

JEEPEMA

Jornal eletrônico de Ensino e Pesquisa de matemática

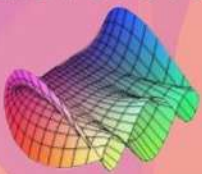
Cálculo

Diferencial

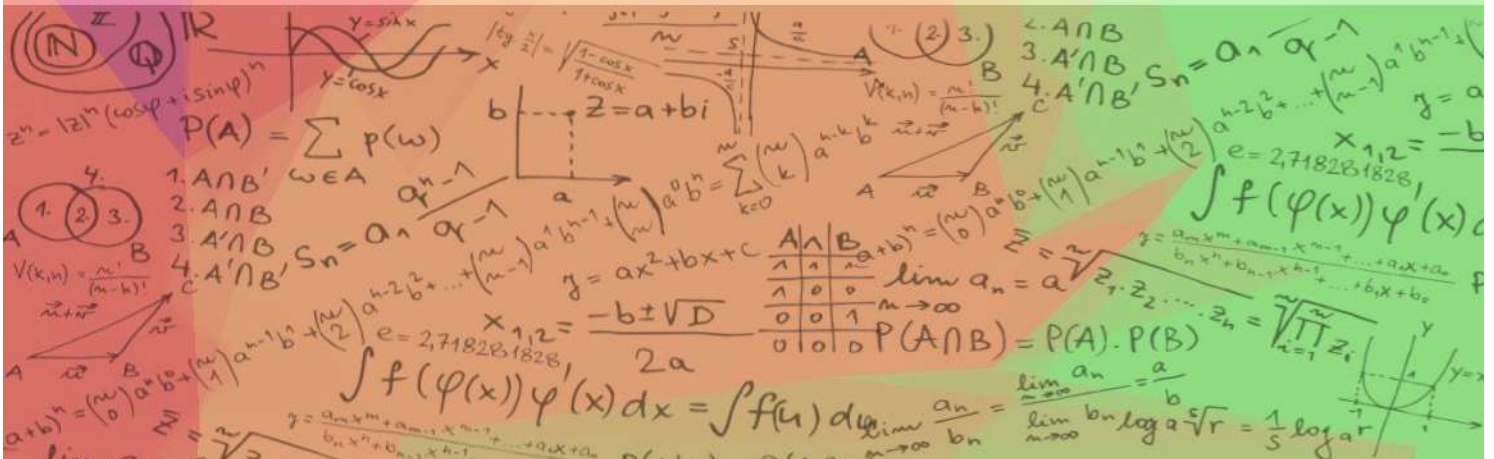
INTEGRAL:

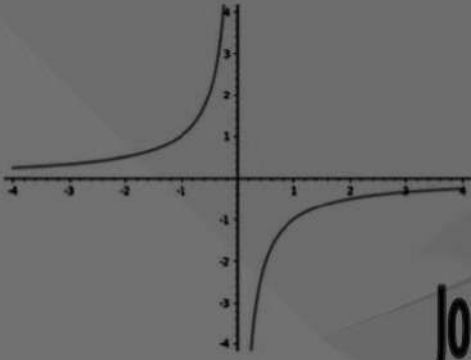


Exercícios • Apostilas • Resoluções • Vídeos Aulas •



um kit de sobrevivência!





JEEPEMA

Jornal eletrônico de Ensino e Pesquisa de matemática

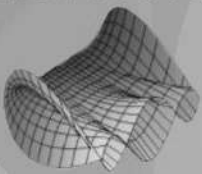
Cálculo

Diferencial

Integral:



Exercícios • Apostilas • Resoluções • Vídeos Aulas •



um kit de sobrevivência!

$(\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R})$
 $z^n = |z|^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$
 $P(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega)$
 $z = a + bi$
 $V(k, n) = \frac{n!}{(n-k)!}$
 $1. A \cap B'$
 $2. A \cap B$
 $3. A' \cap B$
 $4. A' \cap B'$
 $S_n = a^n \frac{a^n - 1}{a - 1}$
 $g = ax^2 + bx + c$
 $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{5} \log_a r$
 $\int f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = \int f(u) du$
 $\int f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = \int f(u) du$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{5} \log_a r$

Aline E. de Medeiros	- editora assistente
Laerte Bemm	- editor assistente (DMA - UEM)
Doherty Andrade	- editor assistente
Rodrigo Martins	- editor chefe (DMA - UEM)
Rafaela Mayumi da S. Fuzioka	- identidade visual
Isadora Honório Guimarães	- identidade visual

Jornal Eletrônico de Ensino de Matemática - JEEPEMA
Universidade Estadual de Maringá, Maringá-PR - Brasil
ISSN: 2594-6323
DOI: 10.4025/jeepeema

Vol. 7 N° 1 / 33 páginas - Julho/2023

Palavras-chave: Teorema de Gauss-Bonnet, Características de Euler, Aplicações, Números de Bernoulli, polinômios de Bernoulli, séries de Fourier, Função Zeta de Riemann.



Índice

Volume 7 - N° 1

1

Uma Demonstração Detalhada do Teorema de Gauss-Bonnet: Felipe Gabriel Bogo.

2

Números de Bernoulli e o Problema da Basiléia Generalizado: M. Calçada, M. L. Mirkoski e M. Pereira.



Uma demonstração detalhada do Teorema de Gauss-Bonnet

Felipe Gabriel Bogo – Email: felipegbogo@gmail.com

Resumo: O teorema de Gauss-Bonnet traz uma ligação entre a geometria diferencial e a topologia. Sua importância se dá na relação da informação geométrica de uma superfície e de suas características puramente topológicas. Neste artigo apresentamos uma demonstração cautelosa e com todos os pré-requisitos do teorema de Gauss-Bonnet. Por fim, apresentamos algumas aplicações deste resultado.

Palavras-chave: Teorema de Gauss-Bonnet, Característica de Euler, Aplicações.

1. Introdução

No século XVIII Carl Friedrich Gauss expandiu de forma expressiva a teoria de geometria, publicando seu renomado texto *disquisitiones generales circa superficies curvas* (DOMBROWSKI, 1979). Neste texto, Gauss analisa antigos resultados da geometria Euclidiana clássica para a geometria das curvas e superfícies. Um desses resultados afirma que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é π radianos. Gauss propôs que em uma superfície geral S , se considerarmos um triângulo T formado por caminhos de menor comprimento, i.e., geodésicas, a soma das medidas dos seus ângulos internos é dada pela equação

$$\int_T K dT + \pi = \alpha + \beta + \gamma,$$

em que K é a curvatura Gaussiana de S e α, β, γ são as medidas dos ângulos internos do triângulo. Podemos observar que se T é um triângulo num plano, as geodésicas são retas, implicando que $\int_T K dT = 0$. Logo, $\pi = \alpha + \beta + \gamma$, condizendo com o teorema clássico.

Em (DOMBROWSKI, 1979, p. 55), Gauss forneceu uma demonstração concreta para este fato. A generalização mais natural deste resultado, surgiu graças ao seguinte teorema de Hopf:

Teorema 1.1 (Hopf's Umlaufsatz) *Sejam $\alpha : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular e parametrizada pelo comprimento de arco por partes, simples e fechada. Sejam também $0 = t_1 < \dots < t_k = l$ uma partição de $[0, l]$, com os vértices de α dados por $\alpha(t_1), \dots, \alpha(t_k)$ e os ângulos*

exteriores dados por ϕ_1, \dots, ϕ_k , respectivamente. Então,

$$\sum_{i=1}^k \int_{t_i}^{t_{i+1}} k(s) ds + \sum_{i=1}^k \phi_i = \pm 2\pi,$$

em que $k(s)$ é a curvatura de α .

Observação 1.2 Note que a integral $\int_{t_i}^{t_{i+1}} k(s) ds$ está bem definida no intervalo $[t_i, t_{i+1}]$ e como $\alpha'(t) \in S^1$ para todo $t \in [t_i, t_{i+1}]$, existe uma função angular suave $\theta_i : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\alpha'(t) = (\cos \theta_i(t), \sin \theta_i(t))$. Assim, podemos traduzir a equação acima como:

$$\sum_{i=1}^k (\theta_i(t_i^-) - \theta_i(t_{i-1}^+)) + \sum_{i=1}^k \phi_i = \pm 2\pi.$$

Mais ainda, o resultado desta equação é 2π quando α é orientada de modo que a normal aponta para dentro da região que ela delimita e -2π caso contrário.

2. Teorema de Gauss-Bonnet

O Teorema de Hopf's Umlaufsatz implica uma generalização do resultado de Gauss para regiões simples de S , isto é, subconjuntos compactos de S contidos em uma vizinhança coordenada e com o bordo sendo o traço de uma curva parametrizada regular por partes, fechada e simples de S . Esta generalização será enunciada e demonstrada a seguir:

Teorema 2.1 (Teorema Local de Gauss-Bonnet) *Sejam S uma superfície regular e orientada de \mathbb{R}^3 e $\Omega \subset X(U)$ uma região simples de S , em que $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \cap S \subset \mathbb{R}^3$ é uma parametrização ortogonal de S . Seja $\alpha : I \rightarrow S$ uma curva parametrizada regular por partes, fechada e simples de S tal que $\alpha(I) = \partial\Omega$. Assuma que α é positivamente orientada e que $0 < t_1 < \dots < t_k = 1$ é uma partição de I . Com a notação do Teorema de Hopf's Umlaufsatz, temos que*

$$\sum_{i=1}^k \int_{t_i}^{t_{i+1}} k_g(s) ds + \int_{\Omega} K d\Omega + \sum_{i=1}^k \phi_i = 2\pi,$$

em que k_g é a curvatura geodésica da curva α e K a curvatura Gaussiana de S .

