

JEEPEMA

Jornal eletrônico de Ensino e Pesquisa de matemática

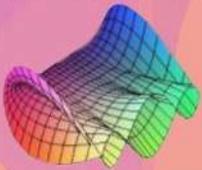
Cálculo

Diferencial

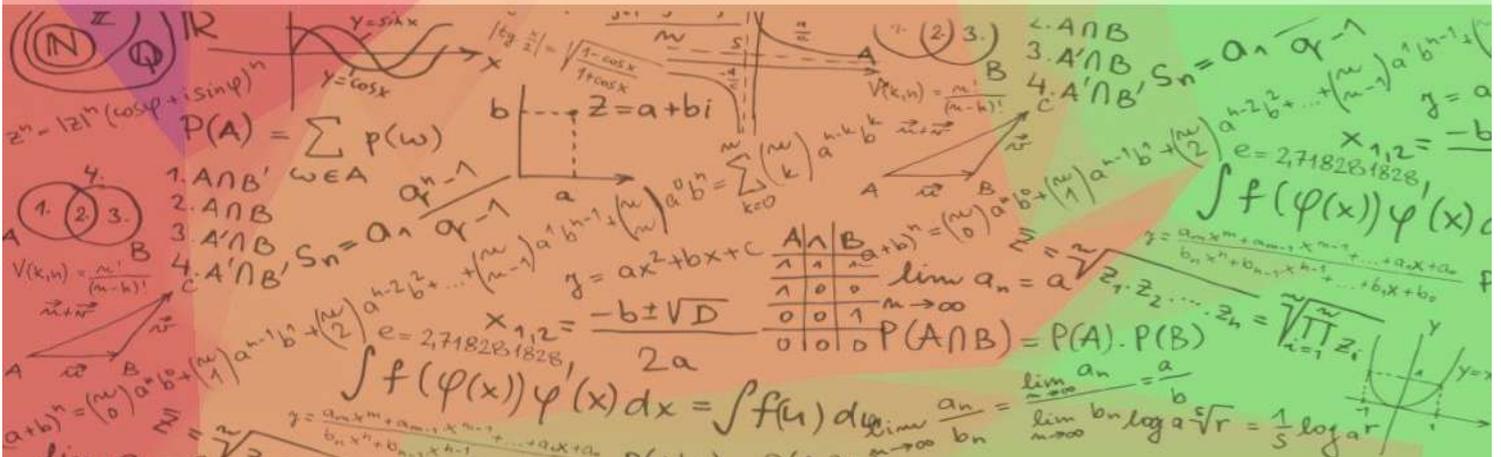
Integral

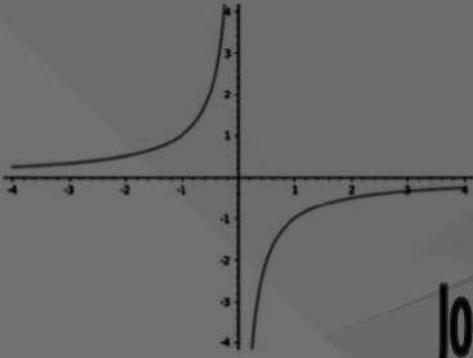


Exercícios • Apostilas • Resoluções • Vídeos Aulas •



um kit de sobrevivência!





JEEPEMA

Jornal eletrônico de Ensino e Pesquisa de matemática

Cálculo

Diferencial

Integral:



Exercícios • Apostilas • Resoluções • Vídeos Aulas •



um kit de sobrevivência!

$(\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R})$
 $z^n = |z|^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$
 $P(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega)$
 $z = a + bi$
 $\log |z| = \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$
 $V(k, n) = \frac{n!}{(n-k)!}$
 $1. A \cap B'$
 $2. A \cap B$
 $3. A' \cap B$
 $4. A' \cap B'$
 $S_n = a^n \frac{a^n - 1}{a - 1}$
 $g = ax^2 + bx + c$
 $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{5} \log_a r$
 $\int f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = \int f(u) du$
 $\int f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = \int f(u) du$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{5} \log_a r$

Aline E. de Medeiros	- editora assistente
Laerte Bemm	- editor assistente (DMA - UEM)
Doherty Andrade	- editor assistente
Rodrigo Martins	- editor chefe (DMA - UEM)
Rafaela Mayumi da S. Fuzioka	- identidade visual
Isadora Honório Guimarães	- identidade visual

Jornal Eletrônico de Ensino de Matemática - JEEPEMA
Universidade Estadual de Maringá, Maringá-PR - Brasil
ISSN: 2594-6323
DOI: 10.4025/jeepeema

Vol. 6 N° 1 / 33 páginas - Julho/2022

Palavras-chave: Congruência, Aritmética Modular, Esfera, Volume, Quadratura, Prisma, Teoria da Singularidade, Teoria de Catástrofe.



Índice

Volume 6 – N° 1

1

Aplicação de Aritmética Modular no Calendário: L. Bemm, G. L. Leopold e P. C. F. De J. Bemm.

2

A Quadratura do Círculo é o Volume da Esfera: Greyce Contini Pilati.

3

Teoria da Singularidade para Leigos: Rodrigo Martins.



Aplicação de Aritmética Modular no Calendário

Laerte Bemm – Email: lbemm2@uem.br

Guilherme Liegel Leopold

Priscila C. F. de Jesus Bemm

Resumo: Neste trabalho deduzimos uma fórmula que permite determinar o dia da semana de qualquer data a partir de 1^o de Março de 1600.

Palavras-chave: Congruência, Aritmética Modular, Calendário Gregoriano, Ano Bissexto

1. Introdução

Compreender e aplicar os conceitos matemáticos é de extrema relevância para o sucesso do processo de aprendizagem em matemática. Tal compreensão auxilia na estruturação do raciocínio e contribui para o desenvolvimento de processos que transcendem o âmbito da própria Matemática. Assimilar conceitos de maneira significativa é fator preponderante para conferir ao indivíduo a possibilidade de interpretar situações do cotidiano, fazendo da matemática uma ferramenta de suporte ao pensamento humano.

Uma dessas ferramentas, é a aritmética modular, a qual é aplicada diariamente pelas pessoas sem que elas saibam disso. Por exemplo, horas do dia, dias da semana, meses do ano, etc. Ela está diretamente associada com o cálculo do resto da divisão de números inteiros. A determinação do resto de uma divisão de dois números inteiros, e suas aplicações, vão desde a simples abordagem de conceitos de divisibilidade a aplicações mais elaboradas, empregadas em programas computacionais avançados.

Um das aplicações é a possibilidade de determinação do dia da semana de qualquer data a partir de 1^o de Março de 1600. Há sites que fazem essa determinação, veja [1], por exemplo. As planilhas eletrônicas, tipo Excel, Google Sheets, etc, tem funções que retornam o dia da semana de qualquer data a partir de 1^o de janeiro de 1900. Sendo assim, surge a questão: qual é o algoritmo ou a fórmula utilizada para essa determinação? Nosso objetivo é responder essa pergunta. Veremos que o algoritmo (fórmula) é simples. Porém, o processo de dedução não é trivial e nós o apresentaremos mais adiante.

Para tanto, dedicamos a primeira seção a abordagem do conceito de congruência, propriedades e exemplos que servirão de base para, fundamentar a aplicação em cálculos envolvendo

o calendário na segunda seção. Nela faremos uma apresentação histórica para compreender não apenas as mudanças de calendários, mas também e, essencialmente, o nosso calendário atual mundialmente utilizado, o calendário gregoriano, desde sua concepção, até os conceitos matemáticos utilizados para determinação dos anos bissextos. Ressalta-se aqui a construção de uma “fórmula matemática” que possibilita fazer estes cálculos de maneira simples e eficiente.

2. Definições e Resultados

Nessa seção, vamos estabelecer alguns conceitos e resultados da aritmética modular que nos serão úteis para o desenvolvimento do trabalho. Em geral não apresentamos as demonstrações destes resultados, mas tomamos o cuidado de sempre indicar uma bibliografia na qual o leitor interessado poderá obtê-las. As notações aqui usadas são as clássicas e encontradas na maioria dos livros relacionados ao tema, tais como (HEFEZ, 2011), (GHIORZI, s.d.) e (ROSEN, 2001).

Vamos denotar por \mathbb{Z} o conjunto dos números inteiros e \mathbb{Z}_+ o conjuntos dos números inteiros não negativos.

Definição 2.1 *Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$. Dizemos que a divide b se existir $k \in \mathbb{Z}$ tal que $b = a \cdot k$. Se a divide b , diremos também que a é um divisor ou um fator de b ou, ainda que b é um múltiplo de a .*

Quando a divide b escrevemos $a \mid b$, enquanto a negação desta sentença é representada por $a \nmid b$. Desta forma $a \nmid b$ se, e somente se, $b \neq a \cdot k$, para todo $k \in \mathbb{Z}$.

