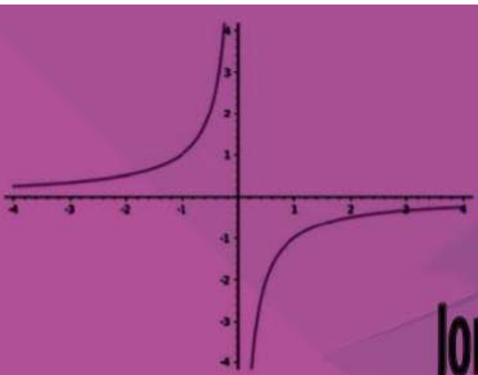
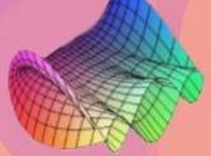


JEEPEMA

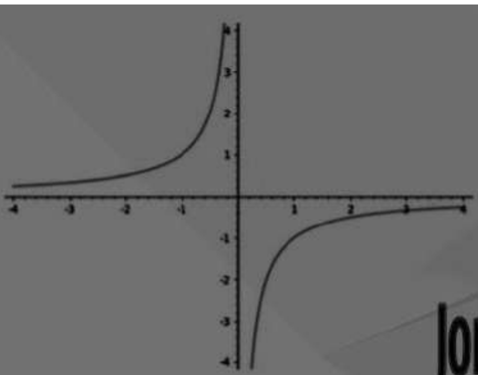
Jornal eletrônico de Ensino e Pesquisa de matemática

Cálculo Diferencial e Integral:

Exercícios • Apostilas • Resoluções • Vídeos Aulas •



um kit de sobrevivência!

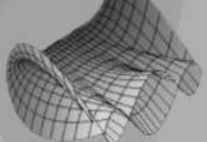


JEEPEMA

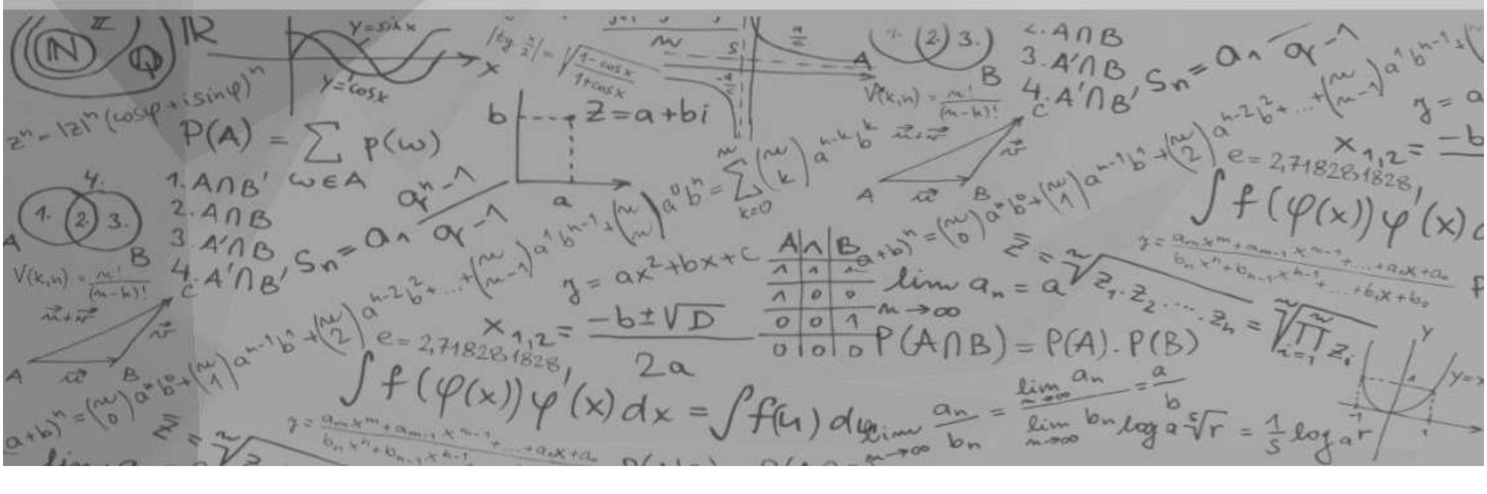
Jornal eletrônico de Ensino e Pesquisa de matemática

Cálculo Diferencial e INTEGRAL:

Exercícios • Apostilas • Resoluções • Vídeos Aulas •



um kit de sobrevivência!