Demonstração: Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \cap S \subset \mathbb{R}^3$ a parametrização ortogonal contendo a região Ω . Uma vez que $\{X_u(p), X_v(p)\}$ é base de $T_p S$, para todo $p \in X(U)$, podemos

considerar o vetor normal unitário

$$N_S(p) = \frac{X_u(q) \times X_v(q)}{|X_u(q) \times X_v(q)|},$$

em que $p = X(q), q \in U$ (a existência desta normal em todo o ponto decorre de S ser orientada). Como estamos considerando α positivamente orientada, temos que $N_S(\alpha(s)) \times \alpha'(s)$ aponta para dentro da região Ω . Defina

$$e_1(p) := \frac{X_u(q)}{|X_u(q)|} \text{ e } e_2(p) := N_S(p) \times e_1(p).$$

Podemos escrever $\alpha(t) = (X(u(t)), X(v(t)))$, pois $\alpha(I) \subset X(U)$. Como $\{e_1(p), e_2(p)\}$ é base para $T_p S$ e α é regular por partes, temos

$$\alpha'(t) = a(t)e_1(\alpha(t)) + b(t)e_2(\alpha(t)) \text{ em } [t_i, t_{i+1}].$$

Por hipótese α é parametrizada pelo comprimento de arco, e desta forma

$$1 = |\alpha'(t)| = a(t)^2 + b(t)^2.$$

Isso implica que $\alpha'(t) \in S^1$ e que existe uma função angular suave $\theta_i : [t_i, t_{i+1}] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\alpha'(t) = \cos \theta_i(t)e_1(\alpha(t)) + \sin \theta_i(t)e_2(\alpha(t))$, com $t \in [t_i, t_{i+1}]$, para toda partição.

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{D\alpha'}{dt}(t) &= -\theta'_i(t) \sin \theta_i(t)e_1(\alpha(t)) + \cos \theta_i(t) \frac{De_1}{dt}(\alpha(t)) \\ &\quad + \theta'_i(t) \cos \theta_i(t)e_2(\alpha(t)) + \sin \theta_i(t) \frac{De_2}{dt}(\alpha(t)) \\ &= \theta'_i(t)(\sin \theta_i(t)e_1(\alpha(t)) + \cos \theta_i(t)e_2(\alpha(t))) \\ &\quad + \cos \theta_i(t) \frac{De_1}{dt}(\alpha(t)) + \sin \theta_i(t) \frac{De_2}{dt}(\alpha(t)) \\ &= \theta'_i(t)(N_S(\alpha(t)) \times \alpha'(t)) \\ &\quad + \left\langle \frac{De_1}{dt}(\alpha(t)), e_2(\alpha(t)) \right\rangle (-\sin \theta_i(t)e_1(\alpha(t)) + \cos \theta_i(t)e_2(\alpha(t))) \\ &= \left(\theta'_i(t) + \left\langle \frac{De_1}{dt}(\alpha(t)), e_2(\alpha(t)) \right\rangle \right) N_S(\alpha(t)) \times \alpha'(t). \end{aligned}$$

Note que as igualdades acima são válidas pela natureza da normal ao longo de uma curva regular e da definição da derivada covariante, para todo $t \in [t_i, t_{i+1}]$. Com isso, concluímos

que

$$k_g(t) = \langle \alpha''(t), N_S(\alpha(t)) \times \alpha'(t) \rangle = \theta'_i(t) + \left\langle \frac{De_1}{dt}(\alpha(t)), e_2(\alpha(t)) \right\rangle.$$

Como a parametrização que estamos considerando é ortogonal, pelas equações de compatibilidade temos que

$$e_1(\alpha(t)) = \frac{X_u(u(t), v(t))}{\sqrt{E(u(t), v(t))}} \text{ e } e_2(\alpha(t)) = \frac{X_v(u(t), v(t))}{\sqrt{G(u(t), v(t))}}.$$

Note que estamos interessados em calcular o produto interno $\left\langle \frac{De_1}{dt}(\alpha(t)), e_2(\alpha(t)) \right\rangle$, e para isto só precisamos das coordenadas relacionadas com o vetor da base X_v . Temos,

$$\pi_v \left(\frac{De_1}{dt}(\alpha(t)) \right) = u'(t)\Gamma_{11}^2 X_v(\alpha(t)) + v'(t)\Gamma_{12}^2 X_v(\alpha(t)), \text{ em que } \pi_v \text{ é a projeção em } X_v.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{De_1}{dt}(\alpha(t)), e_2(\alpha(t)) \right\rangle &= A(u'(t)\Gamma_{11}^2 + v'(t)\Gamma_{12}^2) \\ &= A \left(-u'(t) \frac{1}{2G(u(t), v(t))} E_v(u(t), v(t)) + v'(t) \frac{G_u(u(t), v(t))}{2G(u(t), v(t))} \right) \\ &= B(-u'(t)E_v(u(t), v(t)) + v'(t)G_u(u(t), v(t))) \\ &= \langle (v'(t), -u'(t)), (BG_u(u(t), v(t)), BE_v(u(t), v(t))) \rangle. \end{aligned}$$

em que $A := \frac{\sqrt{G(u(t), v(t))}}{\sqrt{E(u(t), v(t))}}$ e $B^{-1} := 2\sqrt{E(u(t), v(t))G(u(t), v(t))}$. Como $X^{-1}(\alpha(I))$ é uma curva de Jordan suave por partes delimitando a região $X^{-1}(\Omega)$, podemos usar o Teorema de Stokes para calcular a integral da curvatura geodésica de α nas partições $[t_i, t_{i+1}]$ do seguinte modo:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \int_{t_i}^{t_{i+1}} k_g(s) ds &= \sum_{i=1}^k (\theta_i(t_{i+1}^-) - \theta_i(t_i^+)) \\ &+ \sum_{i=1}^k \int_{t_i}^{t_{i+1}} \langle (v'(t), -u'(t)), (BG_u(u(t), v(t)), BE_v(u(t), v(t))) \rangle dt \\ &= \sum_{i=1}^k (\theta_i(t_{i+1}^-) - \theta_i(t_i^+)) + \\ &+ \int_{X^{-1}(\Omega)} (BG_u(u(t), v(t)))_u + (BE_v(u(t), v(t)))_v \, dudv \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^k (\theta_i(t_{i+1}^-) - \theta_i(t_i^+)) + \int_{X^{-1}(\Omega)} (-K \sqrt{E(u(t), v(t))G(u(t), v(t))}) dudv \\
&= \sum_{i=1}^k (\theta_i(t_{i+1}^-) - \theta_i(t_i^+)) - \int_{\Omega} K d\Omega.
\end{aligned}$$

Finalmente, concluimos pelo Teorema de Hopf's Umlaufsatz que

$$\int_{\Omega} K d\Omega + \sum_{i=1}^k \int_{t_i}^{t_{i+1}} k_g(s) ds + \sum_{i=1}^k \phi_i = \sum_{i=1}^k (\theta_i(t_{i+1}^-) - \theta_i(t_i^+)) + \sum_{i=1}^k \phi_i = 2\pi.$$

□

Observação 2.2 *A hipótese de a parametrização ser ortogonal é apenas para amenizar as contas, mas o mesmo vale para parametrizações quaisquer da superfície S .*

Demonstrado o resultado para regiões simples, o Teorema 2.1 se generalizou para o caso de regiões regulares por partes de S , que são subconjuntos de S cuja fronteira é vazia ou união disjunta de um número finito de traços de curvas parametrizadas regulares por partes, fechadas e simples. Dizemos que T é um **triângulo** em S quando T é uma região regular por partes, homeomorfa a um disco, cuja fronteira tem exatamente 3 vértices com ângulos não nulos.

Com o avanço da topologia no século XIX, foi demonstrado que toda região regular por partes compacta Ω da superfície S admite uma triangulação τ , ou seja, uma coleção finita τ de triângulos T_1, \dots, T_k tais que

$$(i) \quad \Omega = \bigcup_{i=1}^k T_i;$$

(ii) Se $T_i \cap T_j \neq \emptyset$, quando $i \neq j$, então $T_i \cap T_j$ é um vértice ou uma aresta.

Uma demonstração deste resultado é dada em (THOMASSEN, 1992, p. 126) por C. Thomassen. Como corolário da existência de triangulações para regiões regulares por partes e compactas, podemos definir o seguinte invariante topológico:

$$\chi(\Omega) = V - E + F,$$

em que V é o número de vértices, E número de arestas e F número de faces da triangulação de Ω . Este número $\chi(\Omega)$ é chamado de **característica de Euler de Ω** . Este número de fato é um invariante topológico, pois dadas duas triangulações τ_1, τ_2 de Ω , temos que $\chi(\tau_1) = \chi(\tau_2)$. Mais ainda, se a superfície S é orientável, e orientada, existe uma triangulação τ de Ω tal que

cada triângulo está contido em alguma vizinhança coordenada associada a parametrização positiva. Além disso, se cada triângulo $T \in \tau$ é orientado positivamente, então triângulos que são adjacentes induzem a orientação oposta na aresta comum de ambos. Após toda essa discussão sobre os avanços topológicos na teoria de curvas e superfícies, foi possível demonstrar a versão global do Teorema 2.1.

