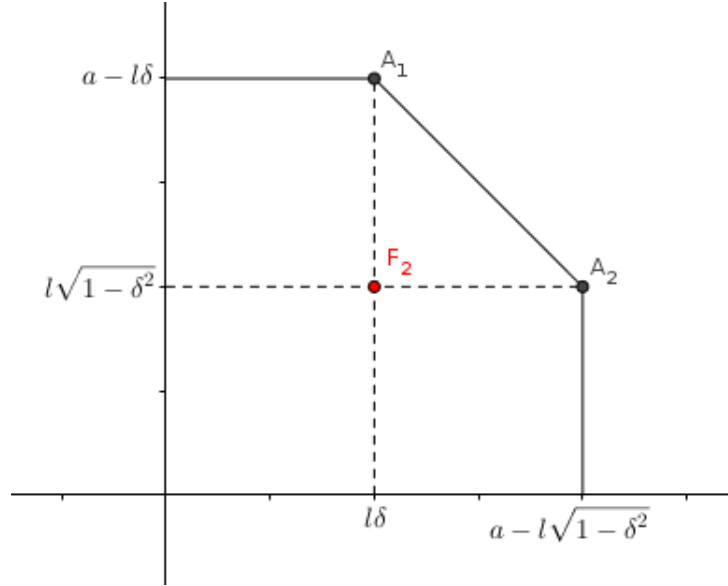


Figure 9: Cases a) – c) for $\delta = \cos \theta$.

First, we consider case a). If $x = l \cos \theta$, then $y = a - l \cos \theta$; if $y = l\sqrt{1 - \cos^2 \theta}$, then $x = a - l\sqrt{1 - \cos^2 \theta}$. Denoting $A_1 = (l \cos \theta, a - l \cos \theta)$ and $A_2 = (a - l\sqrt{1 - \cos^2 \theta}, l\sqrt{1 - \cos^2 \theta})$, the length C_1 of the line segment $\overline{A_1 A_2}$ is given by

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \sqrt{(l \cos \theta - (a - l\sqrt{1 - \cos^2 \theta}))^2 + (a - l \cos \theta - (l\sqrt{1 - \cos^2 \theta}))^2} \\
 &= \sqrt{(l(\cos \theta + \sqrt{1 - \cos^2 \theta}) - a)^2 + (l(\cos \theta + \sqrt{1 - \cos^2 \theta}) - a)^2} \\
 &= \sqrt{2} |l(\cos \theta + \sqrt{1 - \cos^2 \theta}) - a| \\
 &= \sqrt{2} (a - l(\cos \theta + \sqrt{1 - \cos^2 \theta})).
 \end{aligned}$$

The last equality follows because $a > c = \frac{1}{2}d_T(F_1, F_2)$, with $F_1 = (-l \cos \theta, -l\sqrt{1 - \cos^2 \theta})$ e $F_2 = (l \cos \theta, l\sqrt{1 - \cos^2 \theta})$. Thus, as we consider the first quadrant, we obtain

$$a > \frac{1}{2} \left(|l \cos \theta + l \cos \theta| + |l\sqrt{1 - \cos^2 \theta} + l\sqrt{1 - \cos^2 \theta}| \right) = l(\cos \theta + \sqrt{1 - \cos^2 \theta}),$$

which also implies that $C_1 \neq 0$. Therefore,

$$C_1 = \sqrt{2}(a - l(\cos \theta + \sqrt{1 - \cos^2 \theta})) > 0. \quad (7)$$

For case b), the points $(x, y) \in \Phi_{F_1, F_2}$ satisfy the equation $x = a - l\sqrt{1 - \cos^2 \theta}$. In this case, we calculate the length C_2 of the line segment $\overline{A_2 B_2}$, where $B_2 = (a - l\sqrt{1 - \cos^2 \theta}, 0)$ belongs to the x -axis (see Figure 10). Therefore,

$$C_2 = l\sqrt{1 - \cos^2 \theta}. \quad (8)$$

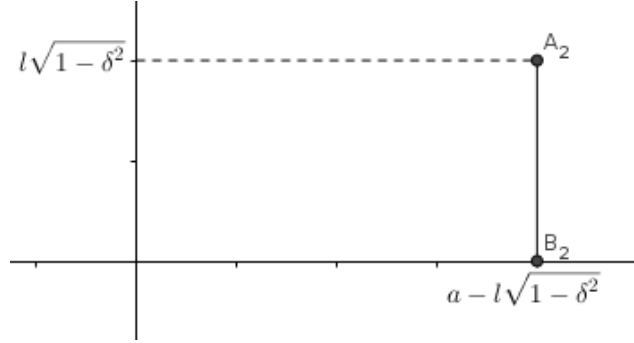
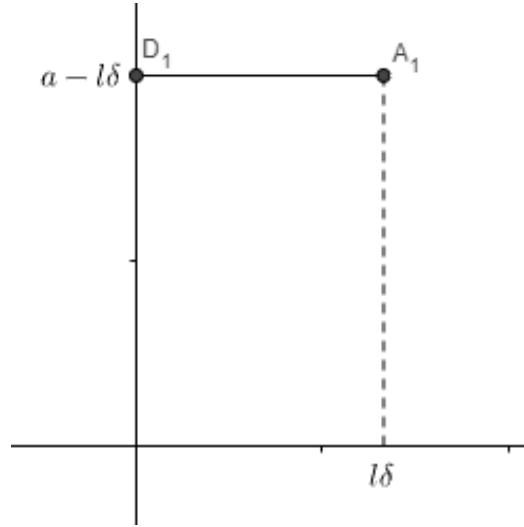


Figure 10: Line segment $\overline{A_2 B_2}$ for $\delta = \cos \theta$.

In case c), the points $(x, y) \in \Phi_{F_1, F_2}$ satisfy the equation $y = a - l \cos \theta$. In this case, we calculate the length C_3 of the line segment $\overline{D_1 A_1}$, where $D_1 = (0, a - l \cos \theta)$ belongs to the y -axis (see Figure 11). Thus, we obtain

$$C_3 = l \cos \theta. \quad (9)$$

Figure 11: Line segment $\overline{D_1A_1}$ for $\delta = \cos \theta$.

We remark that the lengths C_1 , C_2 and C_3 are also determined in (CRUZ, 2015, pp. 49-55) for the case $c = 1$ and $a = 2$. The values obtained in (7), (8) and (9) generalize this case. Based on these values, we now analyze the internal angles of the taxi-ellipse Φ_{F_1, F_2} . The following result allows us to obtain fundamental properties for the construction of the algebraic expression that characterizes the regular octagon.

Lemma 4.1 *Every taxi-ellipse has at least one internal angle equal to $\frac{3\pi}{4}$. Furthermore, all internal angles are equal if and only if C_2 and C_3 are non-zero.*

Proof: We have that C_1 is strictly positive, so $A_1 \neq A_2$. In addition, C_2 and C_3 do not vanish simultaneously. Clearly, the only relevant internal angles for our analysis are those represented in Figure 12 because the others are congruent to them, by Proposition 3.

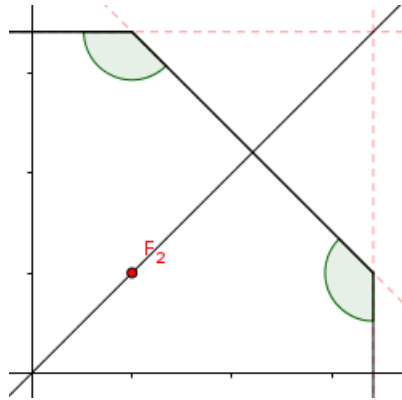


Figure 12: Internal angles.

As we restrict our study to the first quadrant, we compare the angles between the following three line segments:

- i) k : line segment of equation $x + y = a$, with $x \in [l \cos \theta, a - l\sqrt{1 - \cos^2 \theta}]$;
- ii) v : vertical line segment, if it exists, of equation $x = a - l\sqrt{1 - \cos^2 \theta}$, with $x > 0$ and $y \in [0, l\sqrt{1 - \cos^2 \theta}]$;
- iii) h : horizontal line segment, if it exists, of equation $y = a - l \cos \theta$, with $y > 0$ and $x \in [0, l \cos \theta]$.

The non-existence of v and h in the taxi-ellipse Φ_{F_1, F_2} is related to the possibility of C_2 and C_3 being equal to zero, respectively. The segment k always exists, since $C_1 > 0$. In addition, the internal angles of Φ_{F_1, F_2} are determined by the largest angle between the straight lines containing such segments. We divide the proof into three cases:

1. If $C_2 \neq 0$ and $C_3 \neq 0$, then the segments v and h exist, whose direction vectors have coordinates $(-1, 1)$ and $(1, 0)$, respectively. Therefore, the angle $\alpha \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ between k and h is determined by

$$\cos \alpha = \frac{\langle (-1, 1), (1, 0) \rangle}{\|(-1, 1)\| \|(1, 0)\|} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Hence $\alpha = \frac{3\pi}{4}$. Similarly, we conclude that the angle between the segments k and v is also $\frac{3\pi}{4}$, since its direction vectors have coordinates $(-1, 1)$ and $(0, -1)$, respectively.

2. If $C_2 = 0$, then the segment h exists (since $C_3 \neq 0$). The angle α between k and h has been calculated in the previous case, that is, $\alpha = \frac{3\pi}{4}$. In addition, as $C_2 = 0$, the segment k has its end point on the x -axis (see Figure 7 for $\theta = 0$). In this case, the angle $\beta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ between k and the x -axis is determined by

$$\cos \beta = \frac{\langle (-1, 1), (-1, 0) \rangle}{\|(-1, 1)\| \|(-1, 0)\|} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

that is, $\beta = \frac{\pi}{4}$. According to Proposition 3, the taxi-ellipse constructed in this case is composed of another line segment k' which is the reflection of k across the x -axis. The angle formed between k and k' is equal to $2\beta = \frac{\pi}{2}$.

3. If $C_3 = 0$, then the segment v exists (since $C_2 \neq 0$). The angle α between k and v has also been calculated in the first case, that is, $\alpha = \frac{3\pi}{4}$. Moreover, as $C_3 = 0$, the segment

k has its initial point on the y -axis (see Figure 8 for $\theta = \frac{\pi}{2}$). Similar to the previous case, the angle $\gamma \in [0, \frac{\pi}{2}]$ between k and the y -axis is determined by

$$\cos \gamma = \frac{\langle (1, -1), (0, -1) \rangle}{\|(1, -1)\| \|(0, -1)\|} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

that is, $\gamma = \frac{\pi}{4}$. By Proposition 3, the angle between k and the segment k'' , which is the reflection of k with respect to the y -axis, is equal to $2\gamma = \frac{\pi}{2}$.

Therefore, from Proposition 3, we conclude the following: in case 1 ($C_2 \neq 0$ and $C_3 \neq 0$), all internal angles of the taxi-ellipse Φ_{F_1, F_2} are equal to $\frac{3\pi}{4}$, which also proves the necessary condition for C_2 and C_3 to be non-zero; in cases 2 and 3 (either $C_2 = 0$ or $C_3 = 0$), at least one internal angle of Φ_{F_1, F_2} is equal to $\frac{3\pi}{4}$. In these cases, every internal angle of Φ_{F_1, F_2} is necessarily equal to $\frac{\pi}{2}$ or $\frac{3\pi}{4}$ and, therefore, Φ_{F_1, F_2} has distinct internal angles. This proves the sufficient condition for C_2 and C_3 to be non-zero. ■

Before the two main results of this section, we will use again the values of C_1, C_2 and C_3 obtained in (7)-(9) to obtain conditions so that a taxi-ellipse Φ_{F_1, F_2} has all its sides equal. For this, we denote by d_E the Euclidean metric and by d_T the taxicab metric. In addition, remember that $\hat{r}$ denotes the line determined by F_1 and F_2 and that $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ denotes the angle formed between $\hat{r}$ and the x -axis.

Lemma 4.2 *All sides of a taxicab ellipse Φ_{F_1, F_2} are equal if and only if*

$$a = (1 + \sqrt{2})l \quad \text{e} \quad C_2 = C_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}l,$$

where $l = \frac{d_E(F_1, F_2)}{2}$. In this case, the angle between the focal line $\hat{r}$ and the x -axis is $\frac{\pi}{4}$.

Proof: Clearly, a taxicab ellipse Φ_{F_1, F_2} has all its sides equal if and only if

$$\frac{C_1}{2} = C_2 = C_3. \tag{10}$$

According to (8) and (9), we have $C_2 = C_3$ if and only if

$$l(\cos \theta - \sin \theta) = 0,$$

which occurs if and only if $\theta = \frac{\pi}{4}$, because $l \neq 0$. In this case

$$C_1 = \sqrt{2}(a - \sqrt{2}l) \quad \text{and} \quad C_2 = C_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}l.$$

Thus, the first equality of (10) is valid if and only if $a - \sqrt{2}l = l$, that is¹, $a = (1 + \sqrt{2})l$. ■

As a consequence, we have the following theorem.

Theorem 4.3 *Every regular octagon is a taxicab ellipse.*

Proof: Let $\mathcal{O}$ be a regular octagon with sides measuring $\tilde{l} > 0$. Consider the circle $\mathcal{C}$ of center at the origin and radius $\frac{\sqrt{2}}{2}\tilde{l}$ under the Euclidean metric. Note that the intersection of $\mathcal{C}$ with the line $y = x$ occurs at the points $\tilde{F}_1 = (-\frac{\tilde{l}}{2}, -\frac{\tilde{l}}{2})$ and $\tilde{F}_2 = (\frac{\tilde{l}}{2}, \frac{\tilde{l}}{2})$. Thus, the line $\hat{r}$ determined by $\tilde{F}_1$ and $\tilde{F}_2$ has equation $y = x$ and forms an angle equal to $\frac{\pi}{4}$ with the x -axis. In addition,

$$d_E(\tilde{F}_1, \tilde{F}_2) = \sqrt{2}\tilde{l}.$$

Consider $\tilde{F}_1$ and $\tilde{F}_2$ as the foci of the taxi-ellipse $\Phi_{\tilde{F}_1, \tilde{F}_2}$. Since the angle θ between $\hat{r}$ and the x -axis is equal to $\frac{\pi}{4}$, it follows from (8) and (9) that

$$C_2 = C_3 = \frac{\sqrt{2}\tilde{l}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\tilde{l}}{2}.$$

Therefore, taking

$$a = (1 + \sqrt{2})\frac{\sqrt{2}\tilde{l}}{2} = (\frac{\sqrt{2}}{2} + 1)\tilde{l},$$

we have by Lemma 4.2 that all sides of $\Phi_{\tilde{F}_1, \tilde{F}_2}$ are equal, namely equal to $\tilde{l}$. Since $C_2 \neq 0$ and $C_3 \neq 0$, it follows from Lemma 4.1 that all the internal angles of $\Phi_{\tilde{F}_1, \tilde{F}_2}$ are equal to $\frac{3\pi}{4}$, that is, $\Phi_{\tilde{F}_1, \tilde{F}_2}$ is a regular octagon with sides measuring $\tilde{l}$. Therefore, $\mathcal{O} = \Phi_{\tilde{F}_1, \tilde{F}_2}$. ■

Based on the previous theorem, we obtain an algebraic equation for the regular octagon with sides measuring $\tilde{l}$.

Corollary 4.4 *Let $\mathcal{O}$ be the regular octagon centered on the origin with sides measuring $\tilde{l}$. Then every point $(x, y) \in \mathcal{O}$ satisfies the equation*

$$|x + \frac{\tilde{l}}{2}| + |y + \frac{\tilde{l}}{2}| + |x - \frac{\tilde{l}}{2}| + |y - \frac{\tilde{l}}{2}| = (\sqrt{2} + 2)\tilde{l}.$$

Proof: By the proof of Theorem 4.3, $\mathcal{O}$ is a taxi-ellipse with foci $\tilde{F}_1 = (-\frac{\tilde{l}}{2}, -\frac{\tilde{l}}{2})$ and $\tilde{F}_2 = (\frac{\tilde{l}}{2}, \frac{\tilde{l}}{2})$ and with $a = (\frac{\sqrt{2}}{2} + 1)\tilde{l}$. Then we use the equation (3). ■

¹Note that $a > c$, as required in Definition 2.1. In fact, it follows from (LIMA, 2014, p. 6) that $c = \frac{1}{2}d_T(F_1, F_2) \leq d_E(F_1, F_2) = 2l$. So $a = (1 + \sqrt{2})l > 2l \geq c$.

It is natural now to ask whether there are other regular polygons that are taxi-ellipses. The answer to this question is negative, as the following theorem shows.

Theorem 4.5 *The only regular polygons that are taxi-ellipses are regular octagons.*

Proof: By Lemma 4.1, every taxi-ellipse has at least one internal angle equal to $\frac{3\pi}{4}$. As every regular polygon has its internal angles equal and the only ones with internal angles equal to $\frac{3\pi}{4}$ are octagons, the result follows. ■

References

- 1 CHICIU, A. **Conics in different metrics**. 2012. Masters dissertation – Jacksonville University, Jacksonville, EUA.
- 2 CRUZ, E.O. **Geometria do táxi: a táxi-elipse**. 2015. Mestrado Profissional em Matemática – Universidade Federal do Piauí, Teresina, Piauí.
- 3 DREILING, K. Triangle Construction in Taxicab Geometry. **Mathematics Teacher**, v. 105, n. 6, p. 474–478, 2012.
- 4 GEOGEBRA. 2025. Available from: <www.geogebra.org>. Visited on: 29 Apr. 2025.
- 5 HANSON, J. R. A visit to taxicab geometry. **International Journal of Mathematical**, v. 43, n. 8, p. 1109–1123, 2012.
- 6 INY, D. Taxicab geometry: another look at conic sections. **IIIE Journal**, v. 7, n. 10, p. 645–647, 1984.
- 7 KRAUSE, E. F. **Taxicab Geometry - An Adventure in Non-Euclidian Geometry**. New York, EUA: Dover Publications, 1986.
- 8 KUNWAR, R. Exploring concepts and applications of taxicab geometry. **International Journal of Development Research**, v. 8, n. 11, p. 24200–24205, 2018.
- 9 LIMA, E. L. **Curso de Análise Vol. 2**. Rio de Janeiro: SBM: Projeto Euclides, 2014.
- 10 LOIOLA, C. A. G.; COSTA, C. S. The conics in taxicab geometry. **Ciência e Natura**, v. 37, p. 179–191, 2015.
- 11 PETROVIC, M. et al. **Geometry of some taxicab curves**. 2025. Available from: <<https://arxiv.org/abs/1405.7579>>. Visited on: 2014.
- 12 REINHARDT, C. Taxi Cab Geometry: History and Applications. **The Mathematics Enthusiast**, v. 2, n. 1, p. 38–64, 2005.
- 13 SOWELL, K. O. Taxicab Geometry - A New Slant. **Mathematics Magazine**, v. 62, n. 4, p. 238–248, 1989.
- 14 THOMPSON, K.; DRAY, T. Taxicab angles and trigonometry. **IIIE Journal**, v. 11, n. 2, p. 87–96, 2000.