Jornal Eletrônico de Ensino de Matemática - JEEPEMA
Universidade Estadual de Maringá, Maringá-PR - Brasil
ISSN: 2594-6323
DOI: 10.4025/jeepema

Vol. 3 N° 2 / 46 páginas - Dezembro/2019

Palavras-chave: Princípio das Contrações, Cadeia de Markov, Teoria dos Cálculos Aproximados, Constante 6174, Notebook em Python, Regrq de Três Simples e Composta, Propriedades, Aplicações Elementares.

Índice

Volume 3 - N° 2

Jornal Eletrônico de Ensino e Pesquisa de Matemática
(1s.) v. 3 2 (2019): 1–6. ©Jeepema–ISSN-2594-6323.
www.dma.uem.br/kit/jeepema

Teorema do Ponto Fixo aplicado à cadeia de Markov

Doherty Andrade

Resumo: Métodos iterativos aparecem cedo para todo estudante de ciências exatas. Eles estão, por exemplo, no método de Gauss-Seidel e Gauss-Jacobi, no método de Newton e no método de Picard para mostrar existência e unicidade de soluções para problemas de valor inicial. Estes métodos iterativos comumente estudados separados, são na verdade, faces diferentes do Princípio das Contrações. Neste trabalho vamos apresentar o Princípio das Contrações e dar uma aplicação à cadeia de Markov.

Sumário

1. Introdução

O Princípio das Contrações na sua forma abstrata foi primeiro creditado a Stefan Banach [1] que mostrou, sob hipóteses bem gerais, que sucessivas aplicações de uma função contração gera uma sequência de pontos que converge para um único ponto fixo dessa função.

Vejamos o seu enunciado.

Teorema 1.1 (Princípio da Contração) *Seja (M, d) um espaço métrico completo e $F : M \to M$ uma contração, isto é, F satisfaz*

$$d(F(x), F(y)) \leq Kd(x, y), \forall x, y \in M,$$

e algum $0 \leq K < 1$. Então, tem-se:

1. *existe um único ponto fixo $x^* \in M$ tal que $F(x^*) = x^*$;*

2. *para todo ponto inicial $x_0 \in M$, a sequência iterativa $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ definida por*

$$x_{n+1} = F(x_n), n \geq 0$$

converge para o único ponto fixo $x^* \in M$. Além disso,

$$d(x_n, x^*) \leq \frac{K^n}{1-K} d(x_1, x_0).$$

Demonstração: Se a sequência (x_n) definida acima converge para $a \in M$, então como F é contínua temos

$$f(a) = f(\lim x_n) = \lim f(x_n) = \lim x_{n+1} = a.$$

Provando que a é ponto fixo de F.

Se F tem dois pontos fixos a e b, então temos

$$d(a,b) = d(F(a), F(b)) \leq kd(a,b),$$

o que é absurdo a menos que $a = b$. Logo, $a = b$.

Resta provar que a sequência (x_n) converge. Notemos que $d(x_1, x_2) \leq Kd(x_0, x_1)$ e que, em geral, $d(x_{n+1}, x_n) \leq K^n d(x_1, x_0), \forall n \in \mathbb{N}$. Segue que para $n, p \in \mathbb{N}$ temos

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+p}) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + \cdots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \\ &\leq [K^n + k^{n+1} + \cdots + K^{n+p-1}]d(x_0, x_1) \\ &\leq \frac{K^n}{1-K} d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Como $\lim K^n = 0$ segue que a sequência é de Cauchy e portanto convergente, o que completa a prova do teorema. □

O seguinte teorema é um resultado simples sobre existência de ponto fixo de funções contínuas $f : [a,b] \to [a,b]$. Para funções definidas em compactos do $\mathbb{R}^n$ veja http://www.dma.uem.br/kit/jeepema/vol2017/art1.pdf.