Vamos supor que $a \mid b$ com $a \neq 0$ e seja $k \in \mathbb{Z}$ tal que $b = a \cdot k$. O número inteiro k é único e chamado de *quociente* de b por a e usaremos a notação $k = \frac{b}{a}$ para indicar tal inteiro. Em contrapartida, $0 \mid b$ se, e somente se, $b = 0$. Nesse caso, o quociente não é único, pois $0 = 0 \cdot k$, para todo $k \in \mathbb{Z}$. Desta forma, o quociente $\frac{0}{0}$ é indeterminado. Por isso, vamos excluir o caso com divisor nulo e adotar esta convenção daqui em diante.

Se a e b são inteiros e b não divide a , é possível empregarmos um método que possibilite executar a “divisão” de a por b , obtendo-se um resto.

Teorema 2.2 ((MILIES, 2001), Teorema 2.1.6) (**Algoritmo da Divisão**). *Se $a, b \in \mathbb{Z}$, com $b \neq 0$, então existem dois únicos $q, r \in \mathbb{Z}$ tais que*

$$a = b \cdot q + r,$$

com $0 \leq r < |b|$.

Os números q e r são chamados, respectivamente, de *quociente* e *resto* da divisão de a por b . Observemos que o resto da divisão de a por b é zero se, e somente se, $b \mid a$.

Definição 2.3 *Sejam a, b e $m \in \mathbb{Z}$, tal que $m \neq 0$. Dizemos que a é congruente a b módulo m , se a e b tem o mesmo resto quando divididos por m .*

Se a é congruente a b módulo m , escrevemos $a \equiv b \pmod{m}$. Se a e b não são congruentes módulo m , diremos que a e b são *incongruentes* módulo m e escrevemos $a \not\equiv b \pmod{m}$.

Exemplo 2.4 *Consideremos o mês de Outubro de 2014:*

<i>Domingo</i>	<i>Segunda</i>	<i>Terça</i>	<i>Quarta</i>	<i>Quinta</i>	<i>Sexta</i>	<i>Sábado</i>
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	

Como podemos notar, em cada coluna (dia da semana) encontramos os números congruentes entre si módulo 7. Na coluna do domingo encontramos os números congruentes a 5; na segunda, os congruentes a 6; na terça, a 7; na quarta, a 1; na quinta, a 2; na sexta, a 3 e no sábado, a 4 módulo 7.

Agora, como 31 de outubro de 2014 é sexta-feira, 1^o de novembro de 2014 é sábado, dia 2 é domingo, dia 3 é segunda-feira, dia 4 é terça-feira, dia 5 é quinta-feira, dia 6 é sexta-feira e dia 7 é um sábado. Como saber o dia da semana correspondente a 24 de novembro de 2014?

Basta procurarmos um número entre 1 e 7 que seja congruente a 24 módulo 7. Para isto dividimos 24 por 7 e obtemos $24 = 7 \cdot 3 + 3$. Achamos resto igual a 3, isto é, $24 \equiv 3 \pmod{7}$. Como 3 de novembro de 2014 corresponde a segunda-feira, pois dia 1^o foi sábado, concluímos que o dia 24 de novembro de 2014 foi uma segunda-feira.

Proposição 2.5 *Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$, então $a \equiv b \pmod{m}$ se, e somente se, $m \mid (a - b)$, ou seja, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $a = b + k \cdot m$.*

Observação 2.6 *Pela proposição anterior e pelo fato de que $m \mid (a - b)$ se e somente se $|m| \mid (a - b)$, podemos nos restringir ao estudo de congruências módulo $m > 0$.*

As seguintes propriedades são bem conhecidas e serão utilizadas repetidas vezes no decorrer no texto.

Proposição 2.7 *Sejam $a, b, c, m \in \mathbb{Z}$ tais que $m > 0$. Então as seguintes propriedades são satisfeitas:*

(i) *Reflexiva:* $a \equiv a \pmod{m}$;

(ii) *Simétrica:* se $a \equiv b \pmod{m}$, então $b \equiv a \pmod{m}$;

(iii) *Transitiva:* se $a \equiv b \pmod{m}$ e $b \equiv c \pmod{m}$, então $a \equiv c \pmod{m}$.

Mais ainda, se $a \equiv b \pmod{m}$ e $c \equiv d \pmod{m}$, então

(iv) $a \pm c \equiv b \pm d \pmod{m}$;

(v) $a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod{m}$.

3. Calendário

Há indícios de que o homem pré-histórico usou de diversas técnicas para contar o tempo, como pinturas ou ranhuras em cavernas, evoluindo-as até a criação do calendário, que nada mais é do que um sistema para contagem e agrupamento de dias, visando atender as necessidades civis e religiosas de uma cultura.

O primeiro calendário foi inventado pelos Sumérios, na Mesopotâmia, por volta de 2700 a.C. tendo sido posteriormente melhorado pelos Caldeus. Este calendário era constituído de 12 meses lunares com 29 ou 30 dias. Cada mês se iniciava na lua nova, o que totalizava 354 dias no ano, e o tornava mais curto do que o calendário solar, criado pelos egípcios por volta de 2500 a.C. Os Caldeus o corrigiam, acrescentando um mês a cada três anos.

As diversas civilizações ao redor do mundo criaram diferentes calendários, baseados em suas crenças e conhecimentos. Atualmente, o Calendário Gregoriano é utilizado no mundo todo para demarcar o ano civil. Ele foi instituído pelo Papa Gregório XIII em 24 de fevereiro de 1582 e sua composição é resultado de uma reformulação do Calendário Juliano, implantado pelos romanos.

O Calendário Gregoriano é solar, ou seja, baseado no movimento da Terra em torno do Sol, que tem a duração de 365 dias, 5 horas, 48 minutos e 47 segundos, o que equivale $365 + \frac{97}{400} = 365,2425$ dias. A contagem do tempo no Calendário Gregoriano é feita em dias, agrupados em 12 meses. Os meses são constituídos por 30 ou 31 dias, com exceção de fevereiro, que é constituído por 28 ou 29 dias.

A ocorrência de 29 dias no mês de fevereiro se dá pois, como instrumento de uso prático, o calendário adota a quantidade exata de 365 dias para o período de um ano, ou seja, período de tempo menor do que a duração de uma volta completa da Terra em torno do Sol. Temos, então, que esta diferença, equivalente a 0,2425 dia, quando multiplicada por 4 resulta em 0,97

dia. Daí, faz-se, a cada 4 anos, o acréscimo de 1 dia no mês de fevereiro, o que corresponde ao chamado ano bissexto com 366 dias. Todavia, essa alteração provoca uma nova discrepância, de +0,03 dia por ano. Para corrigi-la, estabeleceu-se as seguintes regras:

- ano múltiplo de 4 é bissexto;
- ano múltiplo de 100 e não múltiplo de 400, não é bissexto;
- ano múltiplo de 400, é bissexto.

Tais regras se justificam pois,

$$0,2425 = \frac{1}{4} - \frac{1}{100} + \frac{1}{400}.$$

Desta forma, os anos 2008, 2012, 2016, 2020, 2024 e 2028 são bissextos, pois são múltiplos de 4 e não são múltiplos de 100. Os anos 1700, 1800 e 1900 não são bissextos, pois são múltiplos de 100 e não são múltiplos de 400. Finalmente, os anos 1600, 2000, 2400 e 2800 são bissextos, pois são múltiplos de 400.

3.1. Calendário e Congruência

Antes de relacionarmos o Calendário com Congruência, vamos estabelecer (de maneira totalmente aleatória) que cada dia da semana corresponde a um determinado número entre 0 e 6, conforme quadro abaixo.

Dia da Semana	Número Associado
Quarta-feira	0
Quinta-feira	1
Sexta-feira	2
Sábado	3
Domingo	4
Segunda-feira	5
Terça-feira	6

(Quadro I)

O que pretendemos nesse artigo é mostrar que sempre é possível descobrir o dia da semana de qualquer data, a partir de 1600, aplicando conceitos de congruência.

Antes disso, faremos alguns ajustes técnicos na ordem nos meses. Ordenaremos os meses do ano da seguinte forma: Março será o 1º mês, Abril o 2º, Maio o 3º, e assim sucessivamente.

Desta forma, Janeiro e Fevereiro, serão considerados o 11^o e o 12^o meses do ano anterior, respectivamente. Isso se deve ao fato de Fevereiro ter 29 dias nos anos bissextos e nos outros anos apenas 28 dias.

Assim, por exemplo, Fevereiro de 2015 será considerado como 12^o mês de 2014, e Junho de 2015, será considerado 4^o mês de 2015.

Com base nestes ajustes, vamos utilizar 1^o de Março de 1600 como data inicial, ou seja, iremos determinar o dia da semana de qualquer data posterior a 1^o de Março de 1600.

Seja $X_N \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ o número que representa o dia da semana de 1^o de Março no ano N , conforme o Quadro I. Por exemplo, quando $N = 2022$, temos $X_{2022} = 6$, pois 1^o de Março de 2022 foi terça-feira.

Observe que se o ano N não é bissexto, então 1^o de Março do ano $N - 1$ e 1^o de Março do ano N tem um deslocamento de 1 dia em relação aos dias da semana. Isso se deve, pois todo ano que não é bissexto, possui 365 dias e $365 \equiv 1 \pmod{7}$. Concluimos que,

$$X_N \equiv X_{N-1} + 1 \pmod{7},$$

sempre que N não é bissexto.