Investimentos em renda fixa: rentabilidade nominal e real da poupança, CDB, LCI e LCA no Brasil entre 2004 e 2024

Andressa Sanches (acadêmica) – Email: andressadsanches@gmail.com

Laerte Bemm (orientador) – Email: lbemm2@uem.br

Resumo: O presente estudo tem como objetivo analisar os investimentos em renda fixa no Brasil entre 2004 e 2024, com foco em opções como poupança, CDB e LCI/LCA. Exploramos conceitos essenciais de matemática financeira, como juros compostos, inflação e tributação, para comparar os rendimentos nominais e reais dessas aplicações. As simulações mostram que a isenção de imposto de renda nas LCIs/LCAs frequentemente as tornam mais vantajosas em relação aos CDBs, mesmo com rendimentos menores. No entanto, é essencial considerar as condições específicas oferecidas pelas instituições financeiras. Já a poupança, embora popular, apresenta desempenho inferior, especialmente quando ajustada pela inflação. Ao final, o estudo reforça a importância de avaliar cuidadosamente as alternativas de investimentos, considerando fatores como rentabilidade e preservação do poder de compra.
Palavras-chave: Rentabilidade Nominal e Real; Preservação do Poder de Compra; Simulações Financeiras; Comparação de Investimentos.

Abstract: The present study aims to analyze fixed-income investments in Brazil between 2004 and 2024, focusing on options such as savings accounts, CDBs, and LCIs/LCAs. We explore essential financial mathematics concepts, including compound interest, inflation, and taxation, to compare the nominal and real returns of these investments. The simulations show that the income tax exemption on LCIs/LCAs often makes them more advantageous compared to CDBs, even with lower yields. However, it is crucial to consider the specific conditions offered by financial institutions. Savings accounts, while popular, exhibit inferior performance, especially when adjusted for inflation. Ultimately, the study emphasizes the importance of carefully evaluating investment alternatives, taking into account factors such as profitability and the preservation of purchasing power.

Keywords: Nominal and Real Profitability; Preservation of Purchasing Power; Financial Simulations; Investment Comparison.

1. Introdução

A matemática financeira está profundamente inserida em nosso cotidiano, podendo ser aplicada em situações como a análise de juros em empréstimos e

investimentos, na compreensão do impacto da inflação no valor do dinheiro e na identificação da influência da taxa Selic na economia. Entender esses e outros conceitos não é apenas útil, mas essencial para lidarmos com o dinheiro de forma consciente, estratégica e crítica. A matemática financeira oferece ferramentas que ajudam a avaliar custos e benefícios em operações financeiras, as mudanças no poder de compra ao longo do tempo e a compreender melhor o comportamento do mercado e suas repercussões na economia. Mais detalhes, podem ser encontrados em [1], [4], [6], [8] e [9].

Por exemplo, saber calcular e comparar os juros de diferentes tipos de empréstimos e financiamentos é uma habilidade fundamental. Isso facilita a renegociação de dívidas, a avaliação de projetos e a análise de preços e descontos. Outro conceito crucial é a inflação que mede a perda de valor do dinheiro ao longo do tempo. É evidente que R\$1.000,00 hoje têm maior poder de compra do que a mesma quantia daqui a um ano. Para proteger o dinheiro dessa desvalorização, uma estratégia é investi-lo em instituições financeiras que ofereçam retornos suficientes para compensar a inflação.

Segundo a 6ª edição do *Raio X do Investidor Brasileiro* da ANBIMA, publicada em 2022, a caderneta de poupança foi o investimento mais utilizado no país, escolhida por 26% dos brasileiros. Em comparação, fundos de investimento e títulos privados ficaram empatados em segundo lugar, com apenas 4% cada (veja [24]). Apesar de sua popularidade, a caderneta de poupança possui algumas limitações significativas. Seus rendimentos, por exemplo, são creditados apenas a cada 30 dias, o que significa que retiradas feitas antes desse período não geraram rendimento algum. Além disso, as taxas de juros são geralmente baixas, ficando em torno de 0,6% ao mês, o que dificulta a proteção do dinheiro contra a inflação, especialmente em cenários de alta nos preços. Por outro lado, a poupança oferece vantagens que justificam sua preferência por uma parcela significativa da população. Entre essas vantagens estão a liquidez diária, que permite saques a qualquer momento, e a isenção de Imposto de Renda, o que simplifica seu uso e aumenta sua atratividade, principalmente para investidores iniciantes.

Embora a preferência pela poupança seja compreensível, existem outras opções de investimentos em renda fixa (veja [8]) que geralmente oferecem retornos mais vantajosos. Entre elas estão:

- Letras do Tesouro Nacional (LTN)

- Letras Financeiras do Tesouro (LFT);
- Certificados de Depósito Bancário (CDB);
- Recibos de Depósito Bancário (RDB);
- Letras de Crédito Imobiliário (LCI);
- Letras de Crédito do Agronegócio (LCA).

O objetivo deste trabalho é apresentar, de maneira clara, acessível e didática as opções de investimento em renda fixa supracitados, visando ampliar o conhecimento da população sobre essas alternativas. Para isso, realizaremos simulações de rendimentos nominais com base nas séries históricas da taxa SELIC e da poupança (veja as séries em [27]). Além disso, serão estimados os rendimentos reais, ou seja, descontados os efeitos da inflação, para diferentes tipos de aplicações como poupança, LCI, LCA e CDB. Com isso, esperamos contribuir para uma tomada de decisão mais informada e estratégica por parte dos investidores, em consonância com outros trabalhos, dos quais citamos [8], [21], [22] e [23].

O trabalho está organizado em três seções: na primeira, abordam-se os principais conceitos e fundamentos da matemática financeira; na segunda, são apresentados diferentes tipos de investimentos em renda fixa, acompanhados de informações sobre os impostos incidentes sobre seus rendimentos e outros aspectos relevantes; na terceira e última seção, são realizadas simulações de rendimentos nominais e reais, considerando os diferentes tipos de investimentos descritos na seção anterior.

2. Um Resumo de Matemática Financeira

No âmbito financeiro, compreender conceitos fundamentais como **capital inicial**, **período de investimento**, **juros** e seus diferentes tipos, além de fatores como **inflação**, é essencial para tomar decisões mais conscientes e estratégicas. Esses elementos formam a base para análise de aplicações financeiras, permitindo avaliar tanto os custos de empréstimos quanto os retornos de investimentos.

Nesta seção, exploraremos alguns dos principais conceitos que norteiam o universo dos investimentos, como o capital inicial, o período aplicado, os juros simples e compostos e indicadores econômicos como o IPCA e o IGP-M. Além disso, abordaremos

conceitos fundamentais como a relação entre juros nominais e reais, taxas equivalentes, e outros instrumentos financeiros como a taxa Selic, CDI e os títulos de dívida. Esta fundamentação é crucial para compreender como funcionam os cálculos e a dinâmica das aplicações financeiras que abordaremos nas próximas seções e leitor que tiver interesse em se aprofundar nesse assunto, pode encontrar maiores detalhes em [2], [9], [25] e [26].

1. CAPITAL INICIAL

Ao realizar um investimento, é essencial possuir um valor específico para ser aplicado. Esse valor inicial é chamado de **capital inicial**. Em outras palavras, o capital inicial é o montante que o investidor destina ao início de um investimento ou negócio. Ele representa a base sobre a qual calcular-se-á os rendimentos futuros, sendo, portanto, um dos principais elementos de planejamento financeiro.

2. JUROS (J)

Os **juros** representam a remuneração recebida por quem disponibiliza o capital inicial (C). Desta forma, os juros podem ser compreendidos de duas formas principais: como o custo associado a um empréstimo ou como o retorno obtido em um investimento.

3. TAXA DE JURO (i)

A taxa de juros é a medida que expressa o valor dos juros como uma porcentagem em relação ao capital, por unidade de tempo. Isso significa que a taxa de juros é a porcentagem que mostra o rendimento do capital investido para cada unidade de tempo. Sua importância se dá porque padroniza o cálculo do rendimento ou do custo, tornando mais fácil comparar diferentes investimentos ou empréstimos. Pode ser expressa em diferentes períodos, como dias, meses, anos, etc. Porém, é essencial que tal período seja o mesmo em todos os cálculos para evitar erros.

4. PRAZO OU PERÍODO (n)

Em um investimento financeiro, o **prazo ou período**, é o intervalo de tempo que o capital fica aplicado, ou seja, é o tempo decorrido entre o momento do investimento ou empréstimo e a data de saque ou pagamento. Embora o prazo possa ser expresso em diferentes unidades de tempo (mais comuns incluem diário, mensal, trimestral e anual), é

imprescindível que, para fins de cálculos, esteja na mesma unidade da taxa de juros, garantindo a consistência dos resultados. Cada tipo de período atende a diferentes estratégias e objetivos financeiros, ajustando-se às necessidades dos investidores e às características específicas de cada aplicação.

5. MONTANTE FINAL

O **montante final** é o valor acumulado ao término de um investimento, sendo composto pelo capital inicial somado aos juros gerados durante o período de aplicação. Ele representa o total recebido pelo investidor no final de um ciclo de investimento. Em termos práticos, o montante final reflete os resultados de uma aplicação financeira, incluindo o valor inicial e os juros acumulados.

6. JUROS COMPOSTOS

A principal forma de calcular os juros de um investimento é o regime de **juros compostos**. Neste regime os juros gerados em cada período são adicionados ao capital, formando o montante acumulado ao final daquele período. Esse montante, por sua vez, passa a render novos juros no período seguinte, resultando em um crescimento exponencial do capital inicial aplicado. Em outras palavras, os juros acumulados são incorporados ao capital inicial, servindo como base para o cálculo dos juros nos períodos subsequentes. Matematicamente, se um capital inicial C é investido a uma taxa de juros i (ao período), então o montante M ao final de n períodos é dado pela fórmula:

$$M = C \cdot (1 + i)^n.$$

7. TAXAS DE JUROS EQUIVALENTES

As **taxas equivalentes** são taxas de juros definidas em diferentes unidades de tempo, mas que, quando aplicadas a um mesmo capital e pelo mesmo prazo, resultam no mesmo montante final.

Considere uma taxa de juros I , definida para um período "grande" T , e uma taxa de juros i , definida para um período menor t . Suponha também que $T = n \cdot t$, para algum inteiro n .

Se um capital C é aplicado à taxa I durante um único período T , o montante ao final desse período será dado por:

$$M = C \cdot (1 + I).$$

Por outro lado, se o mesmo capital C for aplicado à taxa i , mas capitalizado n vezes, então o montante ao final do período $T = n \cdot t$ será:

$$M = C \cdot (1 + i)^n.$$

Igualando os dois montantes:

$$C \cdot (1 + I) = C \cdot (1 + i)^n.$$

Dividindo ambos os lados por C (desde que $C \neq 0$):

$$1 + I = (1 + i)^n.$$

onde $1 + I$ é o fator de acumulação para o período maior T , e $(1 + i)^n$ é o fator de acumulação obtido pela composição de n períodos menores t .

Isolando I :

$$I = (1 + i)^n - 1.$$

onde I representa a taxa equivalente para o período T .

Portanto, para que as taxas i e I sejam equivalentes, elas devem satisfazer essa relação.

8. INFLAÇÃO

A **taxa inflação** (ou simplesmente **inflação**) é um índice percentual que indica a perda do poder de compra ao longo do tempo, caracterizada pelo aumento persistente e generalizado dos preços de bens e serviços. Em períodos com taxa de inflação alta, uma mesma quantia adquire menos produtos ou serviços do que anteriormente. Existem vários índices utilizados para medir a inflação (veja, por exemplo, [17], [18],

[19] e [20]), entretanto neste trabalho iremos abordar somente os dois mais importantes, que citaremos a seguir:

- O **IPCA** (Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo) é um indicador da inflação, pois mostra o quanto os preços dos produtos e serviços que as famílias brasileiras consomem aumentam ao longo do tempo. O IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística) coleta os preços de uma cesta de produtos e serviços, que representa o consumo típico das famílias brasileiras. Essa cesta inclui alimentos, vestuário, habitação, transporte, saúde e outros itens. Ao comparar os preços de um mês para o outro, é possível calcular a variação e, conseqüentemente, o IPCA. Ao acompanhar a variação desse índice, é possível ter uma ideia mais clara sobre o poder de compra do dinheiro e o impacto da inflação na vida das pessoas.
- O **IGP-M** (Índice Geral de Preços do Mercado) é um indicador econômico que mede a inflação brasileira, mas com um enfoque na variação de preços em todas as etapas de produção de um bem ou serviço, desde a matéria-prima até a venda final. O IGP-M é calculado pela Fundação Getúlio Vargas (FGV) e leva em consideração três índices:
 - i. **IPA** (Índice de Preços por Atacado): Mede a variação dos preços de produtos vendidos no atacado, ou seja, antes de chegar ao varejo.
 - ii. **IPC** (Índice de Preços ao Consumidor): Mede a variação dos preços de produtos e serviços para o consumidor final, de forma semelhante ao IPCA, mas com uma metodologia diferente (ambos medem a inflação com base no custo de vida das famílias, mas usam faixas de renda diferentes).
 - iii. **INCC** (Índice Nacional de Custo da Construção): Mede a variação dos custos da construção civil.

O IGP-M é amplamente utilizado como indexador em contratos de aluguel, financiamentos, e outros tipos de contratos, servindo como base para reajustes.

9. TAXA DE JUROS NOMINAIS

A taxa de **juros nominais** é utilizada para calcular o retorno de um investimento ou o custo de um empréstimo. Essa taxa, entretanto, não considera o impacto da inflação,

nem os custos dos impostos, quando esses se aplicam. Assim, a taxa de juros nominais determina apenas os valores brutos dos juros. É importante entender sua relação com outras taxas, como a real, para avaliar o verdadeiro ganho ou custo financeiro.

10. TAXA DE JUROS REAIS

Diferentemente da nominal, a taxa de **juros reais** considera a inflação, refletindo o ganho efetivo de um investimento ou o custo real de um empréstimo. A relação entre as taxas nominais, reais e a inflação de um determinado período é dada pela fórmula:

$$1 + i_{nominal} = (1 + i_{real}) \cdot (1 + i_{inflação}),$$

em que:

$i_{nominal}$: é a taxa de juros nominais;

i_{real} : é a taxa de juros reais;

$i_{inflação}$: é a taxa de inflação.

Assim, se um capital inicial C foi investido a uma taxa nominal $i_{nominal}$, então o montante nominal $M_{nominal}$, será dado por

$$M_{nominal} = C \cdot (1 + i_{nominal}) = C \cdot (1 + i_{real}) \cdot (1 + i_{inflação}).$$

A partir dessa relação, o montante real M_{real} pode ser expresso como:

$$M_{real} = C \cdot (1 + i_{real}) = \frac{M_{nominal}}{(1 + i_{inflação})}.$$

11. TAXA SELIC

A **taxa Selic** (Sistema Especial de Liquidação e de Custódia), definida pelo Comitê de Política Monetária (Copom) do Banco Central do Brasil (veja as atas em [3]), é um instrumento da política monetária brasileira, sendo ajustada para controlar a inflação e estimular ou conter o crescimento econômico. Ela é a taxa básica de juros da economia brasileira, ou seja, o índice utilizado para definir os juros cobrados por uma instituição financeira. A taxa Selic é utilizada como referência para diversas operações financeiras e influencia diretamente quase todas as taxas de juros praticadas no mercado financeiro, como as taxas de empréstimos, financiamentos e aplicações financeiras.

12. TAXA REFERENCIAL

A **Taxa Referencial** (TR) é um índice financeiro cuja principal finalidade é servir como referência para diversas operações financeiras, sendo amplamente utilizada na remuneração das cadernetas de poupança e nos financiamentos habitacionais vinculados ao Sistema Financeiro de Habitação (SFH) (veja [5]). Seu cálculo é baseado nos valores da **Taxa Básica Financeira** (TBF), com a aplicação de um redutor. A TBF, por sua vez, é determinada a partir da média ponderada das taxas de juros praticadas pelas 20 maiores instituições financeiras do país.

13. TAXA ACUMULADA

A **Taxa Acumulada** à medida do resultado total de uma sequência de taxas aplicadas ao longo do tempo. Para calcular a taxa acumulada, é necessário conhecer os valores das taxas individuais e considerar que cada taxa será aplicada sobre o valor resultante da anterior, como ilustrado na fórmula abaixo:

$$i_a = [(1 + i_1) \cdot (1 + i_2) \cdot (1 + i_3) \cdot \dots \cdot (1 + i_n)] - 1,$$

em que:

i_a : é a taxa acumulada;

$i_1, i_2, i_3, \dots, i_n$: são as taxas de variação no período.