Teorema 1.2 *Toda aplicação contínua $f : [a,b] \to [a,b]$ tem pelo menos um ponto fixo.*

Demonstração: Defina a seguinte aplicação $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = f(x) - x$. Assim g mede a distância orientada entre x e sua imagem $f(x)$. Um ponto fixo de f é um ponto x onde $g(x) = 0$. Se um dos extremos do intervalo é ponto fixo nada temos a provar. Então suponha que nenhum deles seja ponto fixo. Como $f(a)$ e $f(b)$ estão no intervalo $[a,b]$ segue que $a < f(a)$ e $f(b) < b$ e portanto $g(a) > 0$ e $g(b) < 0$. Como g é contínua, pelo teorema do valor intermediário existe $x \in [a,b]$ tal que $g(x) = 0$. □

Um exemplo simples e comumente utilizado por professores de métodos númericos é determinar a solução da equação $x = \cos(x)$. Esta função é uma contração no intervalo $[0.5, 0.9]$ (por exemplo).

Tomando como ponto inicial $x_0 = 0.7$ e calculando a sequência dada por $x_{n+1} = \cos(x_n), n \geq 0$, obtemos:

```
0.739082197209505,
0.7648421872844885,
0.7214916395975273,
0.7508213288394496,
0.7311287725733576,
...............
0.739082197209505
```

após 20 iterações.

Note que os valores da sequência se aproximam de 0.739082197209505.

Podemos repetir este processo em qualquer calculadora científica. Para casos mais gerais podemos programar usando alguma linguagem. Os valores da sequência acima foram obtidos executando o notebook em Python chamado de *fixedp*. Para outros exemplos, redefina a função f.

```python
# Metodo do ponto fixo

# SINTAXE: fixedp(f,x0,tol=10e-5,maxiter=N)
#ONDE x0 é o chute inicial,tol é a toelerancia e maxiter é o numero maximo de iterações.

from pylab import plot,show
from numpy import array,linspace,cos
from numpy.linalg import norm

def fixedp(f,x0,tol=10e-5,maxiter=100):
 """ algoritmo do ponto fixo """
 e = 10
 k = 0
 xp = []
 # começcando a iteração
 while(e > tol and k < maxiter):
  x = f(x0)      # equacao do ponto fixo
  e = norm(x0-x) # erro na iteracao atual
  x0 = x
  xp.append(x0)  # salva a solução na iteração atual
  k = k + 1
 return x,xp
```

Figura 1: Algoritmo em Python

```python
import math as m
f = lambda x : m.cos(x)

xp = fixedp(f,0.7, tol = 10e-6, maxiter=100)
xp
```

Figura 2: Chamando o algoritmo

Vejamos uma aplicação do teorema 1.1 à cadeia de Markov.

2. Cadeias de Markov

Um processo é dito ser Markoviano, devido a Andrei Andrevevich Markov, quando cada estado depende apenas do estado imediatamente anterior. Ou seja, são processos sem memória pois, os estados anteriores não exercem influência sobre o estado atual. Um processo Markoviano é dito uma cadeia de Markov se os estados são discretos.

Uma cadeia finita de Markov com n estados é determinada especificando uma matriz $m \times m$ denominada de transição $P = (p_{ij})$, onde p_{ij} é a probabilidade do estado i mudar para o estado j durante qualquer período de transição e, onde $\sum_{i=1}^{m} p_{ij} = 1$ para cada $j = 1, 2, \ldots, m$.