Por outro lado, se N é um ano bissexto, então 1^o de Março do ano $N - 1$ e 1^o de Março do ano N tem um deslocamento de 2 dias em relação aos dias da semana, pois o ano bissexto possui 366 dias e $366 \equiv 2 \pmod{7}$. Portanto, $X_N \equiv X_{N-1} + 2 \pmod{7}$, quando N for ano bissexto.

Vamos iniciar determinando o dia da semana de 1^o de Março de qualquer ano N , com $N \geq 1600$. Para isto, precisamos determinar quantos anos se passaram de 1600 até N e quantos anos bissextos há nesse intervalo.

Seja $A = N - 1600$ a quantidade de anos que se passaram de 1600 até o ano N . Com isso, podemos determinar os deslocamentos nos dias da semana.

Sejam $\left[\frac{A}{4} \right]$, $\left[\frac{A}{100} \right]$ e $\left[\frac{A}{400} \right]$ os quocientes das divisões de A por 4, 100 e 400, respectivamente. Então,

$$B = \left[\frac{A}{4} \right] - \left[\frac{A}{100} \right] + \left[\frac{A}{400} \right],$$

é a quantidade de anos bissextos entre 1600 e N .

Como cada um dos A anos deslocam 1^o de Março em um dia na semana e cada um dos B anos bissextos deslocam um dia a mais na semana, podemos concluir que

$$X_N \equiv (X_{1600} + A + B) \pmod{7}. \quad (1)$$

Exemplo 3.1 Vamos determinar que dia da semana foi 1^o de Março de 1600.

Como 1^o de Março de 2022 foi uma terça-feira, temos que $X_{2022} = 6$ conforme o Quadro I. Além disso,

$$A = 2022 - 1600 = 422 \text{ e } B = \left\lfloor \frac{422}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{422}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{422}{400} \right\rfloor = 105 - 4 + 1 = 102.$$

Substituindo em (1) temos

$$6 \equiv (X_{1600} + 422 + 102) \pmod{7} \iff -518 \equiv X_{1600} \pmod{7} \iff 0 \equiv X_{1600} \pmod{7}.$$

Como $X_{1600} \in \{0, 1, \dots, 6\}$ segue que $X_{1600} = 0$, ou seja, 1^o de Março de 1600 foi uma quarta-feira.

Observação 3.2 1. Como $X_{1600} = 0$, segue que

$$X_N \equiv (A + B) \pmod{7}. \quad (2)$$

2. Embora a numeração do Quadro I possa ser aleatória, nós escolhemos de modo a X_{1600} ser igual a zero, pois dessa forma simplificamos a equação (1).

Até este momento, conseguimos determinar o dia da semana de 1^o de Março de qualquer ano. Nosso próximo passo é determinar o dia da semana de um dia qualquer de Março de um ano $N \geq 1600$ qualquer.

Seja y o dia de Março do ano N escolhido para determinarmos o correspondente dia da semana e seja $X \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ o número que representa este dia da semana, conforme o Quadro I. Por exemplo, se $y = 19$ e $N = 2022$, então $X = 3$. Vamos deduzir uma maneira de determinar X .

Afirmação:

$$(X - X_N) \equiv y - 1 \pmod{7}. \quad (3)$$

De fato, note que $y \in \{1, 2, 3, \dots, 30, 31\}$.

- Se $y = 1, 8, 15, 22$ ou 29 , então y de Março do ano N e 1^o de Março do ano N correspondem ao mesmo dia da semana. Daí $X - X_N = 0$, ou seja, $(X - X_N) \equiv y - 1 \pmod{7}$.

- Se $y = 2, 9, 16, 23$ ou 30 , então y de Março do ano N e 1° de Março do ano N diferem de 1 em relação aos dias da semana. Daí, $X - X_N = 1$, ou seja, $(X - X_N) \equiv y - 1 \pmod{7}$.
- Se $y = 3, 10, 17, 24$ ou 31 , então y de Março do ano N e 1° de Março do ano N diferem de 2 em relação aos dias da semana. Daí $X - X_N = 2$, ou seja, $(X - X_N) \equiv y - 1 \pmod{7}$.
- Se $y = 4, 11, 18$ ou 25 , então y de Março do ano N e 1° de Março do ano N diferem de 3 em relação aos dias da semana. Daí $X - X_N = 3$, ou seja, $(X - X_N) \equiv y - 1 \pmod{7}$.
- Se $C = 5, 12, 19$ ou 26 , então y de Março do ano N e 1° de Março do ano N diferem de 4 em relação aos dias da semana. Daí $X - X_N = 4$, ou seja, $(X - X_N) \equiv y - 1 \pmod{7}$.
- Se $y = 6, 13, 20$ ou 27 , então y de Março do ano N e 1° de Março do ano N diferem de 5 em relação aos dias da semana. Daí $X - X_N = 5$, ou seja, $(X - X_N) \equiv y - 1 \pmod{7}$.
- Se $y = 7, 14, 21$ ou 28 , então y de Março do ano N e 1° de Março do ano N diferem de 6 em relação aos dias da semana. Daí $X - X_N = 6$, ou seja, $(X - X_N) \equiv y - 1 \pmod{7}$.

Essa análise mostra que nossa afirmação é verdadeira.

Somando membro a membro as equações (2) e (3), (veja Proposição 2.7 (iv)), temos que

$$X \equiv (A + B + y - 1) \pmod{7}. \quad (4)$$

Com esta fórmula, podemos determinar o dia da semana de qualquer dia de Março de qualquer ano $N \geq 1600$.

Exemplo 3.3 *Vamos determinar que dia da semana corresponde ao dia 28 de março de 2000.*

Nesse caso, temos:

$$\begin{aligned} A &= 2000 - 1600 = 400; \\ B &= \left[\frac{400}{4} \right] - \left[\frac{400}{100} \right] + \left[\frac{400}{400} \right] = 100 - 4 + 1 = 97; \\ y &= 28. \end{aligned}$$

Então, pela equação (4), temos

$$X \equiv (400 + 97 + 27) \pmod{7} \iff X \equiv 524 \pmod{7} \iff X \equiv 6 \pmod{7}.$$

Logo, $X = 6$ e o dia 28 de março de 2000 foi terça-feira.

Finalmente, vamos determinar o dia da semana para qualquer data a partir de 1º de Março de 1600.

Se todos os meses do ano tivessem exatamente 28 dias, então todos os meses do ano se iniciariam no mesmo dia da semana, pois 28 é divisível por 7. Ocorre que nos anos não bissextos, há meses com 28, 30 ou 31 dias, o que gera um deslocamento nos dias da semana.

Consideremos um dia y de um mês M do ano N a partir de 1º de Março de 1600. Seja $W \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ o número que representa o dia da semana, conforme Quadro I.

Como antes X , representa o dia da semana de qualquer data de março do ano N .

Sabendo que março, mês anterior a abril, possui 31 dias, e $31 \equiv 3 \pmod{7}$, segue que estes 3 dias deslocarão os dias da semana de abril em 3 unidades, em relação a março. Logo, para y de **abril** de N , temos

$$W \equiv (X + 3) \pmod{7}.$$

Já que abril possui 30 dias, e $30 \equiv 2 \pmod{7}$, segue que estes 2 dias, somados com os 3 dias acumulados no mês anterior, deslocarão os dias da semana de maio em 5 unidades, em relação a março. Logo, para y de **maio** de N , temos

$$W \equiv (X + 5) \pmod{7}.$$

Agora, maio possui 31 dias, e $31 \equiv 3 \pmod{7}$. Então, estes 3 dias, somados com os 5 dias acumulados no mês anterior, deslocarão os dias da semana de junho em 8 unidades, em relação a março. Logo, para y de junho, temos $W \equiv (X + 8) \pmod{7}$. Como $8 \equiv 1 \pmod{7}$, temos que para y de **junho** de N ,

$$W \equiv (X + 1) \pmod{7}.$$

Como junho possui 30 dias, e $30 \equiv 2 \pmod{7}$, segue que estes 2 dias, somados com 1 dia acumulado no mês anterior, deslocarão os dias da semana de julho em 3 unidades, em relação a março. Logo, para y de **julho** de N ,

$$W \equiv (X + 3) \pmod{7}.$$

Sabendo que julho possui 31 dias, e $31 \equiv 3 \pmod{7}$, segue que estes 3 dias, somados com os 3 dias acumulados no mês anterior, deslocarão os dias da semana de agosto em 6 unidades, em relação a março. Logo, para y de **agosto** de N ,

$$W \equiv (X + 6) \pmod{7}.$$

Uma vez que agosto possui 31 dias, e $31 \equiv 3 \pmod{7}$, segue que estes 3 dias, somados com os 6 dias acumulados no mês anterior, deslocarão os dias da semana de setembro em 9 unidades, em relação a março. Logo, para y de setembro de N , $W \equiv (X + 9) \pmod{7}$. Como $9 \equiv 2 \pmod{7}$, temos que