14. TÍTULOS

No mercado financeiro, **Títulos** são instrumentos que representam uma dívida emitida por entidades, como empresas, governos ou instituições financeiras, com o objetivo de captar recursos. Esses contratos estabelecem o compromisso da entidade emissora de devolver o capital investido, acrescido dos juros acumulados ao longo do período de empréstimo. Os títulos podem assumir diversas formas, como títulos públicos, certificados de depósito e outros. Ao adquirirem títulos, os investidores estão, essencialmente, emprestando dinheiro à instituição emissora em troca de uma remuneração fixa ou variável, com base nos juros acordados. Devido à sua segurança e

previsibilidade de retorno, os títulos são frequentemente considerados uma opção atrativa para aqueles que buscam rendimento estável e com risco controlado.

Vale destacar que os títulos possuem períodos de carência e vencimento definidos no momento da emissão. Durante o período de carência, o investidor não pode resgatar o valor aplicado, e qualquer retirada antecipada resultará na perda dos rendimentos acumulados até então. No entanto, após o término da carência, o título continuará a render conforme as condições estabelecidas no contrato até a data de vencimento, permitindo o resgate do saldo aplicado a qualquer momento, se assim desejar o investidor. Mais

15. CERTIFICADO DE DEPÓSITO INTERBANCÁRIO

O **Certificado de Depósito Interbancário (CDI)** é um título emitido por instituições financeiras para regulamentar as operações de empréstimos entre bancos, com prazo de um dia. A **taxa do CDI** é bastante próxima da taxa Selic, valendo sempre 0,1% a menos que a Selic, e é muito utilizada como referência no mercado de renda fixa, em especial para investimentos em produtos financeiros de baixo risco, como Certificados de Depósito Bancário, Letras de Crédito Imobiliário, entre outros. Embora o CDI seja uma taxa de empréstimos de curtíssimo prazo, ele é expresso anualmente, com base no ano bancário de 252 dias úteis, em vez dos 365 dias do ano civil. Isso ocorre porque, no mercado financeiro, considera-se que o ano bancário tem 252 dias úteis, que são os dias em que as operações de crédito efetivamente acontecem.

3. Introdução à Renda Fixa e Seus Instrumentos de Investimento

A **renda fixa** representa uma classe de investimentos caracterizada por sua previsibilidade e segurança. A principal característica desse tipo de investimento é a garantia de um retorno mínimo, que inclui ao menos o valor originalmente aplicado, diferentemente de investimentos mais voláteis, como ações, onde o capital investido está sujeito a oscilações de mercado.

No Brasil, é possível investir em renda fixa por meio de diversas plataformas, incluindo bancos tradicionais, corretoras e programas como o Tesouro Direto. Além disso, instituições financeiras oferecem uma ampla gama de investimentos em renda fixa, como **CDBs**, **RDBs**, **LCIs** e **LCAs**, cada um com características específicas, prazos e regimes de tributação, atendendo às diferentes necessidades e objetivos dos investidores.

A segurança dos investimentos em renda fixa é reforçada pelo FGC (Fundo Garantidor de Créditos), que protege aplicações em caso de insolvência das instituições financeiras, garantindo uma cobertura mínima aos investidores.

Esta seção abordará os tipos mais tradicionais de investimento em renda fixa, suas características, formas de remuneração, mecanismos de tributação e segurança para este tipo de investimentos.

16. RENDA FIXA

O conceito de **renda fixa** refere-se a investimentos baseados em títulos de dívida, nos quais o investidor concede um empréstimo a uma entidade, como o governo ou instituições financeiras privadas, em troca de uma remuneração previamente acordada. A principal característica desse regime é a garantia de retorno, ainda que mínimo, assegurando que, ao final do período de investimento, o investidor receberá o capital originalmente aplicado somado aos juros do período (veja [9], [21] e [22]).

Essa garantia de retorno distingue os investimentos de renda fixa de outros, como ações, que estão sujeitos à volatilidade do mercado e podem resultar em perdas financeiras, reduzindo o valor investido a uma fração do montante inicial.

Os títulos de renda fixa podem oferecer diferentes modelos de retorno, definidos no momento da compra:

- **Taxa Pré-fixada:** o rendimento é fixado no início do investimento, garantindo previsibilidade ao investidor.
- **Taxa Pós-fixada:** o rendimento está vinculado a indicadores econômicos, como CDI, Selic, IPCA, IGP-M, entre outros, com retorno apurado apenas ao final do período de aplicação.
- **Taxa Híbrida:** combina características dos dois modelos supracitados, com parte do retorno pré-fixado e outra parte atrelada a um indicador variável.

Neste trabalho, iremos abordar exclusivamente os investimentos em renda fixa nos modelos de Taxas Pré-fixadas e Taxas Pós-fixadas, que são amplamente oferecidos por diversas instituições e plataformas, como bancos tradicionais, corretoras, o programa Tesouro Direto, certificados de operações estruturadas, entre outros mercados.

17. TESOIRO DIRETO

Criado pelo Governo Brasileiro em 2002, e regulamentada em [10], o **Tesouro Direto** é um programa que permite que pessoas físicas adquiram títulos públicos federais de forma direta, sem a necessidade de intermediação de instituições financeiras. Esse modelo oferece ao investidor maior autonomia para realizar suas aplicações, uma vez que a negociação ocorre diretamente com o tomador, que, neste caso, é o Governo Federal.

Os títulos disponibilizados no Tesouro Direto são emitidos pelo Tesouro Nacional e têm como finalidade captar recursos para financiar áreas prioritárias, como infraestrutura, saúde e educação. Além disso, o Tesouro Direto é amplamente reconhecido como uma alternativa acessível e segura para investidores de diversos perfis.

Essencialmente, os títulos do Tesouro Direto se dividem em duas categorias básicas:

- **Letras do Tesouro Nacional (LTN):** atualmente conhecidas como Tesouro Pré-Fixado, são certificados garantidos pela Bolsa de Mercados e Futuros (B3), esses títulos se caracterizam por terem taxas pré-fixadas, ou seja, a rentabilidade é definida no momento da compra.
- **Letras Financeiras do Tesouro (LFT):** denominadas atualmente como Tesouro Pós-Fixado, são títulos cuja rentabilidade é pós-fixada e está vinculada à taxa Selic. Assim, ao contrário das LNTs, a rentabilidade nominal da LFT só é conhecida no momento do resgate ou vencimento do título. O cálculo da remuneração ocorre com base na taxa Selic diária (DU), acumulada entre a data de compra e a data de vencimento. Além disso, o rendimento final pode ser influenciado por ágio ou deságio no momento da aquisição do título:

- **Ágio:** quando o preço pago pelo título está acima de seu valor nominal, resultando em rendimentos menores que 100% da Selic.
- **Deságio:** quando o preço de compra está abaixo do valor nominal, proporcionando rendimentos superiores a 100% da Selic.

18. INSTITUIÇÕES FINANCEIRAS PRIVADAS

As **instituições financeiras privadas**, como bancos comerciais, cooperativas de crédito, corretoras e fundos de investimento, também oferecem uma variedade de opções para aplicação em renda fixa. Essas entidades atuam como intermediárias entre investidores e tomadores de recursos, possibilitando a realização de aplicações financeiras por meio de produtos específicos.

Nessa relação, o investidor aplica seus recursos por intermédio da instituição, que, por sua vez, utiliza esses valores para financiar operações de crédito ou outras atividades financeiras. Assim, as instituições privadas desempenham uma conexão entre investidores e o mercado, proporcionando acesso a diversas modalidades de investimento, dentre os quais destacamos os seguintes:

a) CADERNETA DE POUPANÇA

A Caderneta de Poupança é uma das opções de investimento mais utilizadas devido à sua simplicidade, isenção de imposto de renda para pessoa física e liquidez diária. A rentabilidade da caderneta de poupança é definida pelo Banco Central e é igual em todas as instituições financeiras que oferecem esse tipo de investimento. Diferentemente de outros tipos de investimentos, a rentabilidade da poupança não é calculada diariamente, mas sim em ciclos de 30 dias e é definida de acordo com a taxa Selic vigente, conforme descrito abaixo:

- **Se a taxa Selic for superior a 8,5% ao ano (a.a.):**
 - Pessoa física: TR + 0,5% ao mês (a.m.);
 - Pessoa jurídica: TR + 1,5% ao trimestre (a.t.).
- **Se a taxa Selic for igual ou inferior a 8,5% a.a.:**
 - Pessoa física e jurídica: TR + 70% da taxa Selic.

É importante destacar que esta forma de remuneração é válida apenas para aplicações realizadas a partir de **03 de maio de 2012**. Para investimentos efetuados antes dessa data, a regra de rentabilidade é fixa:

- **Pessoa física:** TR + 0,5% a.m.;
- **Pessoa jurídica:** TR + 1,5% a.t.

b) CERTIFICADO DE DEPÓSITO BANCÁRIO

De acordo com Assaf Neto e Lima, os **Certificados de Depósito Bancário (CDB)** são títulos de renda fixa utilizados pelas instituições financeiras como forma de captação de recursos. Nesse tipo de investimento, o investidor empresta seu capital ao banco em troca de uma remuneração acordada previamente.

Os CDBs podem ser classificados quanto à sua liquidez:

- **Liquidez diária:** permitem o resgate a qualquer momento;
- **Prazo de vencimento:** o capital investido, somado à rentabilidade, só pode ser resgatado na data estipulada no momento da aplicação.

A rentabilidade dos CDBs pode ser **pré-fixada**, definida no momento da aplicação, ou **pós-fixada**, geralmente atrelada ao CDI. O rendimento dos CDBs está sujeito ao imposto de renda, que é calculado com base na tabela regressiva que apresentaremos um pouco mais adiante. O risco associado aos CDBs é considerado baixo, uma vez que esses títulos contam com a proteção do Fundo Garantidor de Créditos (FGC) que também será abordado mais adiante. Por sua flexibilidade e possibilidade de adequação às diferentes necessidades de prazo e rentabilidade, o CDB pode ser considerado uma boa forma de investimento de renda fixa.

c) RECIBO DE DEPÓSITO BANCÁRIO

Conforme o Banco Central, o **Recibo de Depósito Bancário (RDB)** apresenta características semelhantes às do CDB, com algumas diferenças importantes. O RDB é **inegociável** e **intransferível**, o que significa que o investidor não pode vender o título antes da data de vencimento. Além disso, o RDB não oferece **liquidez diária**, de modo que o valor investido só poderá ser resgatado na data previamente estipulada entre as

partes no momento da aplicação. Portanto, essa modalidade é ideal para investidores que podem manter o capital aplicado até o vencimento, visando uma rentabilidade mais previsível e garantida.

d) LETRAS DE CRÉDITO IMOBILIÁRIO E DO AGRONEGÓCIO

A **Letra de Crédito Imobiliário (LCI)** é um título de crédito lastreado em financiamentos imobiliários, com garantia vinculada a hipotecas ou alienação fiduciária (veja [7]).

De maneira semelhante, a **Letra de Crédito do Agronegócio (LCA)** é um título de crédito relacionado a financiamentos destinados ao setor agropecuário, como os vinculados a Cédulas de Produto Rural (CPR), Certificados de Direitos Creditórios do Agronegócio (CDCA), Notas Promissórias Rurais, entre outros.

Ambos os tipos de investimentos podem ter rentabilidade **pré-fixada** ou **pós-fixada**, sendo que, no caso pós-fixado, a remuneração é atrelada a indicadores econômicos, como CDI, Selic, IPCA, entre outros. Esses títulos possuem prazo mínimo de aplicação de 90 dias e são isentos de Imposto de Renda para investidores pessoa física, tornando-se opções mais atraentes para aqueles que buscam rentabilidade com benefícios fiscais.

Recomendamos os relatórios do Banco Central [11], [12], [13] e [14] para aqueles que quiserem investimentos e mercado financeiro em geral.

1. TRIBUTAÇÃO DE RENDA FIXA

A tributação de investimentos em renda fixa no Brasil é regida pela tabela progressiva do Imposto de Renda (IR), que visa arrecadar sobre os rendimentos obtidos com esses ativos. O imposto é retido diretamente na fonte, no momento do resgate ou do vencimento dos títulos, e varia conforme o prazo de aplicação, com alíquotas menores para investimentos de maior duração. A tributação é uma parte importante a ser considerada ao avaliar a rentabilidade líquida dos investimentos em renda fixa.

a) IMPOSTO DE RENDA

Conforme a Lei nº 11.033, de 21 de dezembro de 2004, a tributação sobre os investimentos em renda fixa é realizada de acordo com a tabela regressiva do **Imposto de Renda (IR)**, que varia conforme o prazo de aplicação. Ou seja, quanto mais tempo o investidor mantiver o dinheiro aplicado, menor será a alíquota do imposto a ser pago sobre os rendimentos. A tabela regressiva do IR para investimentos em renda fixa é a seguinte:

- **Até 180 dias: 22,5%**
- **De 181 a 360 dias: 20%**
- **De 361 a 720 dias: 17,5%**
- **Acima de 720 dias: 15%**

Além disso, é importante destacar que o Imposto de Renda incide somente sobre os rendimentos, ou seja, sobre o lucro obtido com o investimento. O valor do imposto é retido na fonte no momento do resgate ou do vencimento do título, o que simplifica o processo para o investidor.

A tributação do IR para investidores pessoa física é aplicável a diversos tipos de investimentos de renda fixa, como Tesouro Direto, CDBs, RDBs, entre outros. Aplicações como a caderneta de poupança, as LCIs e as LCAs, são isentos de Imposto de Renda sobre os rendimentos, desde que atendidos os requisitos legais estabelecidos para esses produtos.

b) IMPOSTO SOBRE OPERAÇÕES FINANCEIRAS

A cobrança do **Imposto sobre Operações Financeiras (IOF)** em aplicações financeiras de renda fixa e renda variável segue uma tabela regressiva, com o objetivo de incentivar a permanência do capital investido por períodos mais longos. O IOF incide sobre o rendimento obtido em resgates realizados antes de 30 dias. A alíquota é inicialmente de 96% no primeiro dia de aplicação e diminui em 3% por dia, até ser totalmente isenta a partir do 31º dia, quando o IOF deixa de ser cobrado.

1. FUNDO GARANTIDOR DE CRÉDITOS

O **Fundo Garantidor de Créditos (FGC)** foi criado no Brasil em 1995 como uma instituição privada e sem fins lucrativos, com o objetivo de proteger correntistas,

poupadores e investidores em caso de insolvência, liquidação ou falência de instituições financeiras associadas ao FGC. Funciona como uma espécie de "seguro" para os clientes dessas instituições, garantindo o reembolso de valores limitados em situações de falência. O valor da cobertura é de até R\$ 250 mil por CPF ou CNPJ, por instituição financeira.

Especificamente, as regras de cobertura são as seguintes:

- Se a soma total de todos os depósitos ou investimentos de um cliente em uma instituição financeira for igual ou inferior a R\$ 250 mil, ele terá a cobertura total do valor.
- Se o valor total de depósitos e investimentos ultrapassar R\$ 250 mil, o cliente receberá até o limite de R\$ 250 mil por instituição financeira.

Além disso, a partir de dezembro de 2017, os investimentos contratados têm um teto de cobertura de até R\$ 1 milhão por CPF ou CNPJ, a cada período de 4 anos. Esse limite é reestabelecido após o primeiro pagamento de garantia, iniciando um novo ciclo de 4 anos.

4. Algumas Simulações de Investimentos em Renda Fixa

Nesta seção, apresentaremos simulações sobre os rendimentos nominais e reais de investimentos em renda fixa a longo prazo. Os tipos de aplicações analisadas serão poupança, CDB, LCI e LCA, que estão entre as opções mais comuns oferecidas pelos bancos a seus clientes.

Definimos um período de investimento de 20 anos, mais especificamente, de janeiro de 2004 a janeiro de 2024. Ou seja, consideramos que as aplicações foram iniciadas em janeiro de 2004 e resgatadas apenas em janeiro de 2024, sem aportes adicionais ou retiradas ao longo do período. Essa escolha de prazo se deve a relativa estabilidade econômica alcançada pelo Brasil, em comparação com as duas décadas anteriores.

Em virtude de vários investimentos terem suas taxas de rendimentos atreladas a Selic, vamos abordar esse tema com mais detalhes. Entre janeiro de 2004 e janeiro de 2024, a Selic passou por ciclos distintos, refletindo tanto mudanças nas condições econômicas internas quanto impactos de eventos globais. No início de 2004, a taxa Selic estava em 16,5% ao ano e em setembro de 2007, a taxa atingiu 11,25%, o menor nível até então, reflexo de estabilidade econômica.

Com a crise financeira global de 2008, o COPOM elevou a Selic para 13,75% em 2008, antes de reduzi-la para 8,75% em 2009, a fim de estimular a economia. Nos anos seguintes, a Selic voltou a subir, chegando a 12,50% em 2011, para conter pressões inflacionárias decorrentes do crescimento doméstico e dos preços das commodities.

De 2012 a 2013, o Banco Central reduziu a taxa novamente, atingindo 7,25% em outubro de 2012, o menor nível histórico até então. Porém, o aumento da inflação em 2013 levou a um novo ciclo de alta, encerrando 2014 com a Selic em 11,75%.

A crise econômica e política entre 2014 e 2016 pressionou a inflação e em virtude disso a Selic foi elevada para 14,25% em julho de 2015, permanecendo nesse patamar até 2016. Em 2017, o Banco Central iniciou um ciclo de redução da Selic em 2017, atingindo 6,5% em 2018. Esse movimento continuou nos anos seguintes, com a Selic alcançando 4,5% no final de 2019 e 2% em 2020, o menor valor da história, em resposta à crise econômica provocada pela pandemia de COVID-19.