Exemplo 2.1

Como exemplo, consideremos o caso de migração de uma espécie de pássaro. Observou-se que do local A, 50% deles permancem em A, 40% deles migram para o local B e que 10% migram para o local C. Observou-se que do local B, 40% deles migram para o local A, que 30% migram para o local C e 30% permancem em B. Dos pássaros presentes em C observou-se que 20% emigram para A, 60% emigram para B e apenas 20% permanecem em C.

Denotando, x' o número de pássaros que emigraram para A, y' o número de pássaros que emigraram para B e z' o número de pássaros que emigraram para C, podemos descrever o movimento migratório do seguinte modo:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.2 \\ 0.4 & 0.3 & 0.6 \\ 0.1 & 0.3 & 0.2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Ou resumidamente,

$$v' = Mv,$$

onde

$$M = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.2 \\ 0.4 & 0.3 & 0.6 \\ 0.1 & 0.3 & 0.2 \end{bmatrix} \text{ e } v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Supondo que a população dos pássaros seja mantida constante ao longo dos anos, então podemos inferir resultados sobre a emigração para os anos seguintes.

Supondo que foi observado que A tem atualmente 60% dos pássaros, B tem 10% e que C tem 30% dos pássaros. Isto é, a distribuição inicial é dada por $v_0 = \begin{bmatrix} 0.60 \\ 0.10 \\ 0.30 \end{bmatrix}$.

Com base nos dados deste ano, para o próximo ano, a distribuição da migração deverá ser:

$$v_1 = Mv_0,$$

e assim, temos

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0.40 \\ 0.45 \\ 0.15 \end{bmatrix}.$$

Aplicando o mesmo raciocínio, no segundo ano a migração será

$$v_2 = M(Mv_0) = M^2 v_0,$$

donde se obtém que

$$v_2 = \begin{bmatrix} 0.410 \\ 0.385 \\ 0.205 \end{bmatrix}.$$

No quarto ano seguinte, a migração será

$$v_4 = M^4 v_0,$$

donde se obtém que

$$v_4 = \begin{bmatrix} 0.401 \\ 0.399 \\ 0.200 \end{bmatrix}.$$

Por indução, conclui-se que decorridos k anos, a migração é dada por

$$v_k = M^k v_0.$$

Dizemos que uma cadeia de Markov é regular, se alguma potência de M tem apenas entradas positivas. Este é o caso do exemplo acima.

Vamos denotar por V o espaço associado ao conjunto de vetores de probabilidade para a cadeia regular de Markov com matriz de transição M. Defina a aplicação $T : V \to V$ dada por $Tv = Mv$.

Note que

$$V = \{v = (x_1, x_2, \ldots, x_m); \sum_{i=1}^{m} x_1 = 1 \text{ e } x_i \geq 0\}.$$

Vamos introduzir em V a seguinte noção de distância: dados vetores $v_1 = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ e $v_2 = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ de V seja

$$d(v_1, v_2) = \max\{|x_i - y_1|; i = 1, 2, \ldots, m\}.$$

Assim, (V, d) é um espaço métrico completo.

Podemos agora enunciar um dos resultados mais importantes sobre cadeias de Markov.

Teorema 2.2 *Para toda cadeia finita e regular de Markov existe um único vetor probabilidade v^* que é um ponto fixo de sua matriz de transição M, e todas as sequências iterativas $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots$ determinadas por $v_{n+1} = Mv_n, n \geq 1$ convergem para v^*.*

A demonstração consiste em demonstrar que

$$d(Mx, My) \leq Kd(x, y), \forall x, y \in V$$

e para alguma constante $0 \leq K < 1$. O resultado segue do Princípio da Contração 1.1.

3. Aplicação

Voltando ao nosso exemplo, queremos determinar v^* que satisfaça $v^* = Mv^*$, chamado de o ponto de estabilidade. O teorema 2.2 garante a existência deste ponto de estabilidade. Para determinar v^* basta resolver o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.2 \\ 0.4 & 0.3 & 0.6 \\ 0.1 & 0.3 & 0.2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

juntamente com a condição $x + y + z = 1$.