$$W \equiv (X + 2) \pmod{7}.$$

Setembro possui 30 dias, e $30 \equiv 2 \pmod{7}$. Segue que estes 2 dias, somados com os 2 dias acumulados no mês anterior, deslocarão os dias da semana de outubro em 4 unidades, em relação a março. Logo, para y **outubro** de N ,

$$W \equiv (X + 4) \pmod{7}.$$

Sabendo que outubro possui 31 dias, e $31 \equiv 3 \pmod{7}$, segue que estes 3 dias, somados com os 4 dias acumulados no mês anterior, deslocarão os dias da semana de novembro em 7 unidades, em relação a março. Logo, para y de **novembro** de N , $W \equiv (X + 7) \pmod{7}$. Como $7 \equiv 0 \pmod{7}$, temos que

$$W \equiv (X + 0) \pmod{7}.$$

Como novembro possui 30 dias, e $30 \equiv 2 \pmod{7}$ e como o mês anterior não produziu deslocamento, segue que estes 2 dias deslocarão os dias da semana de dezembro em 2 unidades, em relação a março. Logo, para y de **dezembro** de N ,

$$W \equiv (X + 2) \pmod{7}.$$

Vamos relembrar que mudamos a ordem dos meses. Portanto, janeiro é considerado mês após dezembro. Desta forma, sabendo que dezembro possui 31 dias, e $31 \equiv 3 \pmod{7}$, segue que estes 3 dias, somados com os 2 dias acumulados no mês “anterior”, deslocarão os dias da semana de janeiro em 5 unidades, em relação a março do ano anterior. Logo, para y de **janeiro**,

$$W \equiv (X + 5) \pmod{7}.$$

Sabendo que janeiro possui 31 dias, e $31 \equiv 3 \pmod{7}$, segue que estes 3 dias, somados com os 5 dias acumulados no mês anterior deslocarão os dias da semana de fevereiro em 8 unidades, em relação a março do ano anterior. Logo, para y de **fevereiro**, $W \equiv (X + 8) \pmod{7}$. Como $8 \equiv 1 \pmod{7}$, temos que

$$W \equiv (X + 1) \pmod{7}.$$

E finalmente, sabendo que para anos não bissextos, fevereiro possui 28 dias e $28 \equiv$

$0 \pmod{7}$, segue que o mês de março vai acumular 1 dia. Entretanto, este acúmulo já é calculado no valor de $A = N - 1600$. Vale observar que para os meses de janeiro e fevereiro do ano N , temos $A = N - 1 - 1600$, pois esses são considerados meses do ano anterior, a saber do ano $N - 1$.

Com base nisso, se denotarmos por D o deslocamento cumulativo dos dias da semana, mês a mês, (em relação a março) obtemos o seguinte quadro:

Mês	D	Mês	D
Março	0	Setembro	2
Abril	3	Outubro	4
Mai	5	Novembro	0
Junho	1	Dezembro	2
Julho	3	Janeiro	5
Agosto	6	Fevereiro	1

(Quadro II)

Desta forma, $W \equiv (X + D) \pmod{7}$. Disso e de (4) obtemos

$$W \equiv (A + B + y - 1 + D) \pmod{7}. \quad (5)$$

Exemplo 3.4 *Vamos determinar o dia da semana que nasceu o matemático Johann Carl Friedrich Gauss: 30 de Abril de 1777.*

Temos:

$$A = 1777 - 1600 = 177;$$

$$B = \left[\frac{177}{4} \right] - \left[\frac{177}{100} \right] + \left[\frac{177}{400} \right] = 44 - 1 + 0 = 43;$$

$$y = 30;$$

$$D = 3, \text{ pois o mês é abril (ver Quadro II).}$$

Então,

$$W \equiv (177 + 43 + 29 + 3) \pmod{7} \iff W \equiv 252 \pmod{7} \iff W \equiv 0 \pmod{7}.$$

Logo, $W = 0$ e concluímos que o dia 30 de abril de 1777 foi quarta-feira.

Verificando no calendário de 1777 (abaixo), observamos que 30 de Abril de 1777 é, realmente, quarta-feira.

CALENDÁRIO (ABRIL DE 1777)

<i>Domingo</i>	<i>Segunda</i>	<i>Terça</i>	<i>Quarta</i>	<i>Quinta</i>	<i>Sexta</i>	<i>Sábado</i>
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30			

Disponível em: <http://ghiorzi.org/caleperp.htm>. Acessado em 03/03/2022 às 15:30

Exemplo 3.5 Vamos determinar em que dia da semana foi 15 de Novembro de 1889, data da Proclamação da República Brasileira.

Temos:

$$A = 1889 - 1600 = 289;$$

$$B = \left[\frac{289}{4} \right] - \left[\frac{289}{100} \right] + \left[\frac{289}{400} \right] = 72 - 2 + 0 = 70;$$

$$y = 15;$$

$$D = 0, \text{ pois o mês é novembro (ver Quadro II).}$$

Então,

$$W \equiv (289 + 70 + 14 + 0) \pmod{7} \iff W \equiv 2 \pmod{7}.$$

Logo, $W = 2$ e concluímos que a república brasileira foi proclamada numa sexta-feira.

Verificando no calendário de 1889 (abaixo), observamos que 15 de Novembro de 1889 é, realmente, sexta-feira.

CALENDÁRIO (NOVEMBRO DE 1889)

<i>Domingo</i>	<i>Segunda</i>	<i>Terça</i>	<i>Quarta</i>	<i>Quinta</i>	<i>Sexta</i>	<i>Sábado</i>
					1	2
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30

Disponível em: <http://ghiorzi.org/caleperp.htm>. Acessado em 03/03/2022 às 15:30

Exemplo 3.6 *Vamos determinar que dia da semana foi 8 de Janeiro de 1942, nascimento de Stephen William Hawking.*

Temos:

$A = 1941 - 1600 = 341$, pois janeiro de 1942 consideramos como o 11^o mês de 1941;

$$B = \left[\frac{341}{4} \right] - \left[\frac{341}{100} \right] + \left[\frac{341}{400} \right] = 85 - 3 + 0 = 82;$$

$y = 8$;

$D = 5$, pois o mês é janeiro (ver Quadro II).

Então,

$$W \equiv (341 + 82 + 7 + 5) \pmod{7} \iff W \equiv 1 \pmod{7}.$$

Logo, $W = 1$ e com isso concluímos que Stephen Hawking nasceu numa quinta-feira.

Exemplo 3.7 *Vamos determinar que dia da semana será 28 de Fevereiro de 2100.*

Temos:

$A = 2099 - 1600 = 499$, pois fevereiro consideramos como o 12^o mês de 2099;

$$B = \left[\frac{499}{4} \right] - \left[\frac{499}{100} \right] + \left[\frac{499}{400} \right] = 124 - 4 + 1 = 121;$$

$y = 28$;

$D = 1$, pois o mês é fevereiro (ver Quadro II).

Então,

$$W \equiv (499 + 121 + 27 + 1) \pmod{7} \iff W \equiv 4 \pmod{7}.$$

Logo, $W = 4$ e o dia 28 de Fevereiro de 2100 será domingo.

Para finalizar, apresentamos um programa feito em Python que determina o dia da semana de uma data qualquer a partir de 1^o de março de 1600. Para que o programa rode, basta que o usuário digite: o ano no campo 'Digite o ano: '; o número do mês no campo 'Digite o mês (Número de 1 a 12): '; o dia no campo 'Digite o dia: '. Por exemplo, para determinar o dia da semana de 24 de março de 1722, este preenchimento fica: 'Digite o ano: 1722'; 'Digite o mês (Número de 1 a 12): 03' e 'Digite o dia: 24'.

```
import math
ano=int(input('Digite o ano: '))
mes=int(input('Digite o mês (Número de 1 a 12): '))
dia=int(input('Digite o dia: '))
```

```
if mes==1 or mes==2:
A=ano-1601
else:
A = ano - 1600
if mes==1 or mes==5:
d=5
if mes==3 or mes==11:
d=0
if mes==6 or mes==2:
d=1
if mes==7 or mes==4:
d=3
if mes==8:
d=6
if mes==12 or mes==9:
d=2
if mes==10:
d=4
B=math.trunc(A/4)-math.trunc(A/100)+math.trunc(A/400)
x=(A+B+dia-1+d)%7
if x==0:
ds='Quarta-feira'
if x==1:
ds='Quinta-feira'
if x==2:
ds='Sexta-feira'
if x==3:
ds='Sábado'
if x==4:
ds='Domingo'
if x==5:
ds='Segunda-feira'
if x==6:
ds='Terça-feira'
print('Esse dia cai numa '.format(ds))
```

Observação 3.8 *Esse trabalho é parte da dissertação de mestrado de Guilherme Liegel Leopold, intitulada “Congruências e Aplicações” e defendida em 2015.*

Referências

- 1 GHIORZI, T. **Calendários Perpétuos**. [S.l.]. Disponível em: <http://ghiorzi.org/caleperp.htm>.
- 2 HEFEZ, A. Elementos de Aritmética. **SBM**, Rio de Janeiro/RJ, 2011.
- 3 MILIES, F. C. P. **Números: Uma Introdução à Matemática**. 3. ed. São Paulo/SP: Editora da Universidade de São Paulo, 2001.
- 4 ROSEN, K. H. **Elementary Number Theory and Its Applications**. 3. ed. São Paulo, 2001.