Em 2021, a recuperação econômica pós-pandemia trouxe um aumento global da inflação. No Brasil, o Banco Central respondeu elevando a Selic de 2% em março de 2021 para 13,75% em 2022, tendo sido este um dos ciclos de alta mais rápidos e intensos da história. Em 2023, com sinais de desaceleração da inflação, o Banco Central iniciou um ciclo de redução gradual da taxa, chegando a 11,25% em janeiro de 2024. As séries completas podem ser encontradas em [27].

Entre janeiro de 2004 e janeiro de 2024, COPOM realizou 169 reuniões para discutir e definir a taxa Selic. Nos anos iniciais, essas reuniões ocorriam mensalmente; posteriormente, passaram a ser realizadas a cada 45 dias. O Figura 1 a seguir ilustra as variações da taxa Selic ao longo dessas 169 reuniões.

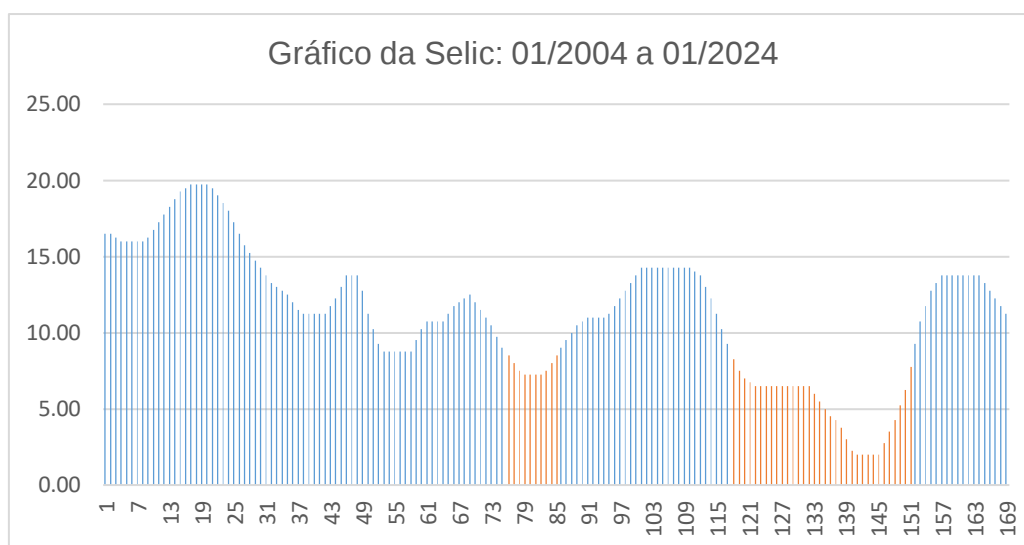


Figura 1: Gráfico da Variação da Selic entre janeiro de 2004 e janeiro de 2024

Outro fator que impacta os rendimentos das aplicações em renda fixa é a inflação. Enquanto os rendimentos nominais são diretamente influenciados pela taxa Selic, a inflação afeta o poder de compra. Assim, ao analisar os rendimentos desses investimentos, é essencial considerar o impacto da inflação para determinar o ganho real acumulado.

Durante o período de 2004 a 2024, a inflação no Brasil manteve-se em níveis relativamente controlados, especialmente quando comparada às décadas anteriores. De 2004 até meados da década de 2010, a inflação se manteve, em grande parte, dentro ou próxima das metas estabelecidas pelo Banco Central. Contudo, entre 2014 e 2016, o Brasil enfrentou uma crise econômica que elevou os índices de inflação, superando a 10% em 2015, a maior desde 2002. A partir de 2017, o cenário começou a se estabilizar novamente, com a inflação retornando a patamares mais moderados.

A Figura 2 a seguir apresenta a evolução da inflação medida pelo IPCA durante o período de 2004 a 2024, podendo ser encontrada em [27].

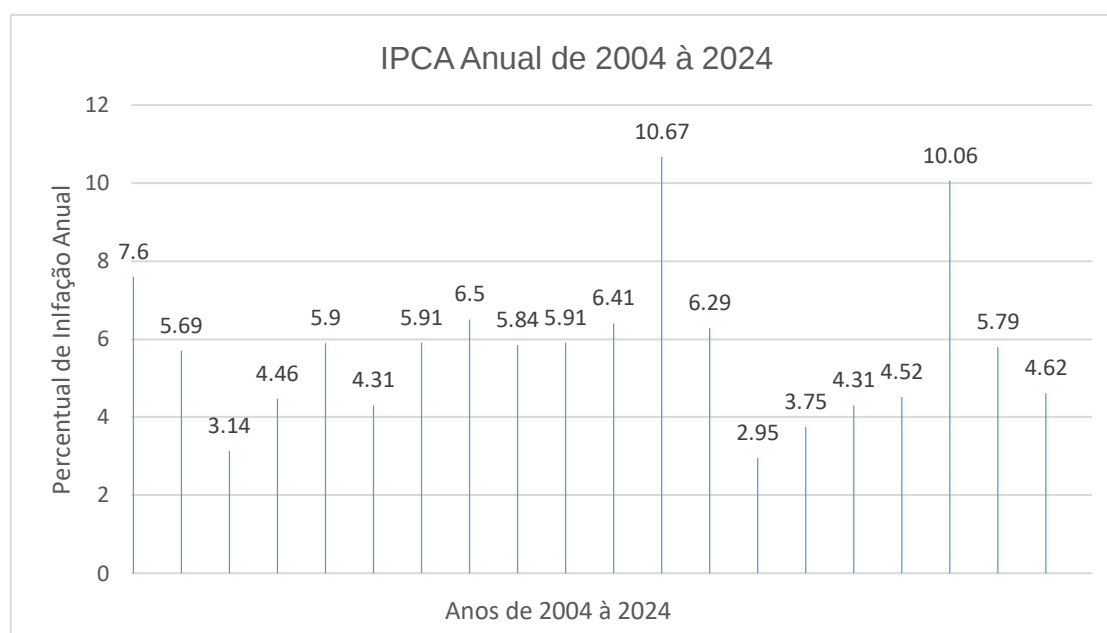


Figura 2: Gráfico do IPCA Anual de 2004 a 2024

O índice de inflação acumulado ao longo desses 20 anos, medido pelo IPCA e denotada por $IPCA_{20}$ é dada por:

$$IPCA_{20} = (1 + 0,076)(1 + 0,0569) \cdots (1 + 0,0462) - 1 = 2,0379.$$

Isso significa que o índice de inflação dado pelo IPCA foi de 203,79% entre 2004 e 2024.

No que segue, vamos analisar alguns tipos de investimentos em CDB e LCI/LCA, todos com capital inicial de R\$ 1.000,00 que oferecem rendimentos diários de uma fração do CDI, considerando o intervalo de 21/01/2004 a 31/01/2024. Este intervalo corresponde a 5.325 dias úteis e coincide com as datas da 1ª e das 169ª reuniões do COPOM, conforme mencionado anteriormente. Durante esse período, como ilustrado na Figura 1, a taxa Selic teve grande variação, de modo que a taxa CDI acompanhou essa variação, sendo sempre 0,1% menor que a Selic em cada intervalo entre as reuniões do COPOM.

a) CDB com rendimento de 100% do CDI

Vamos analisar primeiro um investimento em um CDB que oferece rendimento diário de 100% do CDI.

A Figura 3 a seguir apresenta o gráfico dos rendimentos nominais brutos, ou seja, sem o desconto do imposto de renda, em cada um dos 169 períodos. Este gráfico é

importante, pois mostra como a volatilidade da taxa Selic implica em oscilações dos rendimentos.

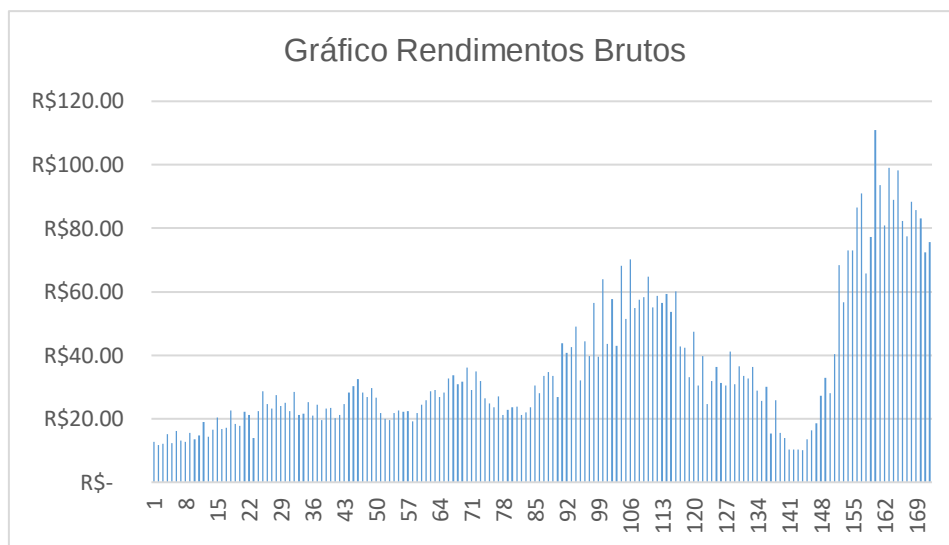


Figura 3: Rendimentos Brutos CDB

A soma destes rendimentos resulta em um montante nominal bruto de R\$ 5.858,60. Porém, como as aplicações em CDB estão sujeitas à incidência de imposto de renda e o período total da aplicação ultrapassou 720 dias, foi aplicada a alíquota de 15% sobre os rendimentos. Isso resultou em um imposto de R\$ 878,79 sobre os rendimentos. Por fim, ao final dos 20 anos de aplicação, o montante nominal resultou em R\$ 5.973,59.

A Figura 4, apresentada a seguir, exibe a evolução do saldo (montante) nominal ao longo dos 169 períodos (20 anos).

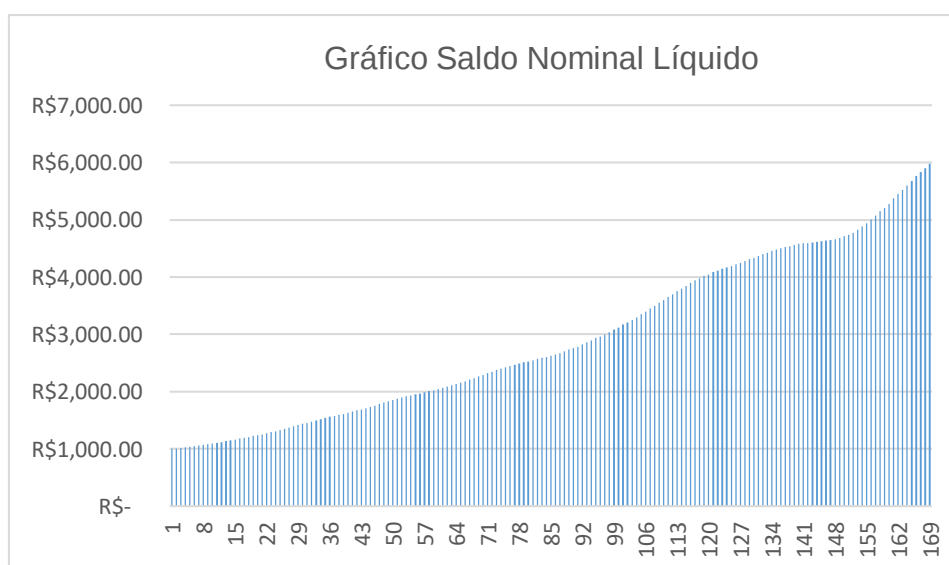


Figura 4: Gráfico do Saldo Nominal Líquido

Conforme já vimos, o índice de inflação medido pelo IPCA acumulou 203,79% entre 2004 e 2024. Assim, o saldo (montante) real da aplicação pode ser calculado pela fórmula do montante real considerando a inflação, que é dada por:

$$M_{real} = \frac{M_{nominal}}{(1 + i_{inflação})}.$$

Para o nosso exemplo, temos:

$$\frac{R\$ 5.973,59}{(1 + 2,0379)} = R\$ 1.966,38$$

Isso significa que, ao longo de 20 anos de uma aplicação em CDB conforme proposto, o ganho real foi próximo a 100%. Em outras palavras, o poder de compra proporcionado por esta aplicação praticamente dobrou, passando de R\$ 1.000,00 para quase R\$ 2.000,00.

b) LCI/LCA com rendimento de 95% do CDI

Vamos agora analisar um investimento em LCI/LCA com rendimento diário de 95% do CDI. Vale destacar que, nesse tipo de aplicação, não há incidência de imposto de renda. Assim, o rendimento bruto coincide com o rendimento nominal líquido. As Figuras 5 e 6, apresentadas a seguir, ilustram, respectivamente, os rendimentos e os saldos nominais acumulados desse investimento ao longo dos 169 períodos já citados acima.

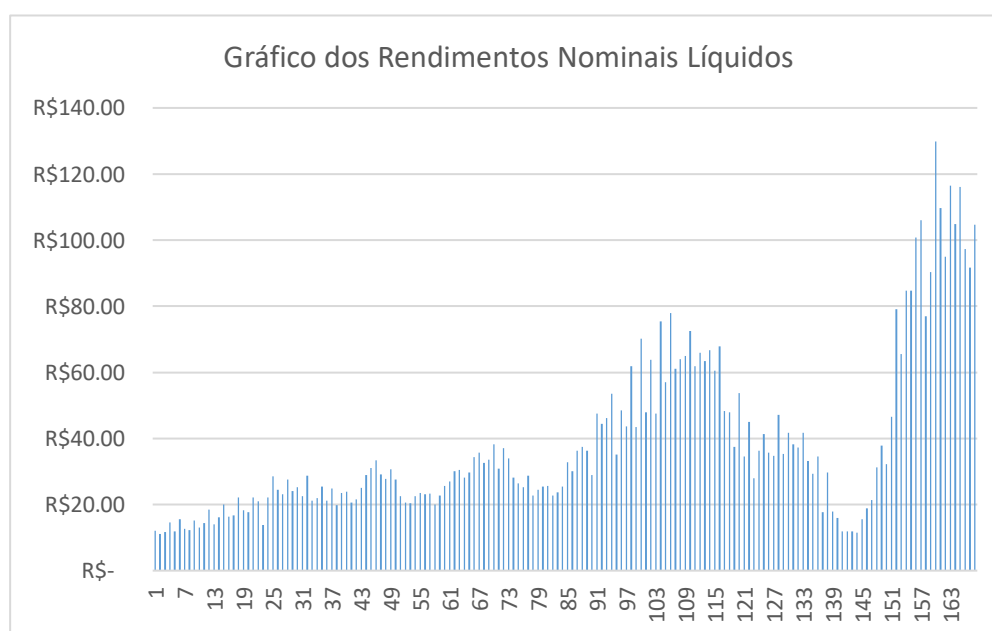


Figura 5: Gráfico dos Rendimentos Nominais de LCI/LCA com Rendimento de 95% do CDI

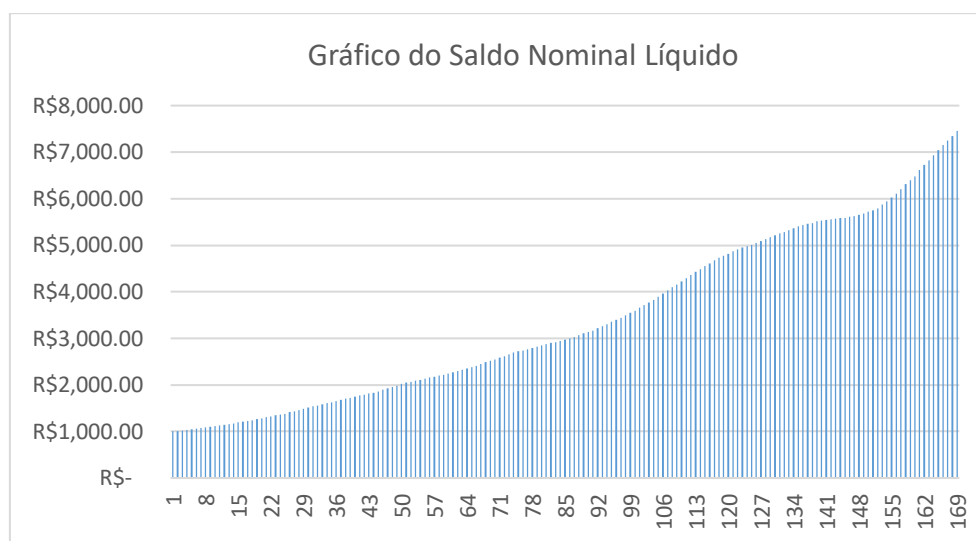


Figura 6: Gráfico dos Saldos Nominais de LCI/LCA com Rendimento de 95% do CDI

O montante nominal obtido foi de R\$ 7.450,00, enquanto o montante real, ajustado pelo IPCA acumulado de 2004 a 2024, corresponde a:

$$M_{real} = \frac{M_{nominal}}{(1 + i_{inflação})}.$$

$$\frac{R\$ 7.450,00}{(1 + 2,0379)} = R\$ 2.452,00$$

Esse resultado mostra que um investimento em LCI/LCA com rendimento de 95% do CDI foi significativamente mais vantajoso em comparação com um investimento em CDB, mesmo que o rendimento seja inferior a 100% do CDI. Essa vantagem decorre da isenção de imposto de renda sobre os rendimentos em LCI/LCA.

c) CBD com Rendimento de 100% do CDI versus LCI/LCA com Rendimento de 85% do CDI.

Agora, voltemos nossa atenção para investimentos em CDB com rendimento diário de 100% do CDI no intervalo de tempo entre janeiro de 2004 e janeiro de 2024. Considerando que esse tipo de aplicação está sujeito à alíquota de 15% de imposto de renda, a taxa de rendimento líquido deve ser equivalente a 85% do CDI. Em outras palavras, um investimento em CDB que rende 100% do CDI deveria ser equivalente a um

investimento em LCI/LCA com rendimento de 85% do CDI, devido à isenção de imposto de renda no último caso.