Teorema 2.3 (Teorema Global de Gauss Bonnet) *Seja S uma superfície regular orientável e orientada em \mathbb{R}^3 . Seja $\Omega \subset S$ uma região regular por partes e compacta de S . Então,*

$$\int_{\Omega} K d\Omega + \int_{\partial\Omega} k_g(s) ds + \sum_{i=1}^k \phi_i = 2\pi\chi(\Omega).$$

Demonstração: Seja τ uma triangulação de Ω tal que qualquer triângulo T_i esteja contido em uma vizinhança coordenada de uma parametrização ortogonal compatível com a orientação de S (essa triangulação existe pelos comentários feitos acima). Podemos aplicar o Teorema 2.1 para cada triângulo, obtendo

$$\int_{T_i} K dT_i + \int_{\partial T_i} k_g(s) ds + \sum_{p=1}^3 \phi_p^i = 2\pi.$$

Como pontos e arestas possuem medida nula, podemos somar a equação acima para todos os triângulos e obter

$$\sum_{i=1}^k \int_{T_i} K dT_i = \int_{\Omega} K d\Omega.$$

Como triângulos adjacentes induzem orientação contrária na aresta em comum, temos que a interseção dos triângulos se anulam na integral. Logo,

$$\sum_{i=1}^k \int_{\partial T_i} k_g(s) ds = \int_{\partial\Omega} k_g(s) ds.$$

Portanto,

$$\int_{\Omega} K d\Omega + \int_{\partial\Omega} k_g(s) ds + \sum_{i=1}^F \sum_{p=1}^3 \phi_p^i = 2\pi F.$$

Mas,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \sum_{p=1}^3 \phi_p^i &= \sum_{i=1}^k (3\pi - \alpha_1^i - \alpha_2^i - \alpha_3^i) \\ &= 3\pi F - \sum_{i=1}^f \sum_{p=1}^3 \alpha_p^i, \quad \text{onde } \alpha_p^i = \pi - \phi_p^i. \end{aligned}$$

Considere as seguintes relações:

$$\begin{aligned} E_e &= \text{número de arestas externas de } \tau & E_i &= \text{número de arestas internas de } \tau \\ V_e &= \text{número de vértices externos de } \tau & V_i &= \text{número de vértices internos de } \tau. \end{aligned}$$

Como as curvas C_i que formam o bordo de Ω são fechadas, temos que $E_e = V_e$. Além disto, por indução é um pouco de combinatória, podemos mostrar que $3F = 2E_i + E_e$. Note que os vértices externos podem ser vértices de alguma curva C_i ou vértices dados por τ . Defina V_{ec} como o número de vértices das curvas C_i e defina V_{et} como o número de vértices externos da triangulação que não são vértices de alguma das curvas C_i , temos que $V_e = V_{ec} + V_{et}$. Por fim, temos que

$$\begin{aligned} 3\pi F - \sum_{i=1}^F \sum_{p=1}^3 \alpha_p^i &= 2\pi E_i + \pi E_e - 2\pi V_i - \pi V_{et} - \sum_{i=1}^{V_{ec}} (\pi - \phi_p^i) \\ &= 2\pi E - \pi V_e - 2\pi V_i - \pi V_{et} - \sum_{i=1}^{V_{ec}} (\pi - \phi_p^i) \\ &= 2\pi E - 2\pi V + \sum_{i=1}^{V_{ec}} \phi_p^i. \end{aligned}$$

Finalizando a demonstração. □

A beleza deste resultado se destaca na conexão entra a geometria diferencial (curvatura Gaussiana, curvatura geodésica e ângulos) com a topologia (característica de Euler). Com a classificação de superfícies compactas, conexas e orientáveis por meio do seu gênero, i.e., o número de “buracos” na superfície (ver E. Lima ([LIMA, 2018](#), p. 143)), foi demonstrado que a característica de Euler de uma superfície satisfazendo as condições da classificação é $2 - 2g$, em que g é o número de buracos da superfície. Se tratarmos uma superfície compacta, conexa e orientável como uma região regular com bordo vazio, temos como consequência do

Teorema Global de Gauss-Bonnet que

$$\int_S K dS = 2\pi\chi(S) = 2\pi(2 - 2g).$$

Em verdade, esta foi a generalização mostrada por Bonnet em 1848 que colocou seu nome no teorema proposto por Gauss.

Com este teorema demonstrado por Bonnet e a classificação das superfícies conexas, compactas e orientáveis, temos as seguintes consequências:

- (i) Se $K > 0$ em S , temos que $\int_S K dS > 0$, e isso acontece apenas quando $g = 0$, ou seja, S é homeomorfa a uma esfera.
- (ii) Se $K = 0$, então $\int_S K dS = 0$. Logo, $\chi(S) = 1$, implicando que S é homeomorfa a um toro.
- (iii) Se existem duas geodésicas simples e fechadas γ_1 e γ_2 em uma superfície S compacta, conexa e com curvatura positiva, então γ_1 e γ_2 se intersectam. De fato, como S tem curvatura positiva, ela é homeomorfa a uma esfera. Então se γ_1 e γ_2 não se intersectam então a região delimitada pelas geodésicas é a fronteira de um cilindro que tem característica de Euler 0. Pelo teorema de Gauss-Bonnet

$$\int_S K dS = 0$$

o que contradiz a hipótese de $K > 0$.

- (iv) Jordan-Schönflies demonstraram (ver (THOMASSEN, 1992, p. 127)) que a característica de Euler de um disco D no plano é sempre 1 e o disco D é homeomorfo a qualquer região simples R . Como o disco é uma região regular por partes e compacta, temos que

$$\int_R K dR + \int_{\partial R} k_g(s) ds + \sum_{i=1}^k \phi_i = 2\pi$$

Mostrando que essa realmente é uma generalização da versão local.

- (v) Seja T um triângulo geodésico em S com ângulos externos dados por ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 , como T é uma região regular cujo bordo são geodésicas, temos que $\int_{\partial T} k_g(s) ds = 0$. Logo,

$$\int_T K dT = 2\pi\chi(T) - \sum_{i=1}^3 \phi_i = 2\pi - (3\pi - \sum_{i=1}^3 \alpha_i) = \pi - \sum_{i=1}^3 \alpha_i,$$

onde α_i são os ângulos internos de T .

Referências

- 1 DOMBROWSKI, Peter. **150 Years After Gauss: Disquisitiones Generales Circa Superficies Curvas**. [S.l.]: Societe mathematique de France, 1979.
- 2 LIMA, Elon Lages. **Grupo fundamental e espaços de recobrimento**. [S.l.]: Instituto de Matemática Pura e Aplicada do CN Pq., 2018.
- 3 THOMASSEN, Carsten. The Jordan-Schonflies Theorem and the Classification of Surface. **The American Mathematical Monthly**, Mathematical Association of America, v. 99, n. 2, p. 116–131, 1992. ISSN 00029890, 19300972. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/2324180>.



Números de Bernoulli e o Problema da Basileia Generalizado

Marcos Calçada – Email: mcalcada@uepg.br

Maikon Luiz Mirkoski – Email: maikon.mirkoski@ifpr.edu.br

Marciano Pereira – Email: marciano@uepg.br

Resumo: Neste trabalho, os polinômios de Bernoulli são introduzidos por meio de uma caracterização simples e, posteriormente, definimos os números de Bernoulli. A seguir estudamos as séries de Fourier dos polinômios de Bernoulli. Os diversos resultados obtidos nos permitem resolver (parcialmente) o que chamamos de *Problema da Basileia generalizado*, qual seja, encontrar uma fórmula fechada para a soma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, com p inteiro maior do que 1. A função zeta de Riemann é introduzida e mostramos a sua conexão mais elementar com a teoria dos números primos. Também procuramos apresentar algumas informações históricas com o intuito de mostrar a relevância do problema considerado.

Palavras-chave: números de Bernoulli, polinômios de Bernoulli, séries de Fourier, função zeta de Riemann.

1. Introdução

Os números de Bernoulli estão entre as sequências numéricas mais interessantes e importantes da Matemática. Historicamente, os números de Bernoulli surgiram na obra póstuma *Ars Conjectandi*¹, em 1713, do suíço Jacob Bernoulli (1654-1705), na descrição de uma forma de calcular a soma de potências de inteiros consecutivos

$$S_p(n) = 1^p + 2^p + \cdots + n^p, \quad (1)$$

para inteiros $n > 0$ e $p > 0$. De forma mais precisa, os números de Bernoulli nos permitem calcular os coeficientes do polinômio de grau $p + 1$ na variável n que é o valor de $S_p(n)$. A Figura 1, com fórmulas fechadas para soma de potências, com p de 1 a 10, estava na obra de Bernoulli. Ele usou o símbolo \int , um S alongado, para indicar a somatória. Na notação moderna, as três primeiras somas seriam:

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n(n+1),$$

¹A arte de Conjeturar.