Cuja solução é $x = 2z, y = 2z$ e $5z = 1$, de onde resulta que $x = \frac{2}{5}, y = \frac{2}{5}$ e $z = \frac{1}{5}$. O que significa que ao longo dos anos as taxas de migração vão se estabilizar em $\frac{2}{5}$ da população em A e B e, $\frac{1}{5}$ em C.

Referências

1. S. Banach. Sur le oprations dans les ensembles abstraits et leur applications aux equations intégrals. Fund. Math. 3 (1922) 133–181. 1

2. ANDRADE, D. *Geometria Analítica*. 2. ed. Florianópolis: UFSC, 2010.

3. S. D. CONTE, *Elementary Numerical Analysis*. MacGraw-Hill, 1965.

J Jornal Eletrônico de Ensino e Pesquisa de Matemática
(1s.) **v. 3** 2 (2019): 7–24. ©Jeepema–ISSN-2594-6323.
www.dma.uem.br/kit/jeepema

Alguns resultados sobre integração numérica

Pedro Gabriel Papa Torelli[1]

Resumo: A Teoria dos Cálculos Aproximados visa desenvolver técnicas para que seja possível calcular aproximações de um dado problema para o qual os mecanismos comumente utilizados não são aplicáveis. Neste escrito, são formalmente apresentados ao leitor alguns métodos para aproximação do valor da integral de uma função dada em um intervalo fechado: aproximação pelo ponto médio, trapezoidal e aproximação de Simpson. Também são apresentadas estimativas de erro para os métodos mencionados e ao final, aplicações.

Conteúdo

1. Integração Aproximada

Uma das mais importantes criações da humanidade é o Cálculo Diferencial e Integral, que se baseia em dois conceitos centrais: a derivada e a integral. A teoria sobre integração e suas inúmeras aplicações reforçam sua importância nos dias atuais. O Teorema Fundamental do Cálculo é uma ferramenta essencial para o estudo deste tema e sua utilização simplifica o cálculo da integral de Riemann. Para aplicá-lo deve ser possível encontrar uma primitiva para a função que se deseja integrar.

Entretanto, há uma grande gama de funções para as quais não é possível utilizar o Teorema Fundamental do Cálculo, já que não é possível encontrar uma primitiva para estas funções. Em meio a esta problemática, a solução é optar por aproximar a integral desejada. A Teoria dos Cálculos Aproximados, dentre vários resultados, estabelece métodos para aproximação de integrais. Neste artigo nos dedicamos ao estudo de três métodos de aproximação de integrais, a saber, as regras trapezoidal, do ponto médio e de Simpson.

Esta seção é dedicada à definição da integral de Riemann de uma função f sobre um intervalo $[a, b]$. Os métodos de aproximação apresentados nas próximas seções estão

[1] Licenciado em Matemática pela Universidade Estadual de Maringá. Email: pgptorelli@gmail.com

apoiados nesta teoria, já que para que seja possível realizar uma aproximação da integral de uma função, primeiro é preciso garantir que tal integral existe.

Para introduzir a definição de integral de Riemann iremos apresentar algumas definições que servirão de base para os resultados presentes neste capítulo. Dentre estas definições estão as de Partição Uniforme, Soma de Riemann e Integral de Riemann.

Definição 1 (Partição de um intervalo [a,b]): Seja $I = [a, b]$ um intervalo fechado e limitado em $\mathbb{R}$. Uma partição de I é um conjunto finito e ordenado $\mathcal{P} = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ de pontos de $[a, b]$.