Simulando um investimento de R\$ 1.000,00 em LCI/LCA com rendimento de 85% do CDI no período de janeiro de 2004 a janeiro de 2024, obtivemos um montante nominal de R\$ 6.091,00 e um montante real de R\$ 2.005,00. Esses valores são muito próximos aos obtidos na simulação anterior **(a)**. As Figuras 7 e 8 a seguir apresentam os rendimentos e saldos desse investimento com maior precisão.

Concluimos, assim, que qualquer investimento em LCI/LCA com rendimento diário superior a 85% do CDI é mais vantajoso do que um investimento em CDB com 100% do CDI.

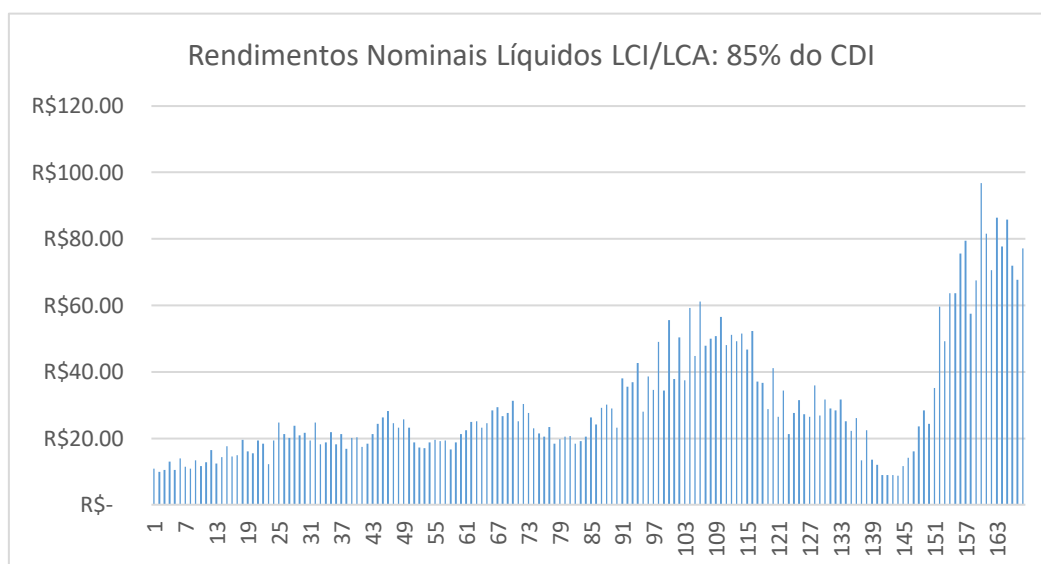


Figura 7: Rendimentos Nominais Líquidos LCI/LCA: 85% do CDI

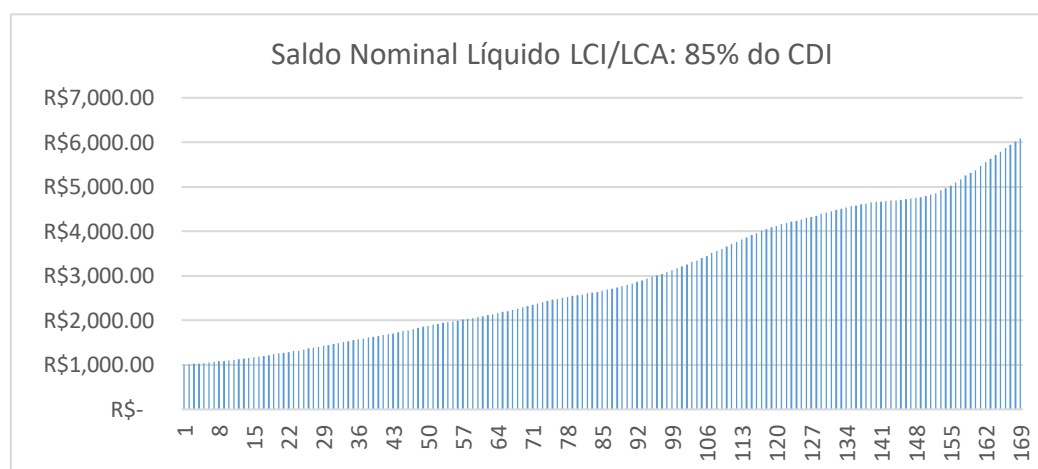


Figura 8: Saldo Nominal Líquido LCI/LCA: 85% do CDI

d) Simulações de Investimentos com Aportes Periódicos

Nesta seção, simularemos alguns investimentos em CDB com aportes periódicos baseados em uma porcentagem do salário mínimo. O período analisado será de janeiro de 2004 a janeiro de 2024, com um total de 169 aportes realizados nas datas das reuniões do COPOM durante esse intervalo.

Na primeira simulação, os aportes correspondem a 10% do salário mínimo vigente na data de cada reunião. Na segunda simulação, esse percentual é aumentado para 20%. Para calcular os valores dos aportes, é necessário conhecer o salário mínimo em cada ano do período considerado. A Figura 9 a seguir apresenta esses valores.

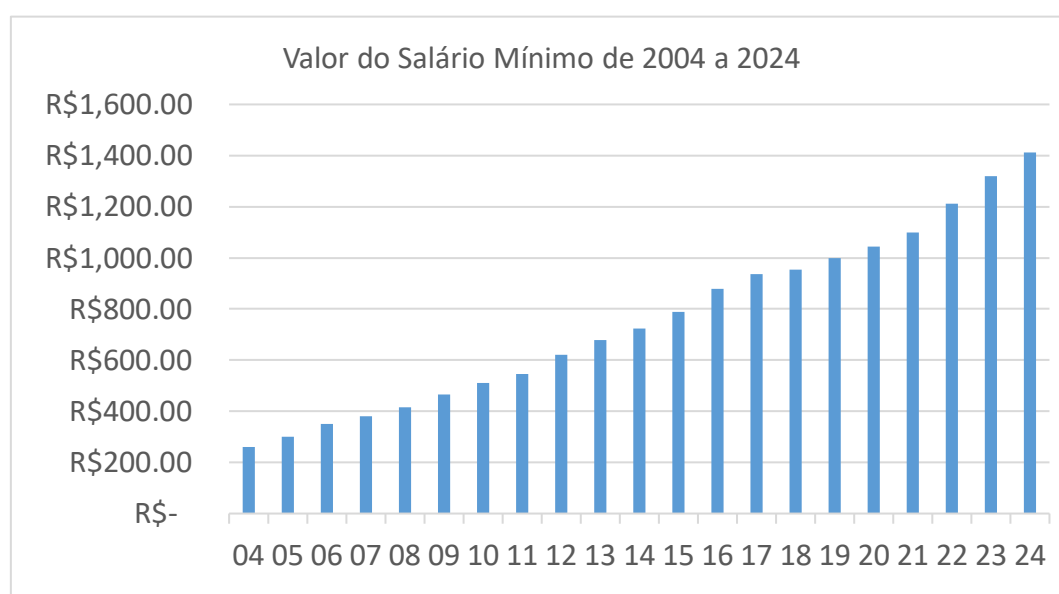


Figura 9: Valor do salário mínimo de 2004 a 2024

Nas simulações com aportes de 10% do salário mínimo, os resultados indicam um montante nominal final em torno de R\$ 24.500,00 e um montante real aproximado de R\$ 8.100,00. A Figura 10 ilustra a evolução dos saldos nominais ao longo do tempo.

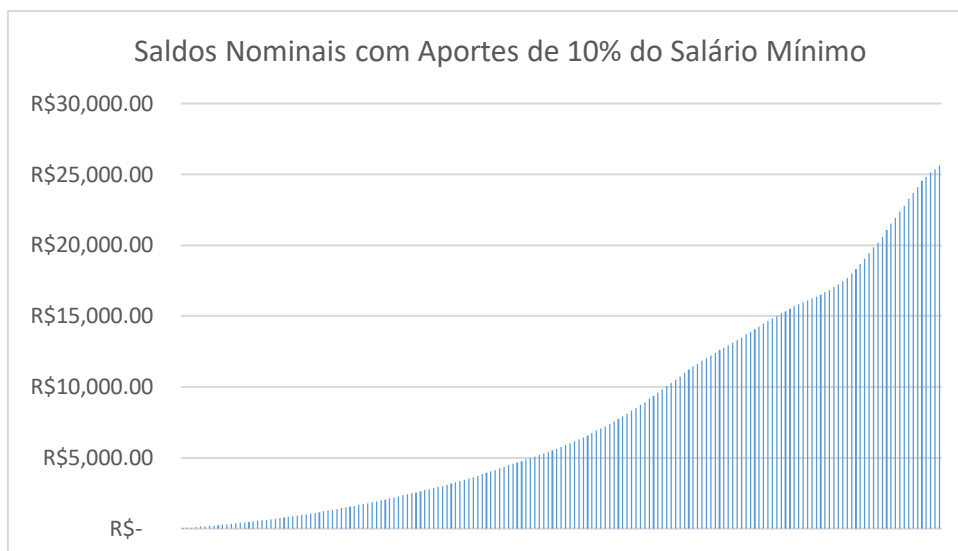


Figura 10: Saldos Nominais de um Investimento com Aportes Periódicos de 10% do Salário Mínimo

Se os aportes periódicos fossem dobrados, passando para 20% do salário mínimo, os montantes finais, tanto nominal quanto real, também dobrariam, estimados em cerca de R\$ 49.000,00 e R\$ 16.200,00, respectivamente. A Figura 11 ilustra a evolução dos saldos nominais ao longo do tempo.

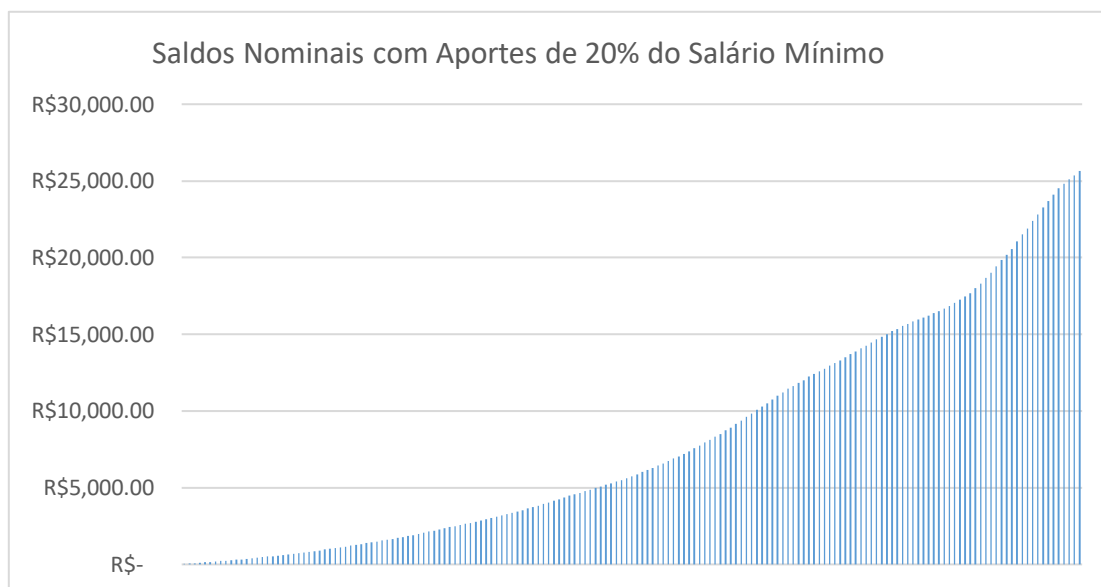


Figura 11: Saldos Nominais de um Investimento com Aportes Periódicos de 20% do Salário Mínimo

e) Rendimentos da Poupança com depósitos de 2004 a 2024

Analisaremos na sequência, os rendimentos da poupança no período de janeiro 2004 a janeiro 2024. É importante lembrar que os depósitos realizados em poupança antes de 2012 possuem contribuições definidas como $TR + 0,5\%$ ao mês. Assim, caso

o investidor tenha valores aplicados na poupança antes de 3 de maio de 2012, continuará recebendo os pagamentos pela antiga regra.

O gráfico da Figura 12 a seguir, mostra que um investimento inicial de R\$ 1.000,00 em janeiro de 2004, resultará em um montante final de R\$ 4.088,76 em um período de investimentos que se encerra em janeiro de 2024. Isso representa um rendimento nominal líquido pouco superior a R\$ 3.000,00 ao longo do período.

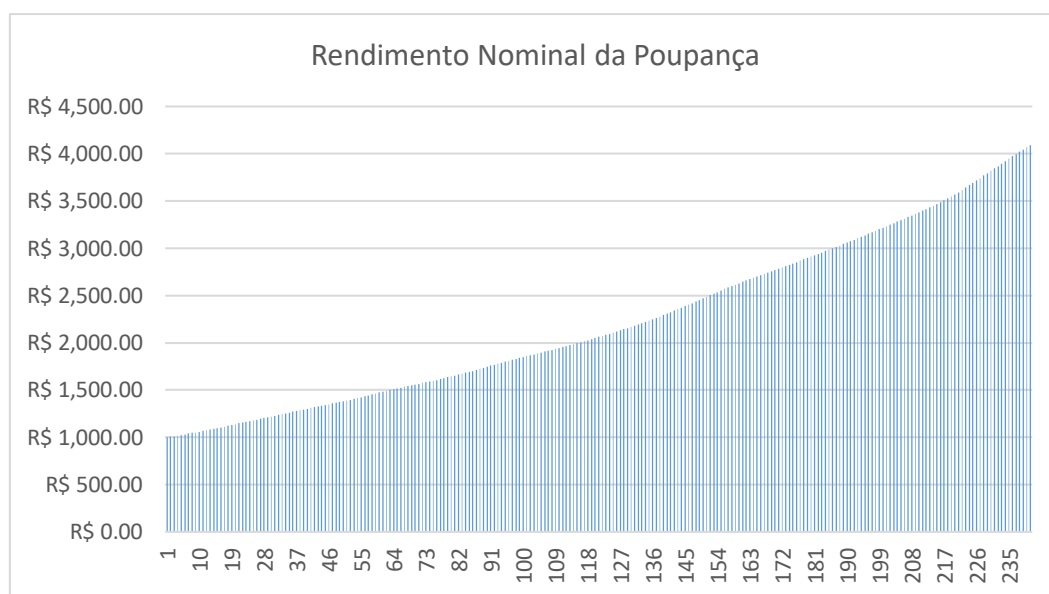


Figura 12: Saldo dos Rendimentos Nominais da Poupança no período de janeiro de 2004 a janeiro de 2024

Com o resultado apresentado e considerando a inflação no período, obtemos o rendimento real calculado da seguinte forma:

$$M_{real} = \frac{M_{nominal}}{(1 + i_{inflação})}.$$

$$\frac{R\$ 4.088,76}{(1 + 2,0379)} = R\$ 1.345,92.$$

Portanto, ao longo de 20 anos de aplicação, considerando a inflação, é possível perceber que os rendimentos obtidos com a poupança não são tão vantajosos quanto aqueles obtidos em investimentos como CBD e LCI/LCA que analisamos anteriormente em (a) e (b).

f) Rendimentos da Poupança com depósitos de 2012 a 2024

Nas simulações a seguir, será considerado um período de 12 anos, durante o qual a regra de remuneração difere das análises anteriores. A partir de 2012, os rendimentos passam a estar vinculados à variação da taxa Selic. Quando a taxa Selic é superior a 8,5% ao ano, a poupança rende TR + 0,5% ao mês. Por outro lado, quando a Selic está abaixo de 8,5% ao ano, a remuneração é de TR + 70% da taxa Selic.

Ao analisarmos a taxa Selic no período de 2012 a 2024 (veja a Figura 1), constatamos que, em 140 meses, a poupança seguiu a regra mais recente em 66 meses, durante os quais a Selic permaneceu inferior a 8,5% ao ano. Nesse intervalo, os rendimentos da poupança alcançaram, no máximo, cerca de 6% ao ano, valor observado quando a Selic se aproximava do limite de 8,5% ao ano.

O gráfico da Figura 14 apresenta os rendimentos da poupança com base na regra estabelecida em 2012. Com um aporte inicial de R\$ 1.000,00 realizado em maio de 2012, obteve-se um saldo nominal acumulado de R\$ 1.958,13 até a data final, em janeiro de 2024.

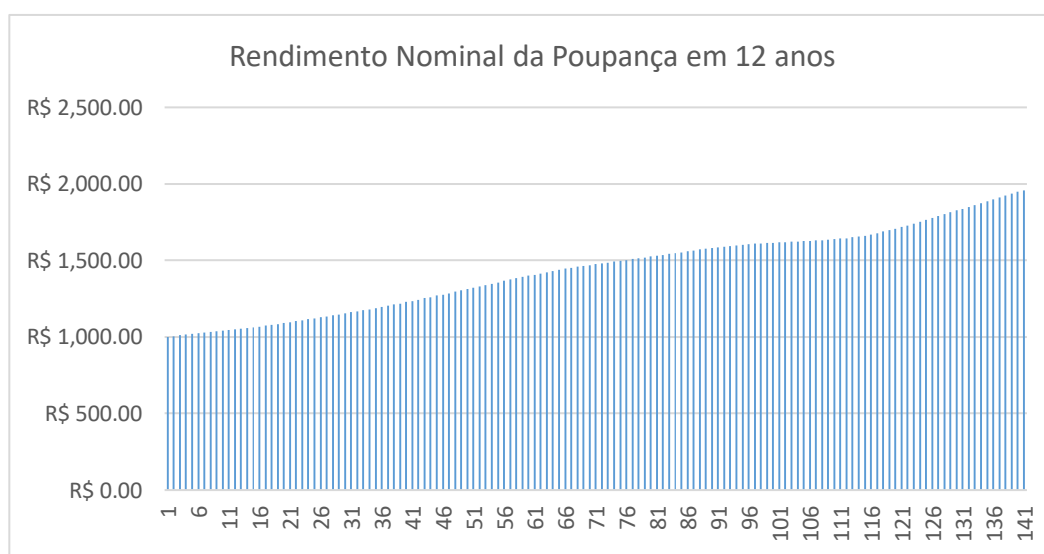


Figura 14: Rendimento Nominal da Poupança no período de 5/2012 a 1/2024

No período de maio de 2012 a janeiro de 2024, a inflação acumulada foi de 96,15%. Assim, o rendimento real de um investimento de R\$ 1.000,00 em poupança neste período pode ser calculado utilizando a fórmula apresentada a seguir:

$$M_{real} = \frac{M_{nominal}}{(1 + i_{inflação})}.$$

$$\frac{R\$ 1.958,13}{(1 + 0,9615)} = R\$ 998,28.$$

Desta forma, verificamos que os rendimentos reais da poupança ficaram próximos da inflação, o que significa que, nesse período, essa aplicação foi suficiente apenas para preservar o poder de compra do dinheiro investido, resultando, portanto, em um retorno real levemente negativo.