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1),$$

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2.$$

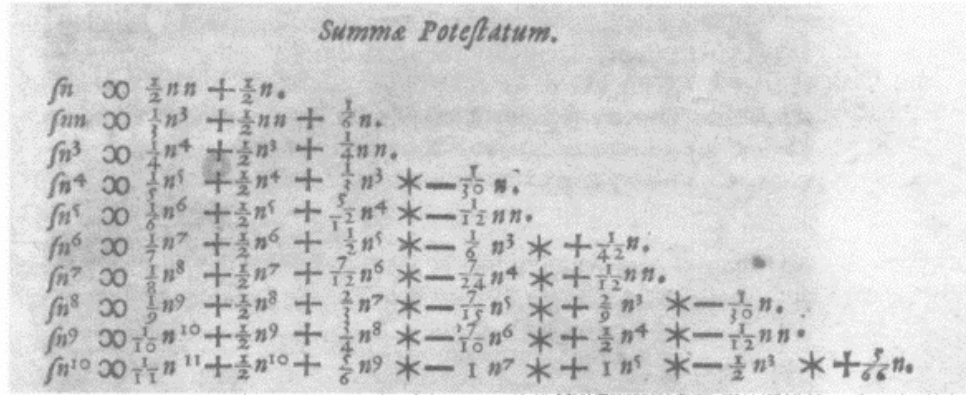


Figura 1: Reprodução da lista de fórmulas do livro *Ars Conjectandae* p. 97

A fórmula geral para calcular a soma de p -ésimas potências não foi explicitada por Bernoulli (APOSTOL, 2008), mas sabemos que

$$\sum_{k=1}^{m-1} k^p = \frac{B_{p+1}(m) - B_{p+1}}{p+1}, \quad p \geq 1, \quad m \geq 2, \quad (2)$$

sendo $B_n(x)$ um polinômio em x de grau n , chamado **polinômio de Bernoulli**, dado por

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k x^{n-k}, \quad n \geq 0, \quad (3)$$

em que os B_k são os **números de Bernoulli**. Podemos defini-los recursivamente como:

$$B_0 = 1, \quad \text{e} \quad \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k = 0, \quad \text{para } n \geq 2. \quad (4)$$

Por meio da equação (4) verificamos que:

B_0	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8	B_9	B_{10}	B_{11}	B_{12}
1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{5}{66}$	0	$-\frac{691}{2730}$

Tabela 1: Números de Bernoulli

Da equação (3), vemos que $B_n = B_n(0) = B_n(1)$, para todo $n \geq 2$. Os B_n , com n ímpar

e maior que 2, são todos iguais a zero. Assim, usando a equação (3) obtemos os polinômios de Bernoulli:

$$\begin{aligned} B_1(x) &= x - \frac{1}{2}, \\ B_2(x) &= x^2 - x + \frac{1}{6}, \\ B_3(x) &= x^3 - \frac{3x^2}{2} + \frac{x}{2}, \\ B_4(x) &= x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}, \\ B_5(x) &= x^5 - \frac{5x^4}{2} + \frac{5x}{3} - \frac{x}{6}, \\ B_6(x) &= x^6 - 3x^5 + \frac{5x^4}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{42}. \end{aligned}$$

Vale ressaltar que o japonês Takakazu Seki (1642-1708) também definiu os mesmos números de Bernoulli no seu livro póstumo *Katsuyo Sanpo*², em 1712. Este é um caso em que não haverá dúvidas quanto à descoberta independente e praticamente simultânea de um mesmo conceito (ARAKAWA et al., 2014, p. 2-3).

Os números e os polinômios de Bernoulli possuem muitas aplicações na Matemática. Por exemplo, no estudo do último teorema de Fermat (IRELAND; ROSEN, 1990), na expansão de Euler-Maclaurin (APOSTOL, 1999; MARICONDA; TONOLO, 2016), no cálculo de diferenças finitas (MARICONDA; TONOLO, 2016; GRAHAM; KNUTH; PATASHNIK, 1995), em análise combinatória (COMTET, 2011; GRAHAM; KNUTH; PATASHNIK, 1995) ou na teoria de distribuição dos números primos (OLIVEIRA, 2013; STOPPLE, 2003).

Uma importante aplicação dos números de Bernoulli é no estudo da distribuição dos números primos e da função zeta de Riemann $\zeta(s)$ (APOSTOL, 2008), definida para $s > 1$ pela série

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}. \quad (5)$$

Há bastante tempo essa função atrai a atenção de vários matemáticos de renome. Ela foi, na verdade, introduzida por Leonhard Euler, apesar do nome. Já no século XVII, ela estava ligada ao famoso **problema da Basileia**. Para compreender o problema, convém recuar a 1650, ano em que foi publicado o livro *Novæ quadraturæ arithmeticae sev de additione*

²Fundamentos da Arte do Cálculo.

fractionum, de Pietro Mengoli. É um livro sobre soma de séries, duas das quais são:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \quad (6)$$

e

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots \quad (7)$$

No livro é demonstrado que a primeira série, a série harmônica, diverge. O autor também levantou a questão de qual é o valor da soma da segunda série. Este problema também foi discutido por Jacob Bernoulli em 1689. O problema só foi resolvido em 1735 por Leonhard Euler. Ele mostrou que, de forma surpreendente,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots = \frac{\pi^2}{6}. \quad (8)$$

Variações dessa série são desde então muito estudadas, sendo que a equação (8) é na verdade $\zeta(2)$. Assim, o que estamos chamando de Problema da Basileia generalizado consiste em obter uma fórmula explícita para os valores da função zeta para inteiros maiores do que 1. O próprio Euler calculou mais valores da função zeta, chegando inclusive a calcular $\zeta(26)$ (DUNHAM, 1999).

Neste trabalho pretendemos apresentar uma solução (parcial) do problema da Basileia generalizado, ou seja, encontrar uma fórmula explícita para os valores da função zeta nos inteiros positivos pares. Esta fórmula envolve os números de Bernoulli. Para tanto, fazemos uso da teoria das séries de Fourier e seguimos um caminho totalmente diferente do caminho histórico.

2. Números e Polinômios de Bernoulli

Nesta seção introduzimos os polinômios de Bernoulli mostrando que são os únicos polinômios que satisfazem três condições simples. Já os números de Bernoulli são definidos como sendo os valores em $x = 0$ dos correspondentes polinômios de Bernoulli. A seguir mostramos como a sequência dos números de Bernoulli pode ser obtida de maneira recursiva. Por fim ilustramos esse resultado calculando os primeiros números de Bernoulli.

Proposição 2.1 *Existe uma única sequência de polinômios $B_m(x)$, $m \in \mathbb{N}$, tal que $B_0(x) = 1$ e, para todo inteiro $m \geq 1$,*

$$(i) \quad B'_m(x) = mB_{m-1}(x),$$

$$(ii) \quad \int_0^1 B_m(x) dx = 0.$$

Antes de fazermos a prova da Proposição 2.1, observe que as condições (i) e (ii) são equivalentes às condições:

$$(i) \quad B'_m(x) = mB_{m-1}(x),$$

$$(ii)' \quad B_m(1) = B_m(0), \quad \forall m \geq 2.$$

De fato, se $m \geq 1$, então

$$\int_0^1 B_m(x)dx = \int_0^1 \frac{B'_{m+1}(x)}{m+1}dx = \frac{1}{m+1} [B_{m+1}(1) - B_{m+1}(0)].$$

Demonstração: (da **Existência** - Por indução) Se $n = 1$, temos pela condição (i)

$$B'_1(x) = 1 \cdot B_0(x) = 1,$$

e assim,

$$B_1(x) = x + c_1,$$

para alguma constante c_1 . Mas pela condição (ii) obtemos

$$0 = \int_0^1 (x + c_1)dx = \frac{x^2}{2} + c_1x \Big|_0^1 = \frac{1}{2} + c_1.$$

Portanto, $c_1 = -\frac{1}{2}$ e $B_1(x) = x - \frac{1}{2}$.

Suponhamos agora por indução que para algum $n \geq 2$ existem $B_0(x), B_1(x), \dots, B_n(x)$ polinômios que satisfazem (i) e (ii). Vamos então provar que existe um único polinômio $B_{n+1}(x)$ que satisfaz as condições (i) e (ii) com $m = n + 1$, isto é,

$$(a) \quad B'_{n+1}(x) = (n+1)B_n(x),$$

$$(b) \quad \int_0^1 B_{n+1}(x)dx = 0.$$

De fato, como a integral indefinida de um polinômio é um polinômio, temos que

$$B_{n+1}(x) = B_{n+1}(0) + (n+1) \int_0^x B_n(t)dt$$

é um polinômio que satisfaz a condição (a). Além disso,

$$\int_0^1 B_{n+1}(x)dx = (n+1) \int_0^1 B'_n(x)dx = (n+1)n \int_0^1 B_{n-1}(x)dx = 0,$$

pelas condições (a) e (b) e a hipótese de indução. Provamos que existe um polinômio $B_{n+1}(x)$ que satisfaz (a) e (b).

Resta verificar a **unicidade**. Seja $\overline{B}_{n+1}(x)$ outro polinômio que satisfaz (a) e (b). Ou seja,

$$\overline{B}'_{n+1}(x) = (n+1)B_n(x) \quad \text{e} \quad \int_0^1 \overline{B}_{n+1}(x)dx = 0.$$

Então, para todo x ,

$$(B_{n+1} - \overline{B}_{n+1})'(x) = B'_{n+1}(x) - \overline{B}'_{n+1}(x) = (n+1)B_n(x) - (n+1)B_n(x) = 0.$$

Ou seja,

$$B_{n+1}(x) = \overline{B}_{n+1}(x) + c,$$

para alguma constante c . Mas, por (b),

$$0 = \int_0^1 B_{n+1}(x)dx = \int_0^1 \overline{B}_{n+1}(x)dx + \int_0^1 cdx = 0 + c = c.$$

Logo, $c = 0$ e $B_{n+1}(x) = \overline{B}_{n+1}(x), \forall x$. Assim, pelo princípio da indução matemática, vale a proposição. \square

A sequência de polinômios da Proposição 2.1 é chamada de **sequência de polinômios de Bernoulli**.