A quadratura do círculo e o volume da esfera

Greyce Contini Pilati

União Brasileira de Faculdades e Colégio Estadual Marechal Costa e Silva - EFMP,
Pr - Brasil, greycepilati@hotmail.com

Resumo: Dentre os problemas que mais fascinaram os matemáticos ao longo da história está a quadratura do círculo. O número irracional π tem relação direta com esse problema e foi peça fundamental na conjectura de sua impossibilidade de solução utilizando apenas régua não graduada e compasso com uma quantidade finita de etapas, como foi proposto por Euclides. A quadratura do círculo é possível sem essas regras e, ainda mais, com ela é possível realizar a transformação da esfera em um prisma de base quadrada.

Palavras-chave: Esfera, volume, quadratura, prisma.

1. Introdução.



Figura 1: Esfera e cubo com volumes iguais.

Fonte: A autora.

Um dos sólidos que mais atrai a atenção das pessoas por sua beleza, sem dúvida, é a esfera. Seja em brincadeiras com bolhas de sabão, na natureza, na arquitetura ou na prática de esportes sua representação está presente, encantando e instigando a curiosidade a seu respeito. Esse fascínio envolveu há muitos anos Arquimedes, que segundo (ÁVILA, 2010), conseguiu calcular o volume da esfera comparando-a com um cilindro e um cone, utilizando-se de forma mecânica o equilíbrio de pesos e alavancas e que posteriormente ele mesmo, no

livro: "Sobre a Esfera e o Cilindro, parte II" teria demonstrado com todo o rigor necessário pelo método da exaustão e dupla redução ao absurdo a obtenção do mesmo volume.

Minha intenção aqui é mostrar como obter o volume da esfera com um prisma de base quadrada, utilizando a quadratura do círculo máximo da esfera, já que o prisma é um poliedro mais comum e tem o cálculo do volume mais simplificado, ou seja, como produto da área da base pela sua altura.

Para isso, faz-se necessário primeiro estudarmos um problema clássico da Matemática conhecido como a quadratura do círculo, que consiste em construir um quadrado de mesma área de um círculo dado, utilizando apenas régua e compasso. Este problema mobilizou matemáticos durante séculos, principalmente os gregos, por seu desafio intelectual.

Desde o século XIX sabemos que a quadratura do círculo não possui solução apenas com uso de régua não graduada e compasso com um número determinado de etapas, pois π é um número transcendente, o que foi demonstrado por Ferdinand Von Lindemann em 1882, ou seja, π não é solução de nenhuma equação algébrica com coeficientes racionais, logo não é possível construir, utilizando o método citado acima, um quadrado de lado $\sqrt{\pi}$. Isso não significa que esse quadrado não exista, pois ao retirarmos essa condição a quadratura possui várias soluções, das quais apresentaremos uma delas.

2. História

O problema da quadratura do círculo, pelo método de passos finitos e uso de régua não graduada e compasso está diretamente ligado a algumas características da constante π que são sua irracionalidade e transcendência. Este problema junto de outros dois: a duplicação do cubo e a trissecção de um ângulo se tornou muito famoso e motivou durante séculos vários matemáticos na busca por uma solução (OLIVEIRA, F. L. S., 2015; OLIVEIRA, J. M. de, 2010).

O π é um número irracional, ou seja, não pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$ com a, b inteiros, com $b \neq 0$. Arquimedes em seus estudos conseguiu uma aproximação para o π considerando o perímetro de um polígono de n lados inscrito em um círculo, com n suficientemente grande obtendo que $3,14084 < \pi < 3,142858$.

Entretanto a irracionalidade de π só foi provada em 1761, por J. H. Lambert, que utilizou um método com frações contínuas. Cabe aqui destacar ainda que a simbologia de π só foi adotada por Leonhard Euler, em 1737, tornando-se sua representação padrão.

Falaremos agora da transcendência de π . Um número transcendente é aquele que não é algébrico, ou seja, nunca será solução de uma equação de coeficientes de números racionais. De acordo com (SANTOS, 2013), Joseph Liouville foi o primeiro a provar a existência

de números transcendententes e que estes são em quantidade infinita. Cantor, por sua vez, demonstrou que existem mais números transcendententes do que algébricos. Porém, foi a partir da demonstração de que o número e era transcendente, realizada por Hermite, em 1873, que foi possível a demonstração da transcendência de π , por extensão, quando em 1882, Ferdinand Von Lindemann demonstrou que o número π é um número transcendente. Consequentemente $\sqrt{\pi}$ também é transcendente. Com isso, não há a possibilidade da quadratura do círculo ser realizada pelo método euclidiano proposto na antiguidade.

O que faremos a seguir é uma demonstração da quadratura do círculo, sem seguir os critérios do uso de régua não graduada e compasso e número finito de passos, com o objetivo de transformar a esfera em um prisma de base quadrada.

3. A quadratura do círculo

Seja Γ uma circunferência dada de raio r . Considere um triângulo retângulo ABC de ângulo reto em C , com altura r e base $\overline{AB} = 2\pi r$, que obtemos ao rolar a circunferência Γ sobre uma reta suporte.

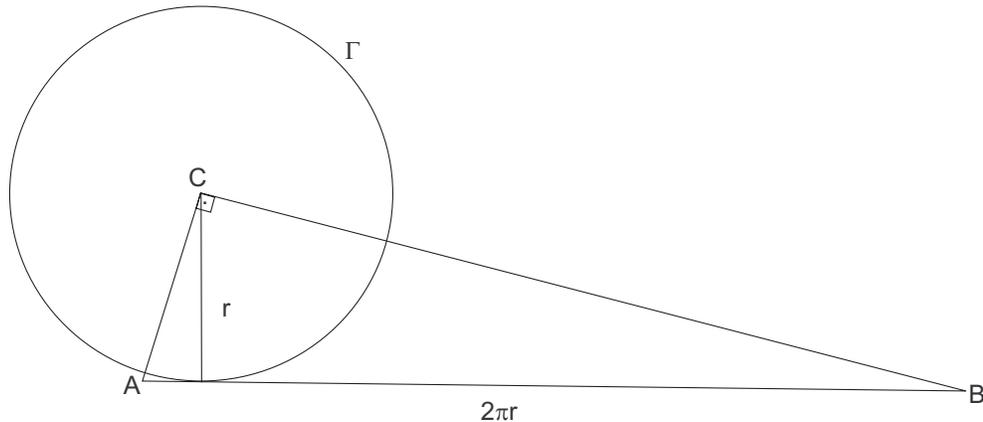


Figura 2: Círculo Γ e triângulo ABC .

A área A_t do triângulo ABC é a mesma área A_Γ do círculo limitado pela circunferência Γ , ou seja: $A_t = \pi r^2$.

Podemos encontrar um paralelogramo $ABDE$ (figura 3) de base AB e altura $\frac{r}{2}$ cuja área é igual a área do triângulo ABC , da figura 2.

Esse paralelogramo por sua vez, pode ser transformado em um retângulo $ABFG$ de base AB e altura $\frac{r}{2}$ e mesma área, conforme ilustrado na figura 4.

Considere a soma dos segmentos de medida $\overline{AB} + \overline{BF}$ como o diâmetro de uma semicircunferência Ω . Tome um segmento perpendicular a $\overline{AB} + \overline{BF}$, passando pelo ponto B , que

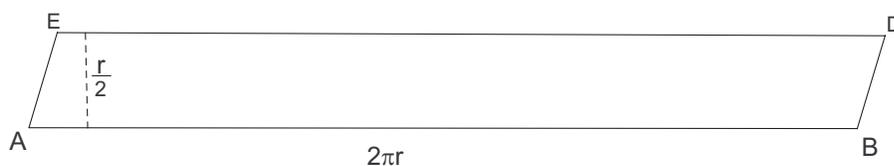


Figura 3: Paralelogramo ABDE.