Usualmente denotamos a partição $\mathcal{P}$ por

$$\mathcal{P} = \{[x_{i-1}, x_i]\}_{i=1}^{n}$$

Observamos que a partição $\mathcal{P}$ divide o intervalo $I = [a, b]$ em n subintervalos

$$I_1 = [x_0, x_1], I_2 = [x_1, x_2], \ldots, I_n = [x_{n-1}, x_n].$$

Definimos ainda a norma da partição $\mathcal{P}$, denotada por $||\mathcal{P}||$ como sendo o comprimento do "maior subintervalo"I_i, isto é,

$$||\mathcal{P}|| = \max\{(x_1 - x_0), (x_2 - x_1), \cdots, (x_n - x_{n-1})\}. \tag{1}$$

Se em cada um dos n subintervalos $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ for fixado um ponto t_i, então temos uma partição aferida, isto é, um par ordenado $\dot{\mathcal{P}} = \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^{n}$, onde $\mathcal{P} = \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^{n}$ é uma partição de $[a, b]$ e $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ é um ponto fixado.

Definição 2 (Soma de Riemann): Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função real definida num intervalo fechado e limitado $I = [a, b]$. Para cada partição aferida $\dot{\mathcal{P}} = \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^{n}$ do intervalo I definimos a soma de Riemann de f associada a $\dot{\mathcal{P}}$ como sendo o número real

$$S(f; \dot{\mathcal{P}}) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Agora estamos aptos para definir a integral de Riemann de uma função f sobre um intervalo $[a, b]$.

Definição 3: Dizemos que uma função $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é integrável a Riemann em $[a, b]$ se existe um número real L tal que para todo $\varepsilon > 0$, arbitrariamente dado, existe um $\delta > 0$ (que geralmente depende de ε) de modo que

$$|S(f; \dot{\mathcal{P}}) - L| < \varepsilon,$$

sempre que $\dot{\mathcal{P}}$ for tal que $||\dot{\mathcal{P}}|| < \delta$.

O conjunto de todas as funções intgráveis à Riemann num intervalo $[a, b]$ será denotado por $\mathcal{R}([a, b])$. Podemos facilmente verificar que se $f \in \mathcal{R}([a, b])$ então o número L satisfazendo a definição 3 é unicamente determinado e, por isso, recebe o nome de integral de f sobre $[a, b]$. Logo para $f \in \mathcal{R}([a, b])$ escrevemos

$$L = \int_a^b f$$

e com devido abuso de notação escrevemos também

$$L = \lim_{||\dot{\mathcal{P}}|| \to 0} S(f; \dot{\mathcal{P}}).$$

Boa parte do estudo sobre integrabilidade consiste em determinar condições necessárias e/ou suficientes para que uma função $f \in \mathcal{R}([a,b])$. O resultado principal e decisivo nesta direção foi dado por Henri Lebesgue e atualmente é conhecido como Critério de Integrabilidade de Lebesgue, o qual enunciamos no teorema seguinte.

Teorema 1 (Critério de Integrabilidade de Lebesgue): *Seja $f : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Então $f \in \mathcal{R}([a,b])$ se, e somente se, f é quase sempre contínua em $[a,b]$.*

Em particular se $f \in \mathcal{C}([a,b])$ então $f \in \mathcal{R}([a,b])$. Logo, a continuidade de f garante sua integrabilidade. Esta será a classe de funções para as quais apresentaremos métodos de aproximação para as integrais.

2. Aproximações

Nesta seção definimos sequências numéricas convenientes que convergem para o valor da integral de uma função $f \in \mathcal{C}([a,b])$. Em tudo que segue, f representa uma função real definida e contínua em um intervalo real fechado e limitado $[a,b]$. As aproximações que convergem para o valor da integral que estão presentes neste estudo são as aproximações à direita, à esquerda, pelo ponto médio, a trapezoidal e a de Simpson. Esses mecanismos são especialmente úteis quando não podemos aplicar o Teorema Fundamental do Cálculo.