Exemplo 2.2 *Vimos que $B_0(x) = 1$ e $B_1(x) = x - \frac{1}{2}$. Agora,*

$$B'_2(x) = 2B_1(x) = 2x - 1,$$

de modo que

$$B_2(x) = x^2 - x + c,$$

para alguma constante c . Mas

$$0 = \int_0^1 B_2(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + cx \Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + c,$$

assim, $c = \frac{1}{6}$ e

$$B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}.$$

Procedendo de forma semelhante podemos verificar que:

$$\begin{aligned}
 B_3(x) &= x^3 - \frac{3x^2}{2} + \frac{x}{2}, \\
 B_4(x) &= x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}, \\
 B_5(x) &= x^5 - \frac{5x^4}{2} + \frac{5x}{3} - \frac{x}{6}, \\
 B_6(x) &= x^6 - 3x^5 + \frac{5x^4}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{42}.
 \end{aligned}$$

Nas figuras 2, 3 e 4 apresentamos os gráficos de alguns polinômios de Bernoulli.

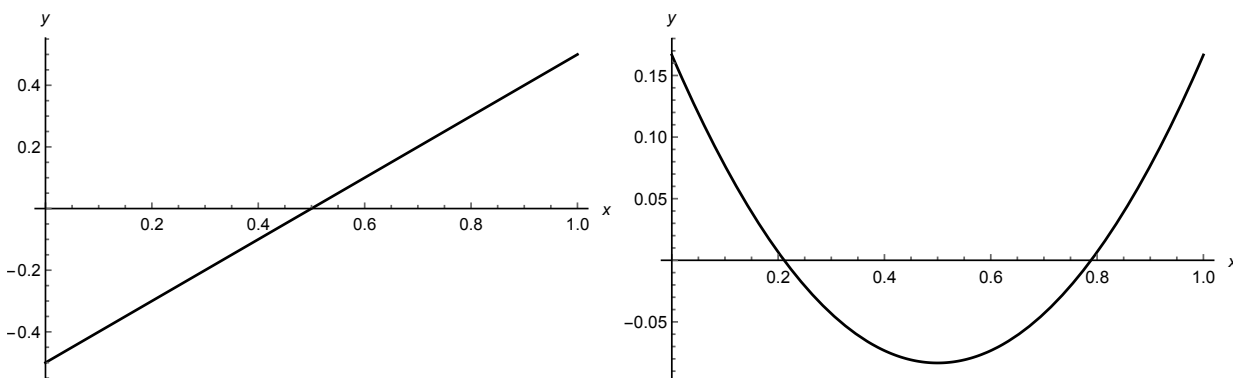


Figura 2: $B_1(x), B_2(x)$

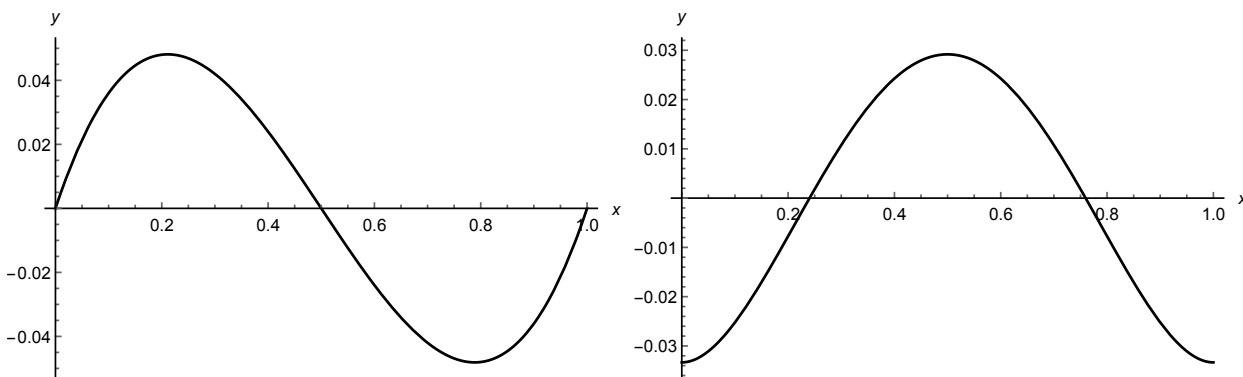


Figura 3: $B_3(x), B_4(x)$

Observe que o m -ésimo polinômio de Bernoulli é um polinômio de grau m , assim podemos escrever

$$B_m(x) = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} c_{k,m} x^{m-k}, \tag{9}$$

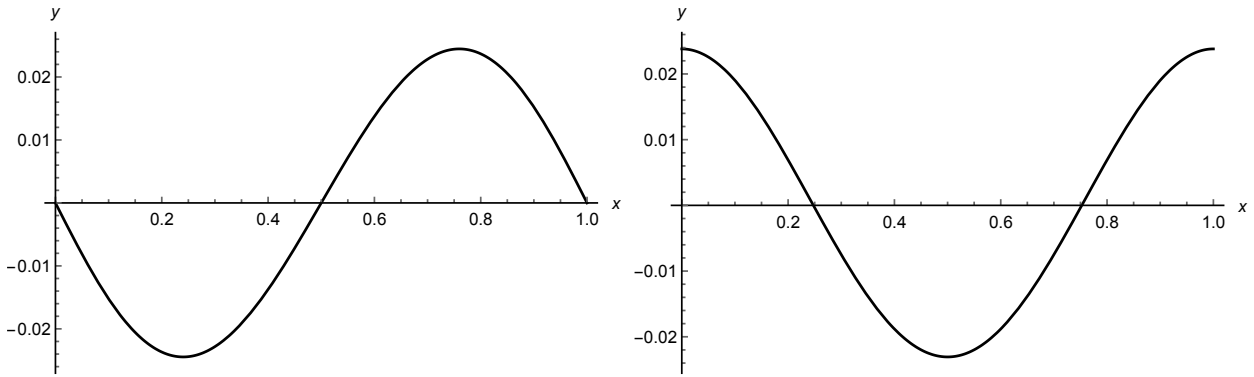


Figura 4: $B_5(x), B_6(x)$

para certos escalares $c_{0,m}, c_{1,m}, \dots, c_{m,m}$. Daí,

$$\begin{aligned} B'_m(x) &= \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m}{k} c_{k,m} (m-k) x^{m-k-1} = \sum_{k=0}^{m-1} m \binom{m-1}{k} c_{k,m} x^{m-k-1} \\ &= m \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m-1}{k} c_{k,m} x^{m-1-k}. \end{aligned}$$

Mas, pela condição (i) da proposição 2.1, temos $B'_m(x) = mB_{m-1}(x)$, se $m \geq 1$. Logo, se $m \geq 1$ temos

$$m \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m-1}{k} c_{k,m} x^{m-1-k} = m \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m-1}{k} c_{k,m-1} x^{m-k-1}.$$

Portanto, para $k = 0, 1, 2, \dots, m-1$,

$$c_{k,m} = c_{k,m-1}.$$

Quer dizer, os coeficientes $c_{k,m}$ não dependem de m , apenas de k . Assim, podemos reescrever a equação (9) como

$$B_m(x) = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} c_k x^{m-k}. \quad (10)$$

Note que $B_m(0) = \binom{m}{m} c_m = c_m$, para todo $m \in \mathbb{N}$.

Os números $B_m(0)$ são chamados **números de Bernoulli** e denotados por B_m . Logo, pelo Exemplo 2.2, temos

$$B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_3 = 0, B_4 = -\frac{1}{30}, B_5 = 0, B_6 = \frac{1}{42}.$$

Nosso raciocínio anterior provou a seguinte proposição.

Proposição 2.3 *Seja $m \in \mathbb{N}$. Então,*

$$B_m(x) = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} B_k x^{m-k}. \quad (11)$$

A próxima proposição nos fornece uma fórmula recursiva para calcular os números de Bernoulli e, conseqüentemente, os polinômios de Bernoulli.

Proposição 2.4 *Os números de Bernoulli satisfazem a relação de recorrência*

$$\begin{aligned} (i) \quad & B_0 = 1, \\ (ii) \quad & B_m = -\frac{1}{m+1} \sum_{j=0}^{m-1} \binom{m+1}{j} B_j, \quad m \geq 1. \end{aligned}$$

Demonstração: Já que

$$\int_0^1 B_m(x) dx = 0,$$

se $m \geq 1$, pela Proposição 2.3,

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} B_k \int_0^1 x^{m-k} dx = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} B_k \frac{1}{m-k+1} = \sum_{k=0}^m \binom{m+1}{k} B_k \frac{1}{m+1} \\ &= \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^m \binom{m+1}{k} B_k. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\sum_{k=0}^{m-1} \binom{m+1}{k} B_k + \binom{m+1}{m} B_m = 0,$$

ou ainda, de forma equivalente,

$$B_m = -\frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m+1}{k} B_k.$$

□

Exemplo 2.5 *Vamos calcular os 4 primeiros números de Bernoulli usando a relação de recorrência a Proposição 2.4.*

Para $m = 1$,

$$B_1 = -\frac{1}{2} \sum_{k=0}^0 \binom{2}{k} B_k = -\frac{1}{2} B_0 = -\frac{1}{2}.$$

Para $m = 2$,

$$B_2 = -\frac{1}{3} \sum_{k=0}^1 \binom{3}{k} B_k = -\frac{1}{3} \left(\binom{3}{0} B_0 + \binom{3}{1} B_1 \right) = -\frac{1}{3} \left(\frac{-1}{2} \right) = \frac{1}{6}.$$

Para $m = 3$,

$$B_3 = -\frac{1}{4} \sum_{k=0}^2 \binom{4}{k} B_k = -\frac{1}{4} \left(\binom{4}{0} B_0 + \binom{4}{1} B_1 + \binom{4}{2} B_2 \right) = -\frac{1}{4} (1 - 2 + 1) = 0.$$

Para $m = 4$,

$$\begin{aligned} B_4 &= -\frac{1}{5} \sum_{k=0}^3 \binom{5}{k} B_k = -\frac{1}{5} \left(\binom{5}{0} B_0 + \binom{5}{1} B_1 + \binom{5}{2} B_2 + \binom{5}{3} B_3 \right) \\ &= -\frac{1}{5} \left(1 - \frac{5}{2} + \frac{5}{3} \right) = -\frac{1}{30}. \end{aligned}$$

Podemos facilmente continuar aplicando a proposição 2.4 até obter a tabela abaixo.