Para finalizarmos o trabalho, vamos avaliar qual regra seria mais vantajosa para os investidores da poupança, realizamos uma simulação considerando tanto a regra antiga quanto a regra atual. Com base nas informações disponíveis, comparamos os rendimentos obtidos pela poupança em cada uma dessas situações. Os gráficos resultantes serão apresentados após os comentários.

A simulação tem início com um investimento realizado em maio de 2012, no valor inicial de R\$ 1.000,00. Considerando a regra antiga da poupança, o investimento resultaria em um rendimento nominal de R\$ 2.198,34, conforme apresentado na Figura 15.

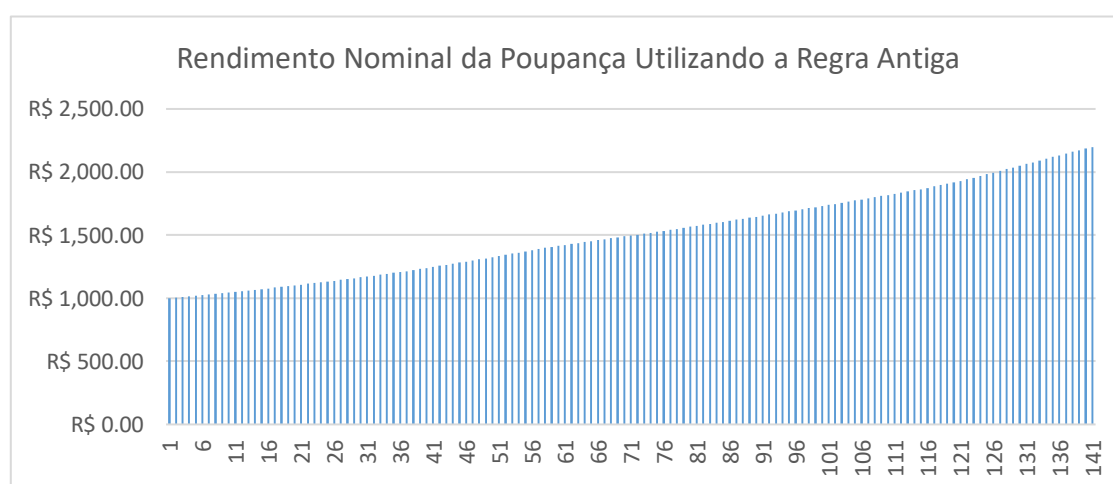


Figura 15: Rendimento Nominal da Poupança no período de 12/2012 a 1/2024 considerando a Regra Antiga

Por outro lado, conforme podemos observar na Figura 14, o rendimento nominal da poupança do mesmo aporte inicial no mesmo período, considerando a regra atual, é de R\$ 1.958,13. Isso mostra uma diferença de rendimentos na ordem de R\$ 240,00. Assim, para cada R\$ 1.000,00 aplicados na poupança, entre maio de 2012 e janeiro de 2024, o investidor deixou de ganhar, aproximadamente, R\$ 240,00. Note que esse valor é irrisório para o período. Porém, quando analisamos saldos maiores, na ordem de bilhões, essa diferença tende a ser bastante expressiva. Vale ressaltar que o saldo dos depósitos de poupança no Brasil ronda a casa de 1 trilhão de reais.

Dessa forma, podemos concluir que, sob a regra antiga, o investidor obteve melhores resultados em seus investimentos em poupança. A nova regra, vinculada à Selic, faz com que os rendimentos diminuam à medida que a taxa de juros cai. No entanto, o investidor não se beneficia quando a Selic está acima de 8,5% ao ano, pois os rendimentos serão sempre compostos pela $TR + 0,5\%$ ao mês, caso a Selic seja superior a esse valor. Já a regra antiga, por não estar atrelada à Selic, oferecia maiores vantagens ao investidor, mesmo quando a taxa básica de juros estava em queda.

5. Conclusão

Ao longo deste trabalho, foram apresentados conceitos fundamentais de matemática financeira, como tributação, taxa de juros, imposto de renda, entre outros, que serviram como ferramentas para as simulações e análises realizadas sobre produtos de renda fixa. A pesquisa abordou a poupança, CDBs e LCIs/LCAs, utilizando dados históricos do período de 2004 a 2024, permitindo avaliar as vantagens e desvantagens desses instrumentos em diferentes cenários econômicos.

Conforme exposto, as análises se concentraram nos principais produtos de renda fixa disponíveis no mercado. As simulações iniciaram com uma revisão histórica da taxa Selic ao longo de 20 anos, revelando que a taxa esteve em patamares iguais ou inferiores a 8,5% ao ano apenas em dois períodos específicos, prevalecendo, na maior parte do tempo, valores superiores. Isso sugere uma maior probabilidade de a Selic permanecer acima de 8,5% ao ano, salvo em ocasiões extraordinárias que impactem a economia brasileira. Adicionalmente, foram apresentados dados históricos do IPCA, que desempenha um papel crucial para avaliar o poder de compra associado aos rendimentos obtidos nos investimentos analisados.

As análises indicaram que LCIs/LCAs com rendimento de 85% do CDI frequentemente superam CDBs que oferecem 100% do CDI, tornando-se, assim, mais vantajosas para os investidores. No entanto, ressalta-se a importância de avaliar as condições específicas oferecidas por cada instituição financeira. Já a poupança, apesar de sua popularidade, apresentou desempenho limitado e significativamente inferior em comparação aos investimentos atrelados ao CDI. Foi destacado, ainda, o impacto das regras antiga e atual da poupança, sendo que a regra anterior proporcionava uma rentabilidade mais atrativa em relação à regra vigente.

Em suma, este estudo reforça que a escolha de investimentos em renda fixa deve considerar não apenas a rentabilidade nominal, mas também os efeitos da tributação e da inflação sobre os retornos. Uma análise criteriosa desses fatores é essencial para alinhar as estratégias financeiras às metas de longo prazo, garantindo a preservação do poder de compra e a maximização dos resultados financeiros do investidor.

6. Referências Bibliográficas

- [1] **Caderno de Educação Financeira: Gestão de Finanças Pessoais (Conteúdo Básico):** BANCO CENTRAL DO BRASIL. *Caderno de Educação Financeira: Gestão de Finanças Pessoais (Conteúdo Básico)*. Brasília: BCB, 2013. Disponível em: <https://www.bcb.gov.br/content/cidadaniafinanceira/documentos_cidadania/Cuidando_do_seu_dinheiro_Gestao_de_Financas_Pessoais/caderno_cidadania_financeira.pdf?utm_source=chatgpt.com>.
- [2] **Glossário Simplificado de Termos Financeiros:** BANCO CENTRAL DO BRASIL. *Glossário Simplificado de Termos Financeiros*. Brasília: BCB, 2013. Disponível em: <<https://www.bcb.gov.br/meubc/glossario>>.
- [3] **Atas das Reuniões do COPOM:** BANCO CENTRAL DO BRASIL. *Ata da 202ª Reunião do COPOM*. Brasília: BCB, 2016. Disponível em: <<https://www.bcb.gov.br/publicacoes/atascopom/cronologicos>>
- [4] **Análise de Investimentos - Histórico, Principais Ferramentas e Mudanças Conceituais para o Futuro.** Comissão de Valores Mobiliários (CVM) e Associação dos Analistas e Profissionais de Investimento do Mercado de Capitais (APIMEC). 1ª Edição, 2017.
- [5] **Mercado de Valores Mobiliários Brasileiro.** Comissão de Valores Mobiliários (CVM). 4ª Edição, 2019.
- [6] **Planejamento Financeiro Pessoal.** Comissão de Valores Mobiliários (CVM) e Planejar – Associação Brasileira de Planejadores Financeiros. 1ª Edição, 2019.
- [7] **Construindo as Bases da Regulação Financeira Moderna no Brasil.** Comissão de Valores Mobiliários (CVM). 2023.
- [8] **Análise de Rentabilidade dos Investimentos em Renda Fixa:** Guilherme Bueno de Oliveira. Trabalho de Conclusão de Curso. Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), 2015.
- [9] **Matemática Financeira para o Ensino Básico:** Gleison Silva Vilefort Costa. Trabalho apresentado ao Curso de Especialização em Matemática para Professores do Ensino Básico. Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), 2015.
- [10] **Regulamento do Tesouro Direto:** Ministério da Fazenda. Portaria Normativa MF nº 650, de 30 de junho de 2023
- [11] **Relatório Anual 2010:** Banco Central do Brasil. Publicação Anual do Departamento Econômico (Depec). Volume 46. Brasília, 2010.

- [12] **Relatório Anual 2011:** Banco Central do Brasil. Publicação Anual do Departamento Econômico (Depec). Volume 47. Brasília, 2011.
- [13] **Relatório Anual 2012:** Banco Central do Brasil. Publicação Anual do Departamento Econômico (Depec). Volume 48. Brasília, 2012.
- [14] **Relatório Anual 2015:** Banco Central do Brasil. Publicação Anual do Departamento Econômico (Depec). Volume 51. Brasília, 2015.
- [15] **Regulamento do Tesouro Direto - Portaria Normativa MF nº 650, de 30 de junho de 2023:** Publicado no Diário Oficial da União, Seção 1, ISSN 1677-7042, nº 124, em 3 de julho de 2023.
- [16] **Regulamento do Tesouro Direto - Portaria SETO/ME nº 6.175, de 11 de julho de 2022:** Publicado no Diário Oficial da União, Seção 1, ISSN 1677-7042, nº 133, em 15 de julho de 2022.
- [17] **Relatório de Inflação - Dezembro de 2016:** Banco Central do Brasil. Volume 18, Número 4. Publicação trimestral do Comitê de Política Monetária (Copom).
- [18] **Relatório de Inflação - Dezembro de 2017:** Banco Central do Brasil. Volume 19, Número 4. Publicação trimestral do Comitê de Política Monetária (Copom).
- [19] **Relatório de Inflação - Dezembro de 2018:** Banco Central do Brasil. Volume 20, Número 4. Publicação trimestral do Comitê de Política Monetária (Copom).
- [20] **Relatório de Inflação - Dezembro de 2019:** Banco Central do Brasil. Volume 21, Número 4. Publicação trimestral do Comitê de Política Monetária (Copom).
- [21] **Vale a Pena Investir em Fundos de Investimentos. Eficiência e Desempenho dos Fundos de Investimento em Ações no Brasil de 2015 a 2019:** Ramon Silva Brandão Oliveira. Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Ciências Econômicas da Universidade Federal da Bahia (UFBA). Salvador, 2020.
- [22] **Investimentos Temporários ou Investimentos Permanentes: Investir de Forma Adequada para Aumentar os Resultados:** Janete Dal Lago. Monografia apresentada ao Curso de Ciências Contábeis da Universidade de Caxias do Sul (UCS). Caxias do Sul, 2012.
- [23] **Determinantes da Participação Feminina no Mercado Financeiro Brasileiro entre 2018 e 2022:** Tays Marina da Silva. Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Ciências Econômicas da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE). Caruaru, 2023.
- [24] **Raio X do Investidor Brasileiro - 6ª edição (2023):** ANBIMA. *Raio X do Investidor Brasileiro – 6ª edição*. São Paulo: ANBIMA, 2023. Disponível em: <<https://www.anbima.com.br>>.
- [25] **Financiamentos imobiliários, microcrédito, poupança e conta digital: os diferentes tratamentos das taxas de juros pelas instituições financeiras.** SPELIER, Fernanda Lucia Marqui. 2023. 77 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Estadual de Maringá, Maringá, PR, 2023.

[26] **Fundamentos de Administração Financeira**. ASSAF NETO, Alexandre; LIMA, Fabiano Guasti. São Paulo: Atlas, 2010.

[27] **Banco Central do Brasil - Séries Temporais**. Disponível em:
<[https://www3.bcb.gov.br/sgspub/localizarseries/localizarSeries.do?method=prepararTe
laLocalizarSeries](https://www3.bcb.gov.br/sgspub/localizarseries/localizarSeries.do?method=prepararTe
laLocalizarSeries)>.



Poliônimos Geradores de Números Primos

Doherty Andrade – Email: dandrade@uem.br

Resumo: Nesta notas investigamos polinômios com coeficientes inteiros que geram números primos. Apresentamos as espirais de Ulam e de Sacks em que os números primos se apresentam seguindo certos padrões. Também apresentamos códigos em Python que nos ajudam a visualizar as espirais.

Palavras-chave: Polinômios; Números primos; Coeficientes.

1. Introdução

O interesse pelos números primos vem de longa data, Euclides de Alexandria (300 A.C.) talvez tenha sido o primeiro a apresentar uma demonstração para a existência de infinitos números primos. Historicamente, define-se número primo apenas para os números naturais. Podemos estender o conceito de número primo para abranger os números inteiros negativos definindo que $-n$ é primo se n for primo. Assim, -5 é um número inteiro primo.

Os números primos desempenham um papel importante dentro da Matemática. O Teorema Fundamental da Aritmética afirma que todo número natural maior do que 1 ou é primo ou é um produto de primos, evidenciando assim os números primos como blocos construtores dos números naturais e, portanto, dos números inteiros.

Com o surgimento do computador, o interesse pelos primos cresceu ainda mais. A possibilidade de realizar buscas computacionais por números primos cada vez maiores se tornou realidade, especialmente na criptografia. Além disso, conjecturas que antes pareciam inalcançáveis passaram a ser testadas de forma empírica. Embora testes computacionais não substituam demonstrações Matemática, eles oferecem intuição e fornecem contraexemplos valiosos.

A questão principal que muitos matemáticos tentam responder é como os números primos são gerados? Existe um padrão em que eles aparecem no conjunto dos números naturais? Qual é a forma geral de um número primo? Muitos matemáticos, desde a antiguidade, tentaram compreender o universo dos números primos e responder a essas perguntas. Elaborando teorias e fazendo conjecturas fomos avançando no conhecimento.

Neste contexto, surgem os polinômios com coeficientes inteiros que geram números primos. As fórmulas polinomiais com coeficientes inteiros que geram números primos estão dentro deste tema. É sobre alguns desses polinômios que vamos tratar nestas notas.

Legendre demonstrou que não existe uma função algébrica racional $R(n)$ que sempre produza números primos quando a entrada n é um número natural. Em 1752, Goldbach mostrou que nenhum polinômio $p(n)$ com coeficientes inteiros pode gerar sempre um primo quando os valores n são inteiros. Veja o teorema 4.1 na seção 4. Portanto, não esperamos encontrar um polinômio com essa propriedade, mas podemos procurar por um polinômio que possa gerar muitos números primos.

Assim o interesse ainda continua: determinar polinômios não contantes e com coeficientes inteiros que, para uma grande quantidade de números naturais n , tem-se $p(n)$ um número primo.

Existe um polinômio em 10 variáveis com coeficientes inteiros tal que o conjunto de primos é igual ao conjunto de valores positivos deste polinômio, obtido à medida que as variáveis assumem todos os valores inteiros não negativos. Embora esse resultado seja impressionante, trata-se, na verdade, de um conjunto de equações diofantinas disfarçadas. Veja (Ribenboim, 1991).

2. O exemplo de Euler

Entre os polinômios geradores de números primos, a mais conhecida dessas fórmulas polinomiais é a de Euler, veja (Euler, 1772) e (Ball; Coxeter, 1987):

$$f(n) = n^2 + n + 41.$$

De modo geral,

$$f(n) = n^2 + n + p,$$

onde p é um número primo.

Aos números primos p tais que a expressão acima gera primos para $n = 0, 1, \dots, p - 2$ foi denominada por Le Lionnais (Le Lionnais, 1983) de números da Sorte de Euler (onde o caso $p = 41$ corresponde à fórmula de Euler).

Rabinowitz (Rabinowitz, 1913) demonstrou que para um primo $p > 0$, o polinômio de Euler representa um primo para $n \in [0, p - 2]$ (excluindo o caso trivial $p = 2$).

O polinômio de Euler $p(n) = n^2 + n + 41$ que gera números primos para vários valores de números naturais n sucessivos. Na verdade, este polinômio gera números primos para os 40 primeiros números consecutivos, a saber, $n = 0, 1, 2, \dots, 38, 39$, como mencio-

nado acima. Como $p(-n-1) = p(n)$, ele também gera primos para $n = -40, -39, \dots, -2, -1$, mas esses primos são idênticos aos primos gerados anteriormente.

3. Outros exemplos

De tempos em tempos estudiosos apresentam polinômios com coeficientes inteiros que geram números primos, mas não geram todos os números primos obviamente. Um polinômio com essa propriedade, mesmo que gerando apenas alguns números primos, é importante porque nem todo polinômio tem essa propriedade. Por exemplo, $p(n) = 3n^2 - n + 2$ gera apenas números pares, ou seja, nunca gera primos (exceto obviamente quando $n = 0$ obtemos o primo 2). De fato, como $p(n) = 3n^2 - n + 2 = n(3n - 1) + 2$, se 2 não divide n então $n = 2k + 1$ para algum k inteiro. Segue que $3n - 1 = 6k + 2$ e, portanto, $n(3n - 1) + 2 = 2(2k + 1)(3k + 1) + 2$ que é par. O caso em que 2 divide n é mais imediato.