Antes de apresentarmos as aproximações, vamos introduzir uma família de partições especiais do intervalo $[a,b]$, chamada de partições uniformes. Para cada $n \in \mathbb{N}$, denotamos por $\mathcal{P}_n = \{[a_{i-1}, a_i]\}_{i=1}^{n}$, a partição do intervalo $[a,b]$, obtida pelas divisão do intervalo $[a,b]$ em um n subintervalos de mesmo comprimento $h_n = \frac{b-a}{n}$. Isto é,

$$\mathcal{P}_n = \{a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b\},$$

onde

$$a_i = a + ih_n, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

2.1. Aproximações à esquerda e à direita. As aproximações pela esquerda são obtidas pelas somas de Riemann de f, associadas às partições $\dot{\mathcal{P}}_n$, cujas aferições são tomadas sendo os extremos esquerdos de cada subintervalo de $\mathcal{P}_n$. Melhor ainda, definimos a aproximação à esquerda, para o valor da integral de f em $[a,b]$, como sendo a sequência numérica $(E_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ cujo termo geral é dado por

$$E_n(f) = h_n \sum_{k=0}^{n-1} f(a + kh_n). \tag{2}$$

Por outro lado quando consideramos as somas de Riemann de f, associadas às partições $\dot{\mathcal{P}}_n$, cujas aferições são tomadas como os pontos extremos à direita de cada subintervalo, teremos as chamadas aproximações à direita. Isto é, definimos a aproximação à direita, para a integral de f em $[a,b]$, como sendo a sequência numérica $(D_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ cujo termo geral é dado por

$$D_n(f) = h_n \sum_{k=1}^{n} f(a + kh_n). \tag{3}$$

2.2. Aproximação pelo ponto médio. As aproximações pelo ponto médio são dadas pela soma de Riemann de f, associadas às partições $\dot{\mathcal{P}}_n$, cujas aferições são escolhidas como os pontos médios de cada um dos subintervalos de $\mathcal{P}_n$. Precisamente, definimos a aproximação pelo ponto médio para o valor da integral de f em $[a,b]$ como sendo a sequência numérica $(M_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ cujo termo geral é dado por

$$M_n(f) = h_n \sum_{k=1}^{n} f\left(a + \left(\frac{2k-1}{2}\right) h_n\right). \tag{4}$$

2.3. Aproximação trapezoidal. Sabemos que as aproximações à esquerda e à direita, ambas, convergem para o mesmo valor $L = \int_a^b f$. Entretanto não é possível afirmar qual destas duas aproximações é mais eficiente, ou seja, tem menor erro, está mais próxima do número L. Este fato nos motiva a considerar a média aritmética entre estas duas aproximações, que certamente será uma aproximação melhor que a pior dentre as duas. A aproximação obtida pela média aritmética entre $E_n(f)$ e $D_n(f)$ é denominda aproximação trapezoidal. Logo, definimos a aproximação trapezoidal para a integral de f em $[a,b]$, como sendo a sequência numérica $(T_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ cujo termo geral é dado por

$$T_n(f) = \frac{E_n(f) + D_n(f)}{2} = h_n \left[\frac{1}{2} f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} f(a + kh_n) + \frac{1}{2} f(b)\right]. \tag{5}$$

2.4. Aproximação de Simpson. Para motivar a definição da aproximação de Simpson, definimos os erros das aproximações $M_n(f)$ e $T_n(f)$ como sendo:

$$e_M(n) = M_n(f) - \int_a^b f \tag{6}$$

e

$$e_T(n) = T_n(f) - \int_a^b f \tag{7}$$

Agora, vejamos alguns exemplos.