B_0	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8	B_9	B_{10}	B_{11}	B_{12}	B_{13}	B_{14}	B_{15}
1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{5}{66}$	0	$-\frac{691}{2730}$	0	$\frac{7}{6}$	0

Tabela 2: Números de Bernoulli

3. Polinômios de Bernoulli e Séries de Fourier

Nesta seção calculamos as séries de Fourier para os polinômios de Bernoulli no intervalo $[0, 1]$. A seguir definimos a função zeta de Riemann e provamos a equação de Euler que relaciona esta função com os números primos. Por fim, utilizamos as séries de Fourier obtidas anteriormente para expressar o valor da função zeta nos pares positivos em termos de números de Bernoulli.

Inicialmente, precisamos relembrar alguns fatos básicos sobre séries de Fourier: (FIGUEIREDO, 2018)

1) A Série de Fourier de um função periódica localmente integrável $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de período 1 é a série

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(2\pi kx) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(2\pi kx),$$

em que os **coeficientes de Fourier** de f são dados por

$$a_k = 2 \int_0^1 f(x) \cos(2\pi kx) dx, \quad k \geq 0,$$

$$b_k = 2 \int_0^1 f(x) \sin(2\pi kx) dx, \quad k \geq 1,$$

Note que, como f é periódica de período 1, $a_k = 0$ se f é ímpar, e $b_k = 0$ se f é par.

2) O Teorema de Fourier de Convergência Pontual afirma que a série de Fourier de f converge para $f(x)$ em todo ponto x no qual f é contínua e tem derivadas à esquerda e à direita (não necessariamente iguais).

Fazendo uso desses fatos podemos provar a seguinte proposição.

Proposição 3.1 *As seguintes identidades são válidas:*

(i)

$$B_1(x) = -\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi kx)}{k}, \quad \forall x \in (0, 1).$$

(ii) Se m é par,

$$B_m(x) = 2(-1)^{\frac{m}{2}+1} \frac{m!}{(2\pi)^m} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi kx)}{k^m}, \quad \forall x \in [0, 1].$$

(iii) Se m é ímpar,

$$B_m(x) = 2(-1)^{\frac{m+1}{2}} \frac{m!}{(2\pi)^m} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi kx)}{k^m}, \quad \forall x \in [0, 1].$$

Demonstração: Para todo $m \geq 1$, seja $B_m^p(x)$ a extensão periódica para \mathbb{R} da restrição de $B_m(x)$ a $[0, 1]$. Assim, $B_m^p(x) = B_m(x)$ para $x \in [0, 1]$, de modo que no cálculo dos coeficientes de Fourier de $B_m^p(x)$ podemos trocar $B_m^p(x)$ por $B_m(x)$. Assim, os coeficientes de Fourier de $B_m^p(x)$ são dados por

$$a_k^m = 2 \int_0^1 B_m(x) \cos(2\pi kx) dx, \quad k \geq 0,$$

$$b_k^m = 2 \int_0^1 B_m(x) \sin(2\pi kx) dx, \quad k > 0.$$

Primeiramente, vamos calcular a série de Fourier de $B_1(x)$. Temos

$$a_0^1 = 2 \int_0^1 B_1(x) dx = 0,$$

e se $k > 0$, usando integração por partes obtemos

$$\begin{aligned} a_k^1 &= 2 \int_0^1 B_1(x) \cos(2\pi kx) dx = 2B_1(x) \frac{\sin(2\pi kx)}{2\pi k} \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 B_1'(x) \frac{\sin(2\pi kx)}{2\pi k} dx \\ &= 0 - \frac{2}{2\pi k} \int_0^1 B_0(x) \sin(2\pi kx) dx = -\frac{1}{\pi k} \int_0^1 \sin(2\pi kx) dx = 0, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} b_k^1 &= 2 \int_0^1 B_1(x) \sin(2\pi kx) dx = -\frac{2B_1(x) \cos(2\pi kx)}{2\pi k} \Big|_0^1 + 2 \int_0^1 B_1'(x) \frac{\cos(2\pi kx)}{2\pi k} dx \\ &= -\frac{(2x-1) \cos(2\pi kx)}{2\pi k} \Big|_0^1 + \frac{1}{\pi k} \int_0^1 \cos(2\pi kx) dx = -\frac{1}{\pi k}. \end{aligned}$$

Como $B_1^p(x)$ é diferenciável em $[0, 1]$, segue-se do Teorema de Fourier de Convergência Pontual que

$$B_1(x) = -\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi kx)}{k}, \quad \forall x \in (0, 1).$$

Suponhamos agora que $m > 1$. Temos, para $k \geq 1$,

$$\begin{aligned} a_k^m &= 2 \int_0^1 B_m(x) \cos(2\pi kx) dx = 2B_m(x) \frac{\sin(2\pi kx)}{2\pi k} \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 B_m'(x) \frac{\sin(2\pi kx)}{2\pi k} dx \\ &= -\frac{1}{2\pi k} 2 \int_0^1 m B_{m-1}(x) \sin(2\pi kx) dx = -\frac{m}{2\pi k} b_k^{m-1}, \quad \text{e} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_k^m &= 2 \int_0^1 B_m(x) \sin(2\pi kx) dx = -2B_m(x) \frac{\cos(2\pi kx)}{2\pi k} \Big|_0^1 + 2 \int_0^1 B_m'(x) \frac{\cos(2\pi kx)}{2\pi k} dx \\ &= -\frac{(B_m(1) - B_m(0))}{\pi k} + 2 \int_0^1 m B_{m-1}(x) \frac{\cos(2\pi kx)}{2\pi k} dx \\ &= \frac{m}{2\pi k} 2 \int_0^1 B_{m-1}(x) \cos(2\pi kx) dx = \frac{m}{2\pi k} a_k^{m-1}. \end{aligned}$$

Para $k = 0$ temos

$$a_0^m = 2 \int_0^1 B_m(x) dx = 0.$$

Verificamos então, que

$$a_k^m = -\frac{m}{2\pi k} b_k^{m-1}, \quad (12)$$

$$b_k^m = \frac{m}{2\pi k} a_k^{m-1}, \quad (13)$$

se $m > 1$. Logo, se $m > 2$,

$$a_k^m = -\frac{m(m-1)}{(2\pi k)^2} a_k^{m-2},$$

$$b_k^m = -\frac{m(m-1)}{(2\pi k)^2} b_k^{m-2}.$$

Se $m \geq 2$ e ímpar, podemos escrever

$$a_k^m = (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{m!}{(2\pi k)^{m-1}} a_k^1,$$

$$b_k^m = (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{m!}{(2\pi k)^{m-1}} b_k^1.$$

Como $a_k^1 = 0$ para todo $k \geq 0$ e, $b_k^1 = -\frac{1}{\pi k}$ para todo $k > 0$, temos

$$a_k^m = 0, \quad \forall k \geq 0, \quad (14)$$

$$b_k^m = (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{m!}{(2\pi k)^{m-1}} \frac{(-1)}{\pi k} = 2(-1)^{\frac{m+1}{2}} \frac{m!}{(2\pi k)^m}, \quad \forall k \geq 1. \quad (15)$$

Como $B_m^p(x)$ é contínua e possui derivadas laterais em todos os pontos, temos pelo Teorema de Fourier que se $m > 1$ e ímpar:

$$B_m(x) = 2(-1)^{\frac{m+1}{2}} \frac{m!}{(2\pi)^m} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi kx)}{k^m},$$

para todo $x \in [0, 1]$.