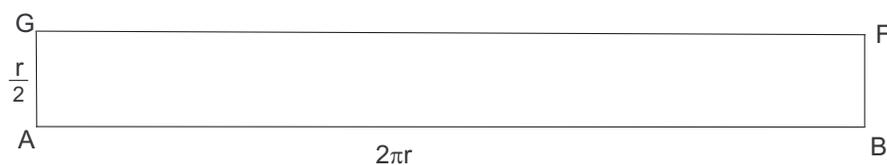
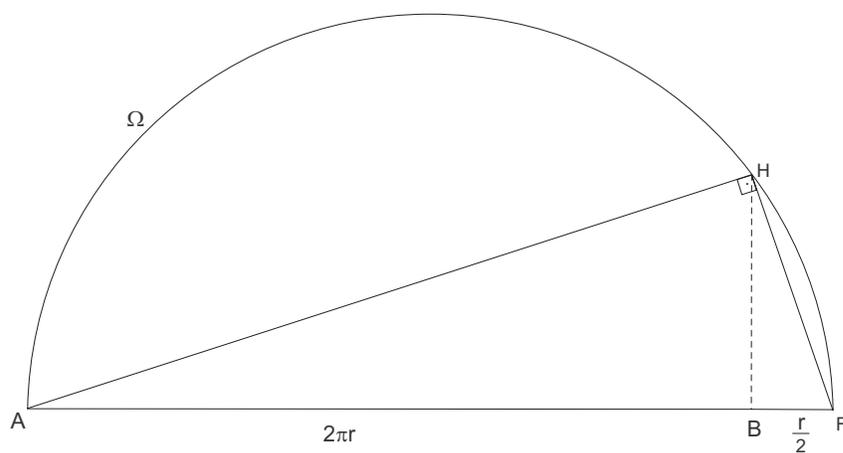


Figura 4: Retângulo ABFG.

intercepte a semicircunferência Ω em um ponto H. Construimos um triângulo retângulo AFH de base AF, ângulo reto em H e altura \overline{BH} .

Figura 5: Semicircunferência Ω e triângulo retângulo AFH.

Pelas relações métricas no triângulo retângulo, temos que o quadrado da altura de um triângulo retângulo, com relação à hipotenusa, é igual ao produto das projeções dos catetos sobre a hipotenusa, ou seja:

$$\overline{BH}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{BF}$$

E como a área do círculo Γ é igual à área do retângulo ABFG que é dada por $\overline{AB} \cdot \overline{BF}$, temos que:

$$A_{\Gamma} = \overline{BH}^2,$$

completando assim a quadratura do círculo.

Portanto, podemos construir o quadrado BHIJ (figura 6), de lado com medida \overline{BH} que tem mesma área do círculo limitado pela circunferência Γ .

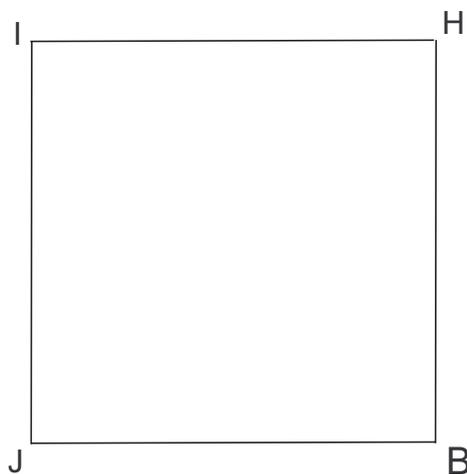


Figura 6: Quadrado BHIJ.

4. O volume da esfera

A partir da demonstração da quadratura do círculo iniciamos a transformação da esfera em um prisma de base quadrada.

Considere uma esfera S de raio r e volume V_e .

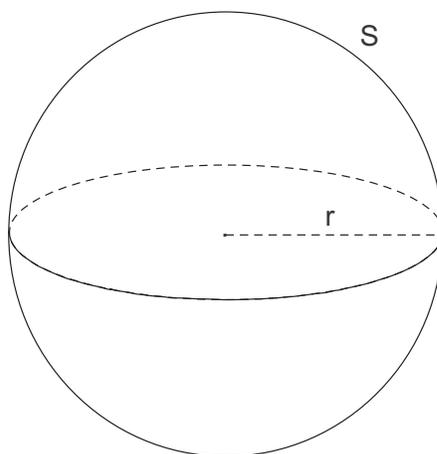


Figura 7: Esfera de raio r e volume V_e .

O círculo máximo de S tem área πr^2 . Considere esse círculo máximo de S como base de um cone de altura igual a $4r$ e mesmo volume de S .

O volume do cone é dado por: $V_c = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot 4r = \frac{4}{3} \pi r^3 = V_e$.

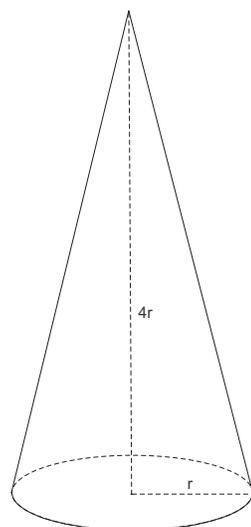


Figura 8: Cone com área da base igual a πr^2 e altura $4r$.

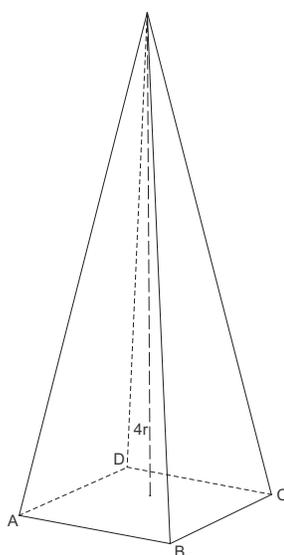
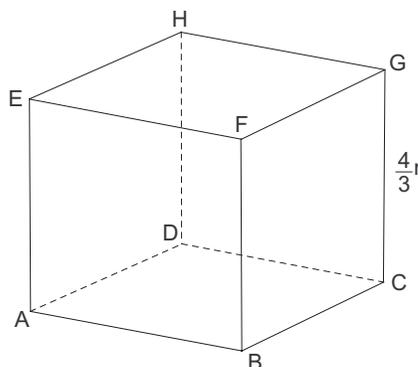


Figura 9: Pirâmide com área da base igual a πr^2 e altura $4r$.

Na base do cone, que representa o círculo máximo da esfera S , podemos realizar uma quadratura, mantendo sua área. Na sequência, construímos uma pirâmide com o quadrado obtido a partir dessa quadratura, com a mesma altura do cone.

Assim, podemos comparar o volume do cone com o volume da pirâmide de base quadrada $ABCD$ e altura $4r$, pois ambos volumes são dados por $\frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot 4r$.

E como o volume da pirâmide é dado por $\frac{1}{3}$ do volume do prisma de mesma base, podemos construir um prisma ABCDEFGH com base ABCD igual à da pirâmide e altura correspondente a $\frac{1}{3}$ de $4r$.



Portanto, encontramos um prisma de base quadrada cujo volume é o mesmo da esfera S, ou seja, $\frac{4}{3}\pi r^3$.

Como já observado, sem a exigência do uso de régua e compasso é possível encontrar formas variadas de resolver o problema. Assim com o propósito de pensar mais sobre o assunto propomos ao leitor encontrar uma quadratura do círculo diferente da que aqui foi apresentada ou a transformação da esfera em um cubo de mesmo volume e obter sua representação geométrica.

Referências

- 1 ÁVILA, Geraldo. **Arquimedes, a esfera e o cilindro**. RPM 10. Campinas, SP, 2010. p. 01–08. Disponível em: <https://www.ime.usp.br/~pleite/pub/artigos/avila/rpm10.pdf>. Acesso em: 5 mai. 2022.
- 2 OLIVEIRA, Francisco Lucas Santos. **Histórico, cálculo e irracionalidade de pi-grego / Francisco Lucas Santos Oliveira**. Brasil, 2015. Disponível em: https://repositorio.ufc.br/bitstream/riufc/13171/1/2015_dis_floliveira.pdf. Acesso em: 5 mai. 2022.
- 3 OLIVEIRA, João Milton de. **A irracionalidade e a transcendência do número π** . RPM 10. Rio Claro, SP, 2010. p. 01–08. Disponível em: <http://www1.rc.unesp.br/igce/pos/profmat/arquivo/dissertacoes/A%20Irracionalidade%20e%20Transcend%C3%Aancia%20do%20N%C3%BAmero%20Pi.pdf>. Acesso em: 14 mai. 2022.
- 4 SANTOS, Gilvaneide Lucena dos. **Número π : sua irracionalidade e transcendência**. RPM 10. Brasil, 2013. p. 01–08. Disponível em: <https://repositorio.ucb.br:9443/jspui/bitstream/10869/1877/1/Gilvaneide%20Lucena%20dos%20Santos.pdf>. Acesso em: 14 mai. 2022.



Teoria de Singularidades para leigos

Rodrigo Martins – Email: rmartins@uem.br

Resumo: A Teoria de Singularidades já é um ramo muito bem estabelecido da matemática que tem intercessão com praticamente todas as áreas da matemática, quer seja análise, álgebra, matemática aplica e a sua área mãe a Geometria e Topologia. Assim apresentamos uma breve ideia de como pode-se começar na singularidade por meio dos modelos singulares de funções.

Palavras-chave: Teoria de Singularidades, Teoria de Catástrofe, Classificação.

1. Introdução

A Teoria de singularidades, também nominada como Teoria de Catástrofes¹, tem seu início com o trabalho de Hassler Whitney ([WHITNEY, 1955](#)) que tratava sobre a classificação das singularidades de aplicações diferenciáveis do plano no plano.

Paralelamente o matemático francês René Thom, também produz artigos sobre as singularidades das aplicações diferenciáveis ([THOM, 1956](#)) e mais tarde publica uma série de artigos como ([THOM, 1969](#)) que envolve Teoria de Bifurcação² e Teoria de Singularidades em aplicações a outras áreas, que ele e outros matemáticos como Zeemam, chamaram de Teoria de Catástrofe.