A situação é ainda pior. Por exemplo, sabe-se que o polinômio de Bouniakowsky dado por $P(x) = x^{12} + 488669$ gera pelo menos um número primo. Testes computacionais mostraram que não produz números primos até $x = 616980$:

$$P(616980) = 304265726159978433637643344390889488213671181434701 \\ 7424896000000488669.$$

é o primeiro número primo assumido pelo polinômio. Este valor foi determinando computacionalmente.

Também observou-se computacionalmente que todos os valores primos conhecidos e assumidos pelo polinômio terminam com os dígitos 00488669. Isso seria verdadeiro para todos os valores primos do polinômio?

Em 1837 ([Dirichlet, 1837](#); [Stephan, 2014](#)), o matemático alemão P. G. L. Dirichlet (1805-1859) provou que uma progressão aritmética $a + bd$ de módulo d (uma função polinomial inteira de grau 1 em d , onde d , a e b são inteiros com $\gcd(a, d) = 1$), gera infinitos números primos.

Em 1857, vinte anos após o teorema de Dirichlet, a conjectura do matemático ucraniano Victor Y. Bunyakovsky (1804-1889), mencionada em ([Bunyakovsky, 1857](#)), já era uma tentativa de generalizar este teorema para funções polinomiais inteiras de grau $m > 1$. Esta conjectura afirma que, sob três condições mencionadas a seguir, uma função polinomial de grau $m > 1$ gera infinitos números primos. Até o ano de 2024 esta conjectura não foi refutada.

A conjectura de Bunyakovsky afirma que, sob três condições mencionadas a seguir,

uma função polinomial inteira de grau $m > 1$ gera infinitos números primos. As três condições surgem do fato de que o polinômio considerado deve ser, além disso, irreduzível, sendo esta palavra tomada no sentido dado por Bunyakovsky em seu artigo:

- O coeficiente líder deve ser positivo;
- Os coeficientes do polinômio devem verificar $\text{MDC}(\text{coeficientes}) = 1$;
- O polinômio deve ser irreduzível, isto é, não divisível por qualquer outro polinômio de grau d com $0 \leq d < m$.

A conjectura sugere que, por exemplo, um polinômio como $x^2 + 1$ (que é irreduzível sobre os inteiros e cujos coeficientes são coprimos) deve gerar infinitos números primos. Do mesmo modo, o polinômio de Euler $f(n) = n^2 + n + 41$ gera infinitos números primos. .

Até o momento, a conjectura de Bouniakowsky permanece não provada, assim como muitas outras conjecturas sobre a distribuição de números primos. No entanto, é apoiada por uma grande quantidade de evidências empíricas. A importância da conjectura de Bouniakowsky reside na sua generalização e na sua capacidade de abranger muitos casos especiais conhecidos na teoria dos números. Uma prova desta conjectura implicaria um grande avanço na compreensão da distribuição de números primos em polinômios e teria consequências significativas para outras conjecturas e teoremas na teoria dos números.

Em 2020 R. Deloin, ([Deloin, 2020](#)), utilizando uma nova abordagem relaciona a conjectura de Bunyakovsky com uma teoria geral das progressões aritméticas, apresentou uma prova da conjectura de Bunyakovsky, mas a comunidade matemática ainda tem algumas restrições à demonstração apresentada.

Ainda sobre os polinômio de Euler do tipo $f(n) = n^2 + n + p$, onde p é um número primo, vimos acima que ele assume valores primos para todos n no conjunto $\{0, 1, 2, \dots, p-2\}$. Os únicos valores de p para os quais o polinômio $f(n) = n^2 + n + p$ assume valores primos para todos $n \in \{0, 1, 2, \dots, p-2\}$ são os seguintes: $\{2, 3, 5, 11, 17, 41\}$.

Note que, para cada um desses polinômios, a lista de valores consecutivos de n para os quais ele assume valores primos não pode ser estendida além de $n = p - 2$, pois $n^2 + n + p$ é composto para $n = p - 1$ (e para $n = p$ também).

De fato, se $n = p - 1$, então obtemos $f(p) = p^2 + 1$. Se $p = 2$ ou 3 tem-se um número composto. Se $p > 3$ é primo, então p pode ser escrito de uma das formas

$$6k, 6k + 1, 6k + 2, 6k + 3, 6k + 4, 6k + 5$$

e entre esses, apenas os que estão na forma $6k \pm 1$ podem ser primos.

Vamos analisar $p = 6k + 1$ e $p = 6k - 1$:

Se $p = 6k + 1$:

$$p^2 = (6k + 1)^2 = 36k^2 + 12k + 1$$

Portanto,

$$p^2 + 1 = 36k^2 + 12k + 1 + 1 = 36k^2 + 12k + 2 = 2(18k^2 + 6k + 1)$$

Isto é claramente divisível por 2, portanto, é composto.

Se $p = 6k - 1$:

$$p^2 = (6k - 1)^2 = 36k^2 - 12k + 1$$

Portanto,

$$p^2 + 1 = 36k^2 - 12k + 1 + 1 = 36k^2 - 12k + 2 = 2(18k^2 - 6k + 1)$$

Isto também é claramente divisível por 2, portanto, é composto.

Assim, para qualquer número primo $p > 3$, $p^2 + 1$ será sempre um número composto.

Também Legendre apresentou o polinômio $p(n) = n^2 + n + 17$ que é primo para todos $n \in \{0, 1, 2, \dots, 14, 15\}$ e o polinômio $p(n) = 2n^2 + 29$ que é primo para $n \in \{0, 1, 2, \dots, 27, 28\}$.

Vejam alguns exemplos de outros polinômios.

O exemplo de Fung e Ruby:

$$p(n) = 47n^2 - 1701n + 10181$$

assume valores primos para $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 29, 28, \dots, 42\}$.

Também o polinômio

$$p(n) = 36n^2 - 810n + 2753$$

assume valores primos para $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 19, 20, \dots, 44\}$.

O polinômio cúbico dado por S. M. Ruiz

$$p(n) = 3n^3 - 183n^2 + 3318n - 18757$$

assume valores primos para $n \in \{0, 1, 2, \dots, 46\}$.

Outro polinômio cúbico interessante

$$P(n) = n^3 + n^2 + 17$$

assume muitos valores primos para valores consecutivos de $n = 0, \dots, 10$.

Como observado acima, Legendre apresentou o polinômio $f(n) = n^2 + n + 17$ que é primo para todos $n \in \{0, 1, 2, \dots, 14, 15\}$. Polinômios que se assemelham a este incluem:

- $f(n) = n^2 + 3n + 19$: primo para $n \in \{0, 1, 2, \dots, 13, 14\}$;
- $f(n) = n^2 + 5n + 23$: primo para $n \in \{0, 1, 2, \dots, 12, 13\}$;
- $f(n) = n^2 + 7n + 29$: primo para $n \in \{0, 1, 2, \dots, 11, 12\}$.

Legendre também apresentou o polinômio $f(n) = 2n^2 + 29$ que é primo para $n \in \{0, 1, 2, \dots, 27, 28\}$. Polinômios semelhantes incluem:

- $f(n) = 8n^2 + 29$: primo para $n \in \{0, 1, 2, \dots, 13, 14\}$;
- $f(n) = 10n^2 + 13$: primo para $n \in \{0, 1, 2, \dots, 11, 12\}$;
- $f(n) = 10n^2 + 7$: primo para $n \in \{0, 1, 2, \dots, 5, 6\}$;
- $f(n) = 10n^2 + 19$: primo para $n \in \{0, 1, 2, \dots, 17, 18\}$;
- $f(n) = 12n^2 + 59$: primo para $n \in \{0, 1, 2, \dots, 13, 14\}$.

Aqui estão alguns polinômios que se assemelham ao polinômio de Euler $n^2 + n + 41$, mas diferem no coeficiente de n :

- $n^2 + 3n + 43$: primo para $n \in \{0, 1, 2, \dots, 37, 38\}$;
- $n^2 + 5n + 47$: primo para $n \in \{0, 1, 2, \dots, 36, 37\}$;
- $n^2 + 7n + 53$: primo para $n \in \{0, 1, 2, \dots, 35, 36\}$.

Cada um desses polinômios gera valores primos por um longo conjunto de valores consecutivos de n .

Aqui está um exemplo dado por Fung e Ruby:

$$f(n) = 36n^2 - 810n + 2753.$$

Ele assume valores primos para $n \in \{0, 1, 2, \dots, 43, 44\}$. Polinômios semelhantes incluem:

- $f(n) = 36n^2 - 828n + 4363$: primo para $n \in \{0, 1, 2, \dots, 24, 25\}$;
- $f(n) = 36n^2 - 960n + 7993$: primo para $n \in \{0, 1, 2, \dots, 14, 15\}$.

Semelhante ao acima está aqui outro exemplo de Fung e Ruby:

$$f(n) = 47n^2 - 1701n + 10181.$$

Ele assume valores primos para $n \in \{0, 1, 2, \dots, 41, 42\}$. Polinômios semelhantes incluem:

- $f(n) = 47n^2 - 1591n + 9631$: primo para $n \in \{0, 1, 2, \dots, 10, 11\}$;
- $f(n) = 47n^2 - 371n + 8761$: primo para $n \in \{0, 1, 2, \dots, 9, 10\}$;
- $f(n) = 47n^2 - 901n + 9151$: primo para $n \in \{0, 1, 2, \dots, 7, 8\}$;
- $f(n) = 67n^2 - 1261n + 9491$: primo para $n \in \{0, 1, 2, \dots, 7, 8\}$;
- $f(n) = 67n^2 - 561n + 9241$: primo para $n \in \{0, 1, 2, \dots, 11, 12\}$.

Por fim, temos este polinômio cúbico dado por S. M. Ruiz:

$$p(n) = 3n^3 - 183n^2 + 3318n - 18757.$$

Ele assume valores primos para $n \in \{0, 1, 2, \dots, 41, 42\}$. Polinômios semelhantes incluem:

- $f(n) = 3n^3 - 183n^2 + 3138n - 13487$: primo para $n \in \{0, 1, 2, \dots, 6, 7\}$;
- $f(n) = 3n^3 - 183n^2 + 2148n - 15277$: primo para $n \in \{0, 1, 2, \dots, 8, 9\}$.

Dessa forma, podemos explorar variações em polinômios geradores de primos que geram valores primos por longos períodos de valores consecutivos do argumento. Os leitores podem encontrar mais exemplos desse tipo.

Um polinômio interessante é:

$$Q(n) = n^2 - 2999n + 2248541,$$

que produz 80 primos de $n = 1460$ a $n = 1539$, como exemplo.

Analisando atentamente o polinômio $Q(n)$, realizando algumas manipulações algébricas, obtém-se que

$$Q(n) = (-n + 1499)^2 - (-n + 1499) + 41$$

ou seja, $Q(n) = f(-n + 1499)$, onde f é o polinômio de Euler.

Os 80 primos produzidos por $Q(n)$ são, portanto, os mesmos 40 primos distintos do Polinômio de Euler, obtidos de $n = 1$ a $n = 40$. Como funções polinomiais de grau 2 têm um eixo vertical de simetria no vértice, cada valor aparece duas vezes.

O polinômio com coeficientes racionais a seguir, fugindo um pouco dos polinômios com coeficientes inteiros,

$$\frac{1}{4}nx^5 - \frac{133}{4}n^4 + \frac{6729}{4}n^3 - \frac{158379}{4}n^2 + \frac{860147}{2}n - 1705829$$

gera números primos para n entre 0 e 56.

4. A demonstração

Voltando à pergunta: existe um polinômio $p(n)$ não constante com coeficientes inteiros que gera para cada número inteiro n um número primo? A resposta é não e vamos ver porque.

Teorema 4.1 *Não existe polinômio $p(n)$ de uma variável com coeficientes inteiros e não constante que assuma apenas valores primos para valores de n inteiros.*

A condição "não constante" é necessária para evitar casos triviais. Por exemplo, suponha que $p(n) = 3$ para todos os inteiros positivos n (ou seja, é uma função constante); isso claramente assume apenas valores primos!

Para provar o teorema acima, precisamos dos dois lemas dados abaixo.

Lema 4.2 *Se $f(x)$ é um polinômio com coeficientes inteiros, então $(a - b)$ é um divisor de $f(a) - f(b)$ para quaisquer dois inteiros distintos a e b .*

Para ver por que isso é verdade, observe primeiro que $a - b$ é um divisor de $a^k - b^k$ para qualquer inteiro positivo k . Em seguida, observe que se

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

onde $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ são inteiros, então

$$f(a) - f(b) = a_n(a^n - b^n) + a_{n-1}(a^{n-1} - b^{n-1}) + \cdots + a_1(a - b).$$

Como $a - b$ é um divisor de cada termo entre parênteses à direita, segue que $a - b$ é um divisor de $f(a) - f(b)$.

Lema 4.3 *Se $f(x)$ é um polinômio com coeficiente líder positivo, então para N for suficientemente grande, $f(x)$ será positivo e estritamente crescente para todo $x > N$.*

Vamos apresentar apenas um esboço da prova deste lema. Seja

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

onde $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ são inteiros com $a_n > 0$. Podemos reescrever o polinômio na forma

$$f(x) = x^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right),$$

de onde concluímos que para x suficientemente grande $f(x)$ é positivo.

Do mesmo modo, como $f'(x)$ tem coeficiente líder positivo, existe N natural suficientemente grande tal que $f'(x) > 0, \forall x > N$. Segue que f é crescente e positiva, para todo $x > N$.

Agora voltamos à demonstração do teorema.

Demonstração: A seguir a demonstração da afirmação principal, teorema 4.1. Seja $f(x)$ um polinômio não constante com coeficientes inteiros, sem perda de generalidade podemos supor que tenha coeficiente líder positivo. Para mostrar que $f(x)$ não pode assumir apenas valores primos quando x é natural, só precisamos exibir um único valor composto que f assume. Vamos exibir tal valor.

Suponha que para o natural N tem-se que para $x \geq N$, $f(x)$ seja crescente e $f(x) > 1$. Seja $f(N) = q$. Como N é natural e os coeficientes são inteiros, segue que q é um inteiro. Então $q > 1$. Agora considere o número

$$f(N + q) - f(N).$$

Invocando o Lema 1, inferimos que $f(N + q) - f(N) = f(N + q) - q$ é divisível por q . Como $f(N) = q$, isso implica que $f(N + q)$ também é divisível por q . Além disso, $f(N + q) > q$, pois $f(N + q) > f(N)$. Isso implica que $f(N + q)$ é composto. Assim, conseguimos exibir um valor composto assumido por f .

Isso conclui a demonstração. ■

Uma consequência imediata é o seguinte resultado.

Corolário 4.4 *Se um polinômio com coeficientes inteiros de grau $m \geq 1$ gera infinitos números primos, então ele não gera todos os números primos.*

5. Espirais de Números primos

Vamos apresentar agora dois tipos de espirais que são muito utilizadas para o estudo dos números primos. São as espirais de Ulam e a espiral de Sacks.

A Espiral de Ulam é uma forma de representar os números primos em uma espiral, onde cada número inteiro é colocado em uma célula de uma grade que se expande em uma espiral a partir do centro. A ideia foi proposta pelo matemático polonês Stanisław Ulam em 1963. Veja a figura abaixo obtida do calendário da AMS de 1964.

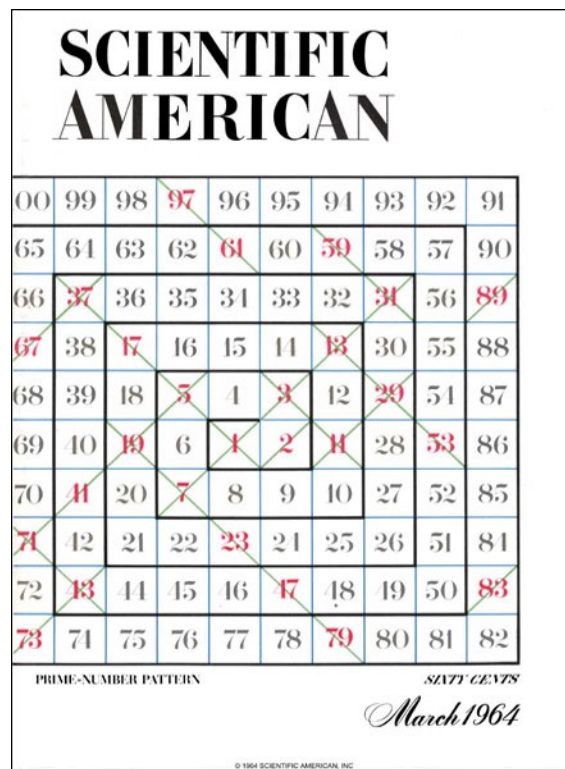


Figura 1: Espiral de Ulam com números primos destacados em vermelho.

Esta visualização pode sugerir que os números primos tendem a se agrupar em certas diagonais, embora a razão exata para isso ainda não seja completamente compreendida. A espiral também ajuda a observar a distribuição aparentemente aleatória dos números primos. Outros tipos de arranjos com os números, como o triângulo de Klauber, espiral de Sacks e a espiral hexagonal também guardam essa propriedade.

As linhas diagonais, horizontais e verticais na espiral numérica de Ulam correspondem a polinômios da forma $f(n) = 4n^2 + bn + c$ onde b e c são constantes inteiras. Quando b é par, as linhas são diagonais, e todos os números são ímpares, ou todos são pares, dependendo do valor de c .

Abaixo a espiral de Ulam contendo mais números. Observe que muitos primos estão alinhados.