Agora se m é par e $m \geq 4$ obtemos, usando as equações (12), (13), (14) e (15).

$$a_k^m = -\frac{m}{2\pi k} b_k^{m-1} = -\frac{m}{2\pi k} 2(-1)^{\frac{m}{2}} \frac{(m-1)!}{(2\pi k)^{m-1}} = 2(-1)^{\frac{m}{2}+1} \frac{m!}{(2\pi k)^m},$$

e

$$b_k^m = \frac{m}{2\pi k} a_k^{m-1} = 0.$$

Se $m = 2$ temos pelas equações (12) e (13):

$$\begin{aligned} a_k^2 &= -\frac{2}{2\pi k} b_k^1 = -\frac{2}{2\pi k} \left(\frac{-1}{\pi k} \right) = \frac{2 \cdot 2!}{(2\pi k)^2}, \\ b_k^2 &= \frac{2}{2\pi k} a_k^1 = 0. \end{aligned}$$

Em suma, se $m \geq 2$ e par temos:

$$\begin{aligned} a_k^m &= 2(-1)^{\frac{m}{2}+1} \frac{m!}{(2\pi k)^2}, & k \geq 1, \\ a_0^m &= 0, \\ b_k^m &= 0, & k \geq 1. \end{aligned}$$

Como $B_m^p(x)$ é contínua e possui derivadas laterais em todos os pontos, temos pelo teorema de Fourier, que se $m \geq 2$ e par:

$$B_m(x) = 2(-1)^{\frac{m}{2}+1} \frac{m!}{(2\pi)^m} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi kx)}{k^m},$$

para todo $x \in [0, 1]$. □

Observação 3.2 Note que pelo item (iii) da Proposição 3.1 obtemos para $n \geq 1$,

$$B_{2n+1} = B_{2n+1}(0) = 0.$$

Ou seja, todos os números de Bernoulli com índices ímpares são nulos, exceto o primeiro.

Nas figuras 5, 6 e 7 estão os gráficos de séries truncadas com 5 e 10 termos para alguns polinômios de Bernoulli.

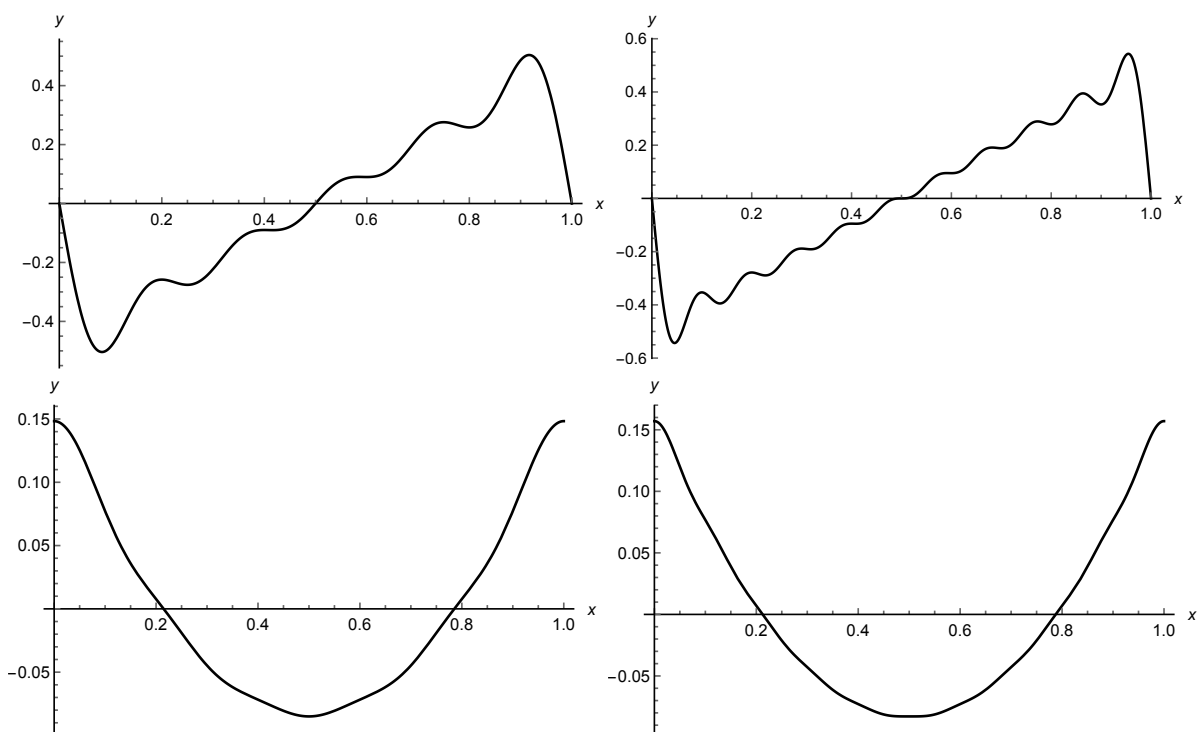


Figura 5: $B_1(x), B_2(x)$

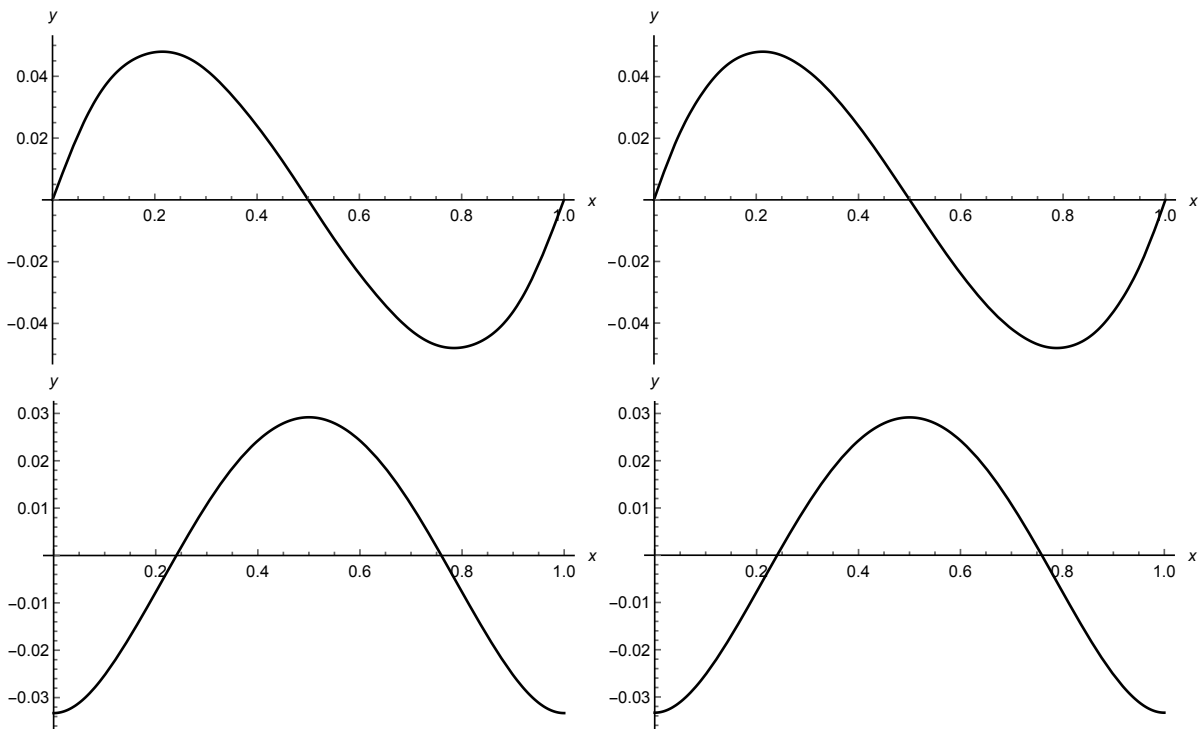


Figura 6: $B_3(x), B_4(x)$

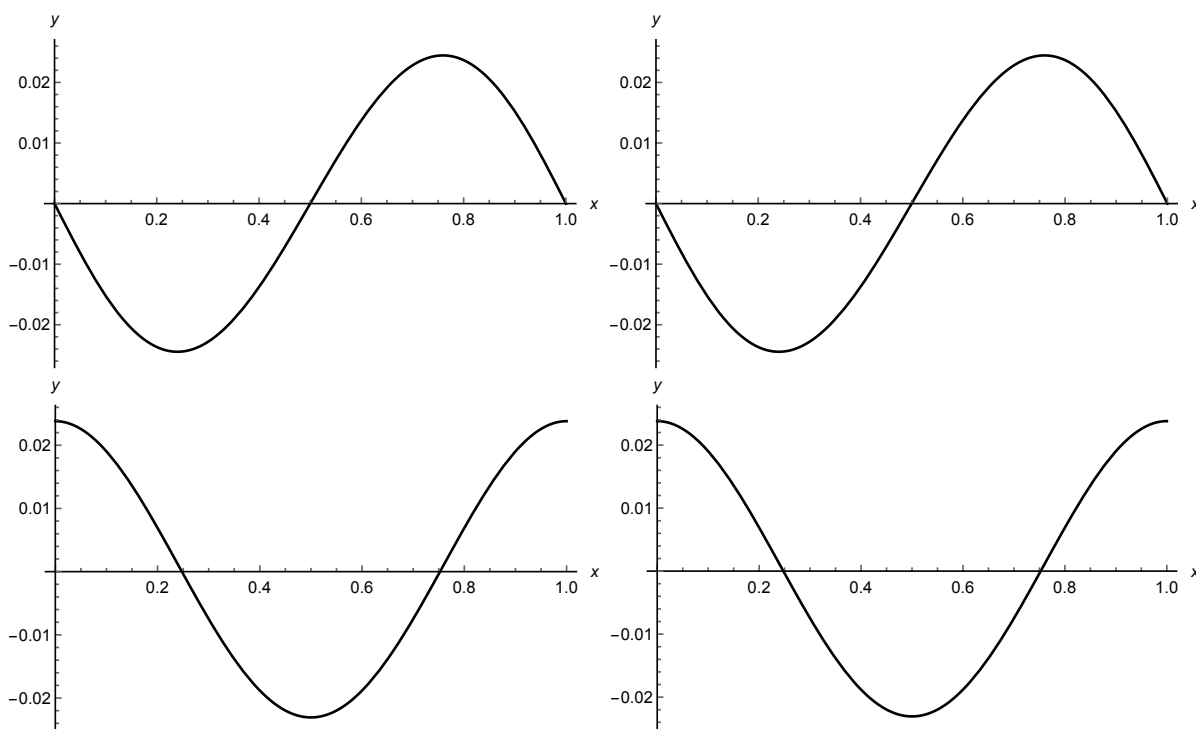


Figura 7: $B_5(x), B_6(x)$

É fácil verificar usando o teste da integral que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ converge se $x > 1$. Portanto, está bem definida a função $\zeta : (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}, \tag{16}$$

a qual é chamada de **função zeta de Riemann**. Trata-se de uma das mais importantes funções da Matemática, pois possui diversas relações fundamentais com os números primos. De fato, a primeira conexão importante entre números primos e a função zeta foi descoberta por Euler e é apresentada no próximo teorema.