Em linhas gerais, e por isso todas estas teorias são tratadas aqui como sendo a mesma coisa, elas tratam de sistemas que se alternam entre estados (vamos chamar de estáveis) com um certo ponto singular (ou uma região) entre eles (instável)³. O exemplo mais simples e que exploraremos neste artigo, imagine um gráfico de uma aplicação diferenciável de \mathbb{R} em \mathbb{R} , nele teremos entre regiões de crescimento e decrescimento (regiões localmente estáveis) um ponto singular (ponto de instabilidade).

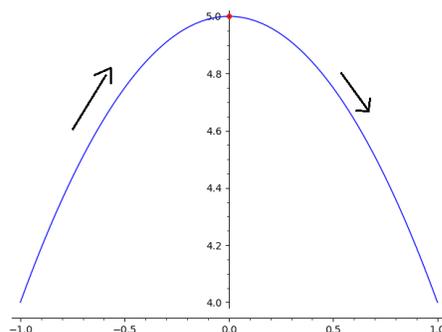
No livro de T. Poston e I. Stewart, ([POSTON; STEWART, 1978](#)), temos uma série de exemplos de aplicações as mais diversas áreas, por exemplo se um cão bravo ataca e com

¹Durante as décadas de 70 e 80 houve uma discussão se eram as mesmas teorias e ao menos no Brasil o problema é resolvido chamando Teoria das Singularidades e Teoria das Catástrofes conforme a tabela do CNPq, 1.01.03.05-8, aqui usamos como sinônimos. Leia o artigo ([GUCKENHEIMER, 1978](#)).

²Esta teoria tenta entender situações de mudanças repentinas em certos sistemas quando submetido a pequenas variações.

³Essencialmente este era o trabalho iniciado por Whitney que buscava entender as singularidades das aplicações diferenciáveis.

Figura 1: Crescimento e decrescimento.

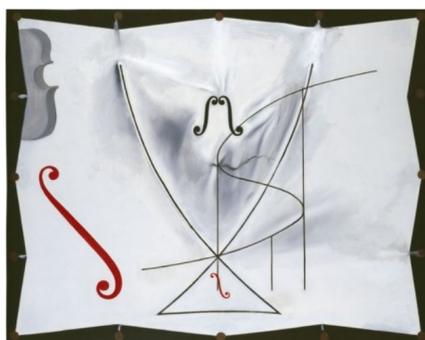


Ponto singular entre duas regiões regulares

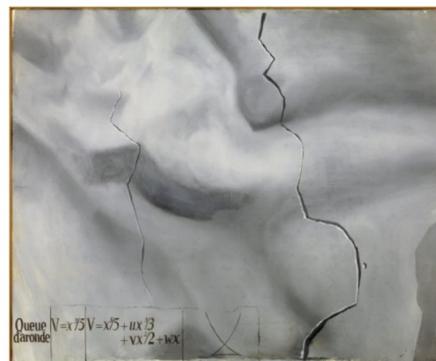
medo foge, qual será a reação do cão se tiver exatamente a mesma quantidade de raiva e medo ?. E na década de 70 e 80 uma série de aplicações foram feitas deste modelo que acabou por tornar a Teoria de Catástrofe famosa (neste caso o nome Teoria de Catástrofe tem muito mais apelo midiático que outros nomes).

Artigo como (ZEEMAN, 1976) sobre modelos de efeito de álcool na dirigibilidade exploraram a popularidade da teoria neste período. Vários jornais e revistas (deste New York Times até jornais locais) fizeram publicações na época sobre a super nova teoria que poderia modelar “todos” os fenômenos catastróficos e situações limites do cotidiano. Um que ainda se encontra disponível foi feito pela revista New York Review of Books publicou em 1978 um artigo chamado “The Charms of Catastrophe”⁴ (O Encanto da Catástrofe). O alcance da popularidade foi tão grande que o pintor espanhol Salvador Dalí chegou a fazer uma série de pinturas reunidas na Série de las Catastrophes além do quadro “El rapte topològic d’Europa”, em homenagem a Rene Thom.

Figura 2: Salvador Dalí.



© Salvador Dalí, Fundació Gala-Salvador Dalí, Figueres, 2017



© Salvador Dalí, Fundació Gala-Salvador Dalí, Figueres, 2017

<https://www.salvador-dali.org/>

⁴Artigo escrito por Martin Gardner disponível no site da revista <https://www.nybooks.com/articles/1978/06/15/the-charms-of-catastrophe/>

Esta nova teoria foi trazida para o Brasil pelo Professor Gilberto Francisco Loibel, que entre 1960 e 1962 fez pós-doutorado na Universidade da Califórnia, em Berkeley (EUA) e conheceu entre os seminários que assistiu por lá a nova teoria e de volta ao Brasil orientou, no mestrado, sua primeira aluna neste conteúdo a Professora Maria Aparecida Soares Ruas, cuja dissertação “Germes finitamente determinados” foi publicada em 1974. Esta por sua vez se tornou a maior disseminadora desta teoria no Brasil tendo como descendentes diretos cerca de 45 doutores⁵, por isso são com certeza os responsáveis pela quantidade significativa de pesquisadores nesta área no Brasil.

A Teoria de Singularidades, portanto, pode se dedicar a variados questionamentos dentro da matemática, por exemplo quais são os modelos que existem com singularidades? (Classificação), dado um modelo singular é o que acontece se o perturbarmos, elimina a singularidade ou mudar a singularidade? (Resolução de Singularidade ou Teoria de Bifurcação), estes modelos singulares possuem estruturas algébricas, aproximações, como eles se comportam ou quão importante eles são no mundo de todos os modelos?

Assim é possível muitos caminhos distintos para se estudar singularidades e muitas faces com as mais diversas áreas da matemática, apesar de (em teoria) ela pertença a grande área de Geometria e Topologia, pode-se estudar desde equações diferenciais a álgebra pura.

Para delimitar nosso trabalho veremos as aplicações de \mathbb{R} em \mathbb{R} .

2. O caso real

Talvez possamos imaginar que aplicações de reais de valores reais sejam um modelo insignificante, mas não é. Podemos imaginar muitos e muitos caso onde este é o modelo ideal, por exemplo, ao tomar um remédio temos o modelo ao longo do tempo dos efeitos do remédio que podemos imaginar como sendo parabólico, isto é, a medida que o corpo absorve o remédio sua eficácia vai aumentando mas ao se dissolver completamente começa a ser expelido pelo corpo e portanto começa a diminuir seus efeitos (pesquise sobre biodisponibilidade de fármacos).

Assim vamos estudar uma aplicação de $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável (para estudar suas singularidades) em alguns dos aspectos acima.

Para facilitar e como estamos interessados em estudar apenas na vizinhança de certos pontos vamos colocar no mesmo pacote todas as funções que são iguais numa vizinhança chamado de germe.

Definição 2.1 Dizemos que duas funções $f : U \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : V \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas em intervalos abertos contendo a , tem o mesmo germe em a se existe um aberto $\Omega \subset U \cap V$, tal que $f|_{\Omega} = g|_{\Omega}$.

⁵Informação disponível em <https://genealogy.math.ndsu.nodak.edu/index.php>

A relação “ter o mesmo germe em a ” é uma relação de equivalência e a classe que equivalência é chamada simplesmente de germe, cuja notação é $f : (\mathbb{R}, a) \rightarrow \mathbb{R}$. E neste caso ao estudar o que ocorre com f numa vizinhança de a o mesmo ocorre com g pois elas são idênticas em uma vizinhança.

Como estamos preocupados apenas com o comportamento da função em uma vizinhança de um ponto, podemos facilmente nos convencer que certas mudanças das funções não afeta o que buscamos.

Por exemplo, se efetuarmos uma translação no gráfico da função f , e chamarmos a translada de g , teremos que ambas têm o mesmo comportamento nos pontos equivalentes, apesar de não serem a mesma função.

Mais especificamente como estamos estudando as singularidades de uma aplicação diferenciável teremos que algumas mudanças (difeomorfismos) na função nos dará uma função equivalente.

Definição 2.2 *Sejam U e V abertos da reta real e sejam t_1 e t_2 pontos de U e V respectivamente. Dizemos que $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : V \rightarrow \mathbb{R}$ são equivalentes à direita (escrevemos \mathbf{R} -equivalentes) se existirem intervalos abertos $\bar{U} \subset U$ e $\bar{V} \subset V$, um difeomorfismo $h : \bar{U} \rightarrow \bar{V}$ e uma certa constante $c \in \mathbb{R}$ tal que $h(t_1) = t_2$ e $f(t) = g(h(t)) + c, \forall t \in \bar{U}$.*

Assim f , próximo de t_1 , é obtido de g , próximo a t_2 , por uma mudança de parâmetro e adicionando uma constante $c = f(t_1) - g(t_2)$. Mais precisamente temos o Lema de Hadamard que pode ser encontrado no livro (BRUCE; GIBLIN, 1992).