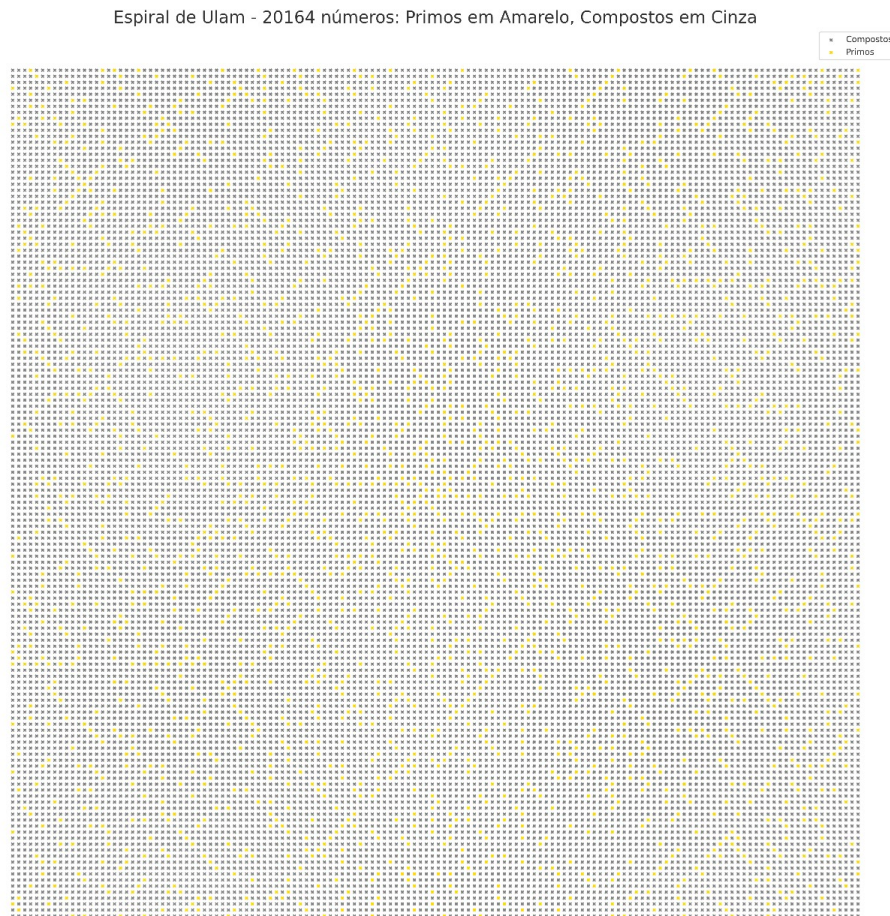


Figura 2: Espiral de Ulam com números primos destacados em amarelo e os compostos em cinza.

Em (Bode, 2018) o trabalho intitulado "Quadratic Polynomials With High Asymptotic Prime Density in The Ulam Spiral" de Steven Bode, o autor analisa as diagonais da espiral de Ulam com alta densidade assintótica de números primos, utilizando polinômios quadráticos para descrever essas diagonais e determinar a frequência dos números primos gerados por tais polinômios.

A espiral de Sacks (Sacks, 1964) é uma representação gráfica dos números inteiros no plano cartesiano, que revela padrões interessantes relacionados à distribuição dos números primos. Ela foi proposta por Robert Sacks em 1964 e é um exemplo marcante de como conceitos matemáticos abstratos podem ser visualizados geometricamente.

Na espiral de Sacks cada número inteiro n é mapeado a posição polar (r, θ) no plano,

com as seguintes relações:

$$r = \sqrt{n}, \quad (1)$$

$$\theta = 2\pi\sqrt{n}, \quad (2)$$

onde r é a distância do ponto ao centro da espiral, e θ é o ângulo correspondente em radianos.

Este esquema de parametrização assegura que os pontos formem uma espiral equilínea, pois r cresce com a raiz quadrada de n e θ é proporcional a $\sqrt{n}$.

Na figura a seguir, veja 3, apresentamos uma espiral de Sacks em que os números primos são marcados em azul, os números primos que são da forma $p = n^2 - n + 41$ (Euler) são marcados em vermelho e os números primos que são da forma $p = n^2 + n + 17$ (Legendre) são marcados em verde.

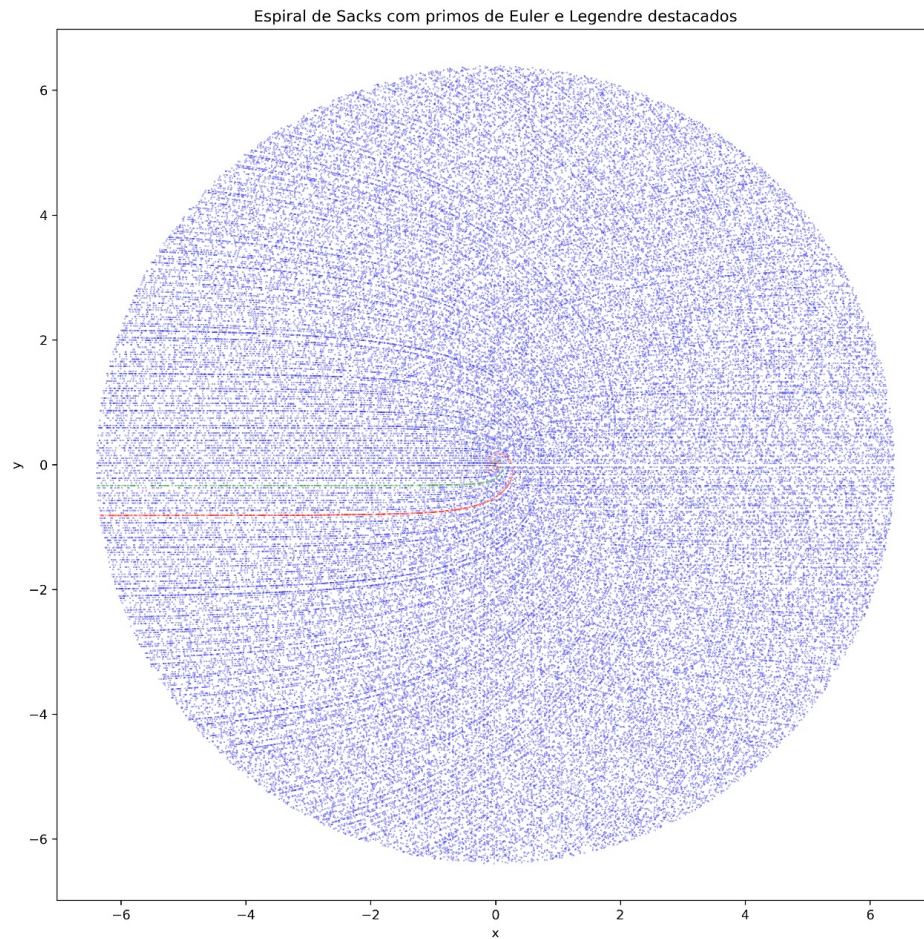


Figura 3: Espiral de Sacks.

6. Código Python

O código Python a seguir, ilustra a busca por números primos gerados pelo polinômio de Fung e Ruby dado por $p(x) = 47x^2 - 1701x + 10181$. Você pode modificar o valor *limit* para buscar números maiores. Ao final o código imprime uma tabela indicando se o número $p(n)$ é primo ou não e apresenta o total de números primos e não primos encontrados.

Você pode utilizar o mesmo código para pesquisar com um polinômio diferente, bastando para isso fazer as adaptações necessárias ao código.

Os resultados apresentados neste texto foram obtidos por meio deste código Python.

```
import math
import pandas as pd
from tabulate import tabulate

# Funcao que verifica se o numero eh primo
def is_prime(num):
# Use valor absoluto para checar se o numero eh primo
    num = abs(num)
    if num <= 1:
        return False
    if num == 2:
        return True
    if num % 2 == 0:
        return False
    max_divisor = int(math.sqrt(num)) + 1
    for d in range(3, max_divisor, 2):
        if num % d == 0:
            return False
    return True

# Polinomio de Fung e Ruby
def fung_polynomial(n):
    return 47 * n**2 - 1701 * n + 10181

# Funcao que gera os primos
def generate_table(limit):
    data = []
    prime_count = 0
    non_prime_count = 0

    for n in range(limit + 1):
        p = fung_polynomial(n)
```

```

    prime_status = is_prime(p)
    if prime_status:
        prime_count += 1
    else:
        non_prime_count += 1
    data.append({"n": n, "p(n)": p, "is_prime": prime_status})

# Cria a tabela
df = pd.DataFrame(data)

# Cria a linha se primo ou nao primo
total_row = pd.DataFrame([{"n": "Total", "p(n)": "", "is_prime": f"
    Primes: {prime_count}, Non-Primes: {non_prime_count}"}])

# Concatena em um DataFrame
df = pd.concat([df, total_row], ignore_index=True)

return df

# Exemplo de uso
if __name__ == "__main__":
    limit = 43 # Mude se quiser valores maiores de n
    table = generate_table(limit)
    print(f"Tabela de valores gerados pelo polinomio de Fungue Ruby ate n
        ={limit}:")
    print(tabulate(table, headers='keys', tablefmt='pretty'))

```

A seguir disponibilizamos o código em Python para Jupyter Notebook usado na produção da espiral de Sacks.

```

# Espiral de Sacks com os primos de Euler e de Legendre
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from sympy import isprime

# Definindo o numero de pontos
n = 1000000

# Definindo o tamanho da espiral
sz = 8
insize = sz * 0.8

# Escala para ajustar a espiral ao tamanho desejado
basescale = (insize) / (np.sqrt(n) + 1)

```

```
# Lista fixa com os numeros da forma  $n^2 - n + 41$  (primos de Euler)
euler_primos = [n**2 - n + 41 for n in range(1, int(np.sqrt(n)) + 2) if
    isprime(n**2 - n + 41)]

# Lista fixa com os numeros da forma  $n^2 + n + 17$  (primos de Legendre)
legendre_primos = [n**2 + n + 17 for n in range(1, int(np.sqrt(n)) + 2) if
    isprime(n**2 + n + 17)]

# Listas para coordenadas, tamanhos dos pontos e cores
x_coords = []
y_coords = []
tamanhos = []
cores = []

# Gerando a espiral
for j in range(n):
    i = j + 2 # Comeca do numero 2
    r = np.sqrt(i)
    theta = r * 2 * np.pi
    x = np.cos(theta) * r * basescale
    y = np.sin(theta) * r * basescale

    # Verifica se o numero eh primo
    if isprime(i):
        tamanho = basescale * 10 # Tamanho padrao para numeros primos
        x_coords.append(x)
        y_coords.append(y)
        tamanhos.append(tamanho)

        # Verifica se eh um primo de Euler
        if i in euler_primos:
            cores.append('red') # Primos de Euler em vermelho
        # Verifica se eh um primo de Legendre
        elif i in legendre_primos:
            cores.append('green') # Primos de Legendre em verde
        else:
            cores.append('blue') # Outros primos em azul

# Plotando a espiral
plt.figure(figsize=(12, 12))
plt.scatter(x_coords, y_coords, s=tamanhos, c=cores, alpha=0.6)
plt.title("Espiral de Sacks com primos de Euler e Legendre destacados")
plt.axis('equal')
```

```
plt.xlabel('x')  
plt.ylabel('y')  
plt.grid(False)  
plt.show()
```

7. Conclusão

O objetivo destas notas foi apresentar ao leitor interessado em números primos um enfoque por meio dos polinômios. Demonstramos que, embora não exista um polinômio capaz de gerar todos os números primos, a exploração de polinômios que produzem números primos para valores sucessivos de n continua sendo uma área fascinante e com potencial de pesquisa.

Durante nossa análise, vimos que existem polinômios que, sob certas condições, geram números primos com uma frequência considerável. Esses exemplos servem não apenas como curiosidades matemáticas, mas também como ferramentas para entender melhor a distribuição dos números primos e as propriedades dos polinômios. A investigação desses polinômios pode levar a novas descobertas e insights, tanto na teoria dos números quanto em outras áreas da matemática.

A pesquisa contínua nesse campo pode também ter implicações práticas, como na criptografia, onde a geração de números primos grandes e imprevisíveis é crucial. Portanto, incentivar o estudo de polinômios que produzem números primos é de grande importância tanto teórica quanto prática.

Espero ter motivado o leitor a investigar outros polinômios com as propriedades apresentadas aqui, incentivando a busca por novos métodos e estratégias na geração de números primos. Que esta exploração inspire futuras pesquisas e avanços no campo da matemática, revelando ainda mais os mistérios dos números primos e suas fascinantes propriedades.

Referências

- 1 RIBENBOIM, Paulo. **The Book of Prime Number Records**. New York: Springer-Verlag, 1991.
- 2 EULER, Leonhard. Nova observatio circa series infinitas. **Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae**, v. 17, p. 1744–1774, 1772.
- 3 BALL, W. W. R.; COXETER, H. S. M. **Mathematical Recreations and Essays**. 13. ed. [S. l.]: Dover Publications, 1987.

- 4 LE LIONNAIS, François. **Les nombres remarquables**. Paris: Hermann, 1983.
- 5 RABINOWITZ, G. On primes of the form $n^2 + n + p$. **Transactions of the American Mathematical Society**, v. 14, p. 1–16, 1913.
- 6 DIRICHLET, P. G. L. Beweis des Satzes, dass jede unbegrenzte arithmetische Progression, deren erstes Glied und Differenz ganze Zahlen ohne gemeinschaftlichen Factor sind, unendlich viele Primzahlen enthält. **Abhandlungen der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin**, v. 8, p. 45–81, 1837. Disponível em:
<https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k99435r/f326>.
- 7 STEPHAN, R. **There are infinitely many prime numbers in all arithmetic progressions with first term and difference coprime (English translation of Dirichlet's 1837 publication)**. [S. l.: s. n.], 2014. Disponível em:
<https://arxiv.org/pdf/0808.1408.pdf>.
- 8 BUNYAKOVSKY, V. Y. Sur les diviseurs numériques invariables des fonctions rationnelles entières. **Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de Saint-Petersbourg**, VIII (Première partie Tome VI), p. 305–329, 1857. Disponível em:
<https://books.google.fr/books?hl=fr&id=wXIhAQAAAJ&pg=PA305>.
- 9 DELOIN, Robert. Proof of Bunyakovsky's conjecture. **Theoretical Mathematics & Applications**, Scientific Press International Limited, v. 10, n. 3, p. 77–81, 2020. ISSN 1792-9687.
- 10 BODE, Steven. **Quadratic Polynomials With High Asymptotic Prime Density in The Ulam Spiral**. [S. l.: s. n.], 2018. Senior Seminar Thesis, University of Minnesota, Morris.
- 11 SACKS, Robert. Spirals of Integers. **Scientific American**, 1964.

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL:

um kit de sobrevivência

$$\int_{\Omega} K d\Omega + \int_{\partial\Omega} k_g(s) ds + \sum_{p=1}^P \phi_p = 2\pi \chi(\Omega).$$

Demonstração: Seja τ uma triangulação de Ω tal que qualquer triângulo T tido em uma vizinhança recoberta de uma parametrização ortogonal com orientação de S (essa triangulação existe pelos comentários feitos acima). Pelo Teorema 2.1 para cada triângulo, obtendo:

$$\int_{T_i} K dT_i + \int_{\partial T_i} k_g(s) ds + \sum_{p=1}^P \phi_p = 2\pi.$$

Como pontos e arestas possuem medida nula, podemos somar a equação acima os triângulos e obter:

$$\sum_{i=1}^k \int_{T_i} K dT_i = \int_{\Omega} K d\Omega.$$

Como triângulos adjacentes induzem orientação contrária na aresta em comum, inteseção dos triângulos se anulam na integral. Logo,

$$\sum_{i=1}^k \int_{\partial T_i} k_g(s) ds = \int_{\partial\Omega} k_g(s) ds.$$

Portanto,

$$\int_{\Omega} K d\Omega + \int_{\partial\Omega} k_g(s) ds + \sum_{p=1}^P \sum_{i=1}^k \phi_p = 2\pi F.$$

O volume da esfera



Figura 8: Cone com área da base igual a πr^2 e altura h .

$$\sum A_k = 1,219 < A(H_1^+).$$

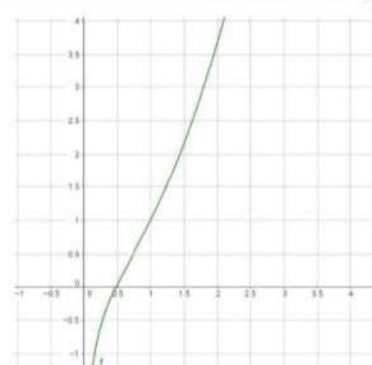
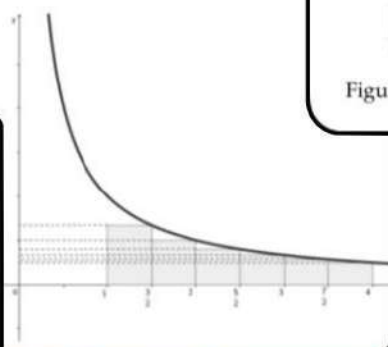
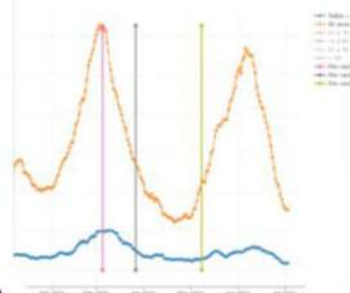


Figura 1: Gráfico da função $g(t) = t^2 + \ln(t)$

Fig 1 - Médias móveis de 7 dias das curvas positivas de COVID-19



Esta revista é responsável pela formulação de textos autorais desenvolvido pelo projeto de extensão "Kit". Neste projeto, contamos com alunos graduandos e demais interessados em matemática aplicada.

Entre seus textos, podemos encontrar, curiosidades, resoluções, demonstrações, fatos relevantes, ideais para IC, entre outros!