Teorema 3.3 (Euler) *Para todo $s > 0$, temos que*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ primo}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}. \tag{17}$$

Demonstração: Observe primeiro que

$$\zeta(s) \frac{1}{2^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^s},$$

de modo que

$$\zeta(s) - \frac{1}{2^s} \zeta(s) = \zeta(s) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^s} \implies \left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \zeta(s) = \sum_{\substack{n=1, \\ n \text{ ímpar}}}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Agora note que

$$\left(1 - \frac{1}{3^s}\right) \left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \zeta(s) = \left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \zeta(s) - \frac{1}{3^s} \left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \zeta(s).$$

Ou seja, todos os múltiplos de 3 são removidos de $\left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \zeta(s)$. Logo,

$$\left(1 - \frac{1}{3^s}\right) \left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \zeta(s) = \sum_{\substack{n=1, \\ (n,6)=1}}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Na última somatória $(n, 6) = 1$ indica o mdc de n e 6 que é igual a 1. Quer dizer, todos os múltiplos de 2 e 3 não estão presentes no somatório. Assim, repetindo o mesmo argumento para todos os primos menores que um número x , verificamos que

$$\prod_{p < x} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) \zeta(s) = 1 + \frac{1}{q^s} + \dots,$$

em que foram retirados todos os múltiplos dos primos menores do que x . Além disso, q é o menor primo maior ou igual a x e é o menor termo depois de 1 presente no lado direito da igualdade. Portanto, tomando o limite de x tendendo ao infinito obtemos

$$\prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) \zeta(s) = 1,$$

o que prova o teorema. □

Como uma consequência simples do último teorema temos o seguinte resultado bem conhecido sobre os números primos.

Teorema 3.4 *Existem infinitos números primos.*

Demonstração: Suponhamos por absurdo que existe apenas um número finito de primos. Então, o produto do lado direito do Teorema de Euler envolve apenas um número finito de termos e, portanto, tem limite quando $s \rightarrow 1$. Porém, o lado esquerdo torna-se a série harmônica no limite quando $s \rightarrow 1$. Isso é uma contradição, já que, como sabemos, a série

$\zeta(2)$	$\zeta(4)$	$\zeta(6)$	$\zeta(8)$	$\zeta(10)$	\dots
$\frac{\pi^2}{6}$	$\frac{\pi^4}{90}$	$\frac{\pi^6}{945}$	$\frac{\pi^8}{9450}$	$\frac{\pi^{10}}{93555}$	\dots

Tabela 3: Alguns valores de $\zeta(2k)$

harmônica é divergente. Logo, existem infinitos números primos. □

O próximo resultado é a solução parcial do que chamamos de problema da Basileia generalizado e é o objetivo principal deste trabalho.

Proposição 3.5 *Seja m par e $m \geq 2$. Então*

$$\zeta(m) = (-1)^{\frac{m}{2}+1} \frac{1}{2} \frac{(2\pi)^m}{m!} B_m,$$

em que B_m é o m -ésimo número de Bernoulli.

Demonstração: De fato, usando (ii) da Proposição 3.1 obtemos

$$\begin{aligned} B_m = B_m(0) &= 2(-1)^{\frac{m}{2}+1} \frac{m!}{(2\pi)^m} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi k0)}{k^m} \\ &= 2(-1)^{\frac{m}{2}+1} \frac{m!}{(2\pi)^m} \zeta(m), \end{aligned}$$

de onde é claro o resultado. □

4. Considerações Finais

Verificamos que os valores da função zeta de Riemann nos inteiros positivos pares são dados em termos de uma expressão simples envolvendo os números de Bernoulli. Todavia, até hoje em dia não se conhece uma fórmula explícita para os valores da função zeta nos inteiros positivos ímpares. O próprio Euler tentou obter tais fórmulas sem lograr sucesso. Algum progresso foi obtido somente em 1978 quando Roger Apéry provou que $\zeta(3)$ é irracional, embora não se possa afirmar o mesmo para $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, e etc (DUNHAM, 1999). Sendo assim, o que chamamos de problema da Basileia generalizado continua em aberto.

Referências

- 1 APOSTOL, Tom M. A Primer on Bernoulli Numbers and Polynomials. **Mathematics Magazine**, Mathematical Association of America, v. 81, n. 3, p. 178–190, 2008.
- 2 _____. An Elementary View of Euler’s Summation Formula. **The American Mathematical Monthly**, Mathematical Association of America, v. 106, n. 5, p. 409–418, 1999.
- 3 ARAKAWA, Tsuneo et al. **Bernoulli Numbers and Zeta Functions**. New York: Springer, 2014. P. 285.
- 4 COMTET, Louis. **Advanced Combinatorics: The Art of Finite and Infinite Expansions**. Paris: Springer, 2011. P. 354.
- 5 DUNHAM, William. **Euler: The Master of Us All**. Washington: The Mathematical Association of America, 1999. P. 185.
- 6 FIGUEIREDO, Djairo Guedes de. **Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais**. 5. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2018. P. 292.
- 7 GRAHAM, Judy; KNUTH, Donald; PATASHNIK, Oren. **Matemática Concreta: Fundamentos para a Ciência da Computação**. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC Editora, 1995. P. 492.
- 8 IRELAND, Kenneth; ROSEN, Michael. **A Classical Introduction to Modern Number Theory**. 2. ed. New York: Springer, 1990. P. 408.
- 9 MARICONDA, Carlo; TONOLO, Alberto. **Discrete Calculus: Methods for Counting**. Switzerland: Springer, 2016. P. 680.
- 10 OLIVEIRA, Willian Diego. **Zeros da Função Zeta de Riemann e o Teorema dos Números Primos**. 2013. F. 134. Mestrado em Matemática – UNESP, São José do Rio Preto.
- 11 STOPPLE, Jeffrey. **A Primer of Analytic Number Theory: From Pythagoras to Riemann**. Cambridge: Cambridge University Press, 2003. P. 400.

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL: um kit de sobrevivência

$$\int_{\Omega} K d\Omega + \int_{\partial\Omega} k_p(s) ds + \sum_{p=1}^k \phi_p = 2\pi \chi(\Omega).$$

Demonstração: Seja τ uma triangulação de Ω tal que qualquer triângulo T tido em uma vizinhança coerente de uma parametrização ortogonal com orientação de S (essa triangulação existe pelos comentários feitos acima). Pelo Teorema 2.1 para cada triângulo, obtém-se:

$$\int_T K dT_i + \int_{\partial T} k_p(s) ds + \sum_{p=1}^k \phi_p = 2\pi.$$

Como pontos e arestas possuem medida nula, podemos somar a equação acima os triângulos e obter:

$$\sum_{i=1}^k \int_T K dT_i = \int_{\Omega} K d\Omega.$$

Como triângulos adjacentes induzem orientação contrária na aresta em comum, interseção dos triângulos se anula no integral. Logo,

$$\sum_{i=1}^k \int_{\partial T_i} k_p(s) ds = \int_{\partial\Omega} k_p(s) ds.$$

Portanto,

$$\int_{\Omega} K d\Omega + \int_{\partial\Omega} k_p(s) ds + \sum_{p=1}^k \sum_{i=1}^k \phi_p = 2\pi F.$$

$$\sum A_k = 1,219 < A(\mathbb{H}_1^2).$$

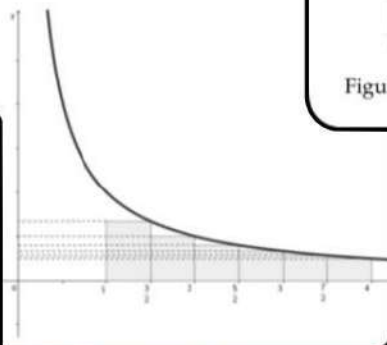


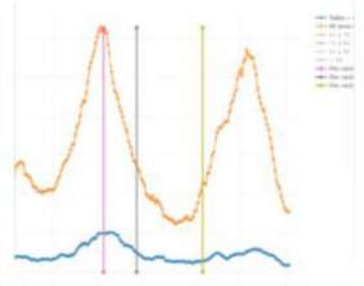
Figura 1: Gráfico da função $g(t) = t^2 + \ln(t)$

O volume da esfera



Figura 8: Cone com área da base igual a πr^2 e altura h .

Fig. 1 - Médias móveis de 7 dias dos casos positivos de COVID-19



Esta revista é responsável pela formulação de textos autorais desenvolvido pelo projeto de extensão "Kit". Neste projeto, contamos com alunos graduandos e demais interessados em matemática aplicada. Entre seus textos, podemos encontrar, curiosidades, resoluções, demonstrações, fatos relevantes, ideais para IC, entre outros!