Teorema 2.3 (Lema de Hadamard) *Seja $f : (\mathbb{R}, t_0) \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável e suponha que $f^{(p)}(t_0) = 0$ para todo p com $1 \leq p \leq k$. Então existe uma função $g : (\mathbb{R}, t_0) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(t) = f(t_0) + (t - t_0)^{k+1}g(t)$ para todo t em alguma vizinhança de t_0 . Também se $f^{(k+1)}(t_0) \neq 0$ então $g(t_0) \neq 0$.*

Corolário 2.4 *Sejam $f : (\mathbb{R}, t_0) \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável e $k \geq 0$. Suponha que $f^{(p)}(t_0) = 0$ para todo $1 \leq p \leq k$, mas $f^{(k+1)}(t_0) \neq 0$. Então f é \mathbf{R} -equivalente a $g : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(t) = \pm t^{k+1}$, onde temos $+$ ou $-$ de acordo com o sinal de $f^{(k+1)}(t_0)$.*

Demonstração:

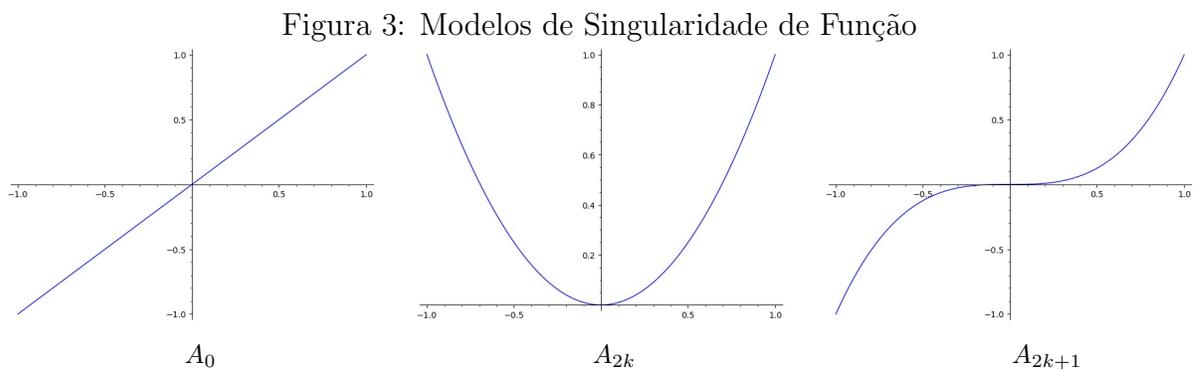
Defina $h(t) = (t - t_0)(\pm g(t))^{\frac{1}{k+1}}$ onde o sinal \pm depende de $f_1(t_0)$. Então $h(t_0) = 0$ e $h'(t_0) > 0$ logo, pelo teorema da aplicação inversa, h é um difeomorfismo sobre alguma vizinhança de t_0 . (g é a função na qual f do teorema é dada pelo lema de Hadamard).

Finalmente $g(h(t)) = (t - t_0)^{k+1}g(t) = f(t) - f(t_0)$, onde g tem a forma pedida no teorema. Isto é facilmente checado, pois o sinal de $f_1(t_0)$ e $f^{(k+1)}(t_0)$ coincidem (realmente $f^{(k+1)}(t_0) = (k + 1)!f_1(t_0)$, usando apenas regras usuais do cálculo).

Portanto f e g são realmente R -equivalentes como queríamos. ■

Definição 2.5 *Suponha que $f : (\mathbb{R}, t_0) \rightarrow \mathbb{R}$ é R -equivalente a $\pm t^{k+1}$, para $k \geq 0$, dizemos que f tem tipo A_k em t_0 , ou uma singularidade tipo A_k em t_0 . Deste modo tipo A_0 significa justamente que $f'(t_0) \neq 0$. Também dizemos que f tem tipo $A_{\geq k}$ quando $f^{(p)}(t_0) = 0$ para $1 \leq p \leq k$ e neste caso f tem tipo A_l para algum $l \geq k$ ou todas as derivadas de f se anulam em t_0 .*

Assim podemos observar que temos três formatos principais de singularidades em funções:



Mas isto não exaure as possibilidades de estudos mesmo no caso de funções.

3. Conclusão

Como vimos os modelos de singularidades de \mathbb{R} em \mathbb{R} são a reta, a cubica e a parábola, porém as singularidades de tipo A_k , apesar do mesmo formato podem dar novas informações, por exemplo $f(x) = x^8$ tem formato de parábola mas é uma parábola mais “achatada” no eixo x , dizemos que ela tem um “contato” de ordem superior com a reta, abrindo um novo ramo da Teoria de Singularidade chamada Teoria de Contato.

Ainda, o conjunto dos germes ou dos difeomorfismos possuem várias estruturas algébricas, como por exemplo de grupos ou anéis, abrindo uma gama enorme de possibilidades de estudos em álgebra (geometria algébrica, álgebra comutativa, etc).

Finalmente os modelos matemáticos que envolvem singularidades são bem mais ajustados ao mundo real onde os eventos costumam conter singularidades o tempo todo, assim vale a pena conhecer mais desta teoria.

Referências

- 1 BRUCE, J. W.; GIBLIN, P. J. **Curves and Singularities**. 1. ed. Boston, EUA: Cambridge University press, 1992.

- 2 GUCKENHEIMER, J. The Catastrophe Controversy. **The Mathematical Intelligencer**, EUA, v. 1, n. 1, p. 15–20, 1978.
- 3 POSTON, T.; STEWART, I. **Catastrophe Theory and its Applications**. 1. ed. Boston, EUA: Pitman, 1978. p. 491.
- 4 THOM, R. Les singularités des applications différentiables. **Ann. Inst. Fourier**, Grenoble, France, v. 1, n. 6, p. 43–87, 1956.
- 5 _____. Topological models in biology. **Topology**, Grenoble, France, v. 8, n. 3, p. 313–335, 1969.
- 6 WHITNEY, Hassler. On singularities of mappings of euclidean spaces. I. Mappings of the plane into the plane. **Ann. of Math.**, EUA, v. 65, n. 2, p. 374–410, 1955.
- 7 ZEEMAN, E.C. A mathematical model for conflicting judgements caused by stress, applied to possible misestimations of speed caused by alcohol. **J. Math. Statist. Psych.**, EUA, v. 28, n. 1, p. 19–31, 1976.

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL: um kit de sobrevivência

$$\int_{\Omega} K d\Omega + \int_{\partial\Omega} k_p(s) ds + \sum_{p=1}^k \phi_p = 2\pi \chi(\Omega).$$

Demonstração: Seja τ uma triangulação de Ω tal que qualquer triângulo T tido em uma vizinhança coerente de uma parametrização ortogonal com orientação de S (essa triangulação existe pelos comentários feitos acima). Pelo Teorema 2.1 para cada triângulo, obtém-se:

$$\int_T K dT_i + \int_{\partial T} k_p(s) ds + \sum_{p=1}^k \phi_p = 2\pi.$$

Como pontos e arestas possuem medida nula, podemos somar a equação acima os triângulos e obter:

$$\sum_{i=1}^k \int_T K dT_i = \int_{\Omega} K d\Omega.$$

Como triângulos adjacentes induzem orientação contrária na aresta em comum, interseção dos triângulos se anula no integral. Logo,

$$\sum_{i=1}^k \int_{\partial T_i} k_p(s) ds = \int_{\partial\Omega} k_p(s) ds.$$

Portanto,

$$\int_{\Omega} K d\Omega + \int_{\partial\Omega} k_p(s) ds + \sum_{p=1}^k \sum_{i=1}^k \phi_p = 2\pi F.$$

$$\sum A_k = 1,219 < A(\mathbb{H}_t^2).$$

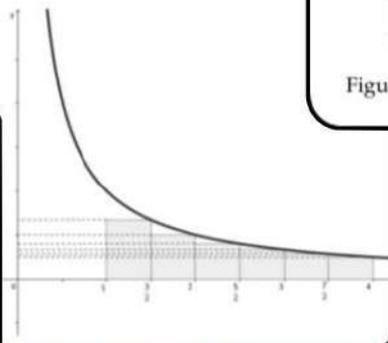


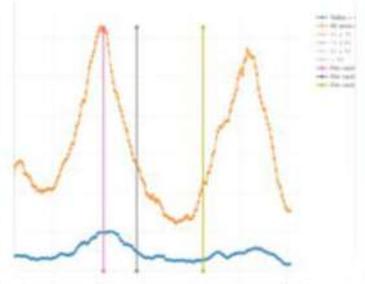
Figura 1: Gráfico da função $g(t) = t^2 + \ln(t)$

O volume da esfera



Figura 8: Cone com área da base igual a πr^2 e altura $4r$.

Fig 1 - Médias móveis de 7 dias dos casos positivos de COVID-19



Esta revista é responsável pela formulação de textos autorais desenvolvido pelo projeto de extensão "Kit". Neste projeto, contamos com alunos graduandos e demais interessados em matemática aplicada.

Entre seus textos, podemos encontrar, curiosidades, resoluções, demonstrações, fatos relevantes, ideais para IC, entre outros!