$i)$ Aproximar o número real *sen* 1. Para isto, vejamos que sen 1 = $\int_0^1 cos\ x\ dx$ e pela regra do ponto médio e pela regra trapezoidal, com $n = 5$, no intervalo $[0,1]$, obtemos:

sen 1 (com 9 casas decimais)	Aproximação	Erro
0,841470985	$M_5(f) \approx$ 0,842875074	e_M = -0,001404089
0,841470985	$T_5(f) \approx$ 0,838664210	e_T = 0,002806775

Tabela 4: Aproximação da integral de $f(x) = cos\ x$ em $[0,1]$.

ii) Aproximar o número real *sen* 3. Para isto, vejamos que sen $3 = \int_0^3 cos\ x\ dx$ e pela regra do ponto médio e pela regra trapezoidal, com $n = 10$, no intervalo $[0,3]$, obtemos:

sen 3 (com 9 casas decimais)	Aproximação	Erro
0,141120008	$M_{10}(f) \approx 0{,}141650601$	e_M = -0,000530592
0,141120008	$T_{10}(f) \approx 0{,}140060017$	e_T = 0,001059991

Tabela 5: Aproximação da integral de $f(x) = cos\ x$ em $[0,3]$.

Da experiência acima, observamos as tabelas é possível uma certa relação entre os erros, isto é:

$$2e_M(n) \approx -e_T(n) \Longleftrightarrow 2e_M(n) + e_T(n) \approx 0. \tag{8}$$

Então, usando (6), (7) e (8) podemos concluir que

$$\begin{aligned} 3\int_a^b f &= 2\int_a^b f + \int_a^b f \\ &= 2(M_n(f) - e_M(n)) + (T_n(f) - e_T(n)) \\ &= -[2e_M(n) + e_T(n)] + [2M_n(f) + T_n(f)] \\ &\approx 2M_n(f) + T_n(f). \end{aligned}$$

Logo,

$$\int_a^b f \approx \frac{2M_n(f) + T_n(f)}{3} \tag{9}$$

O raciocínio acima nos sugere que a média ponderada entre $M_n(f)$ e $T_n(f)$, dada em (9) fornece uma boa aproximação para o valor da integral de f. Também com objetivo de ser ter uma expressão envolvendo soma de fatores de f em pontos da partição $\dot{\mathcal{P}}_n$ de $[a,b]$ vamos definir as proximações de Simpson para partições com um número par de pontos, isto é, para $n = 2j$, para algum $j \in \mathbb{N}$.

Para todo n natural par, definimos

$$S_n = S_{2j} = \frac{2M_j(f) + T_j(f)}{3}. \tag{10}$$

A sequência $(S_{2j})_{j\in\mathbb{N}}$ cujo termo geral é dado por (10) é denominada aproximação de Simpson para a integral de f em $[a,b]$.

Veja que $\lim_{j\to\infty} S_{2j} = \int_a^b f$, pois $M_j(f) \to \int_a^b f$ e $T_j(f) \to \int_a^b f$. Além disso usando as definição de $M_j(f)$ e $T_j(f)$ podemos escrever S_{2j} numa forma conveniente. Com efeito, seja n um natural par, então

$$n = 2j \Longleftrightarrow j = \frac{n}{2}.$$

Considere $\mathcal{P}_n$ a partição uniforme de $[a,b]$ em n subintervalos de comprimento $h_n = \frac{b-a}{n}$. Então

$$M_j(f) = h_j \sum_{k=1}^{n/2} f(a_{2k-1}) = \left(\frac{b-a}{j}\right) \sum_{k=1}^{n/2} f(a_{2k-1}) = \left(\frac{b-a}{n}\right) \sum_{k=1}^{n/2} 2f(a_{2k-1}),$$

ou ainda,

$$2M_j(f) = \left(\frac{b-a}{n}\right)\sum_{k=1}^{n/2} 4f(a_{2k-1}). \tag{11}$$

Também temos que

$$T_j(f) = \left(\frac{b-a}{n}\right)\left[f(a) + \sum_{k=1}^{n/2-1} 2f(a_{2k}) + f(b)\right]. \tag{12}$$

Substituindo (11) e (12) em (10) temos

$$\begin{aligned} S_{2j}(f) &= \frac{1}{3}\frac{(b-a)}{n}[f(a) + 4f(a_1) + 2f(a_2) + 4f(a_3) + 2f(a_4) \\ &\quad + \cdots + 2f(a_{n-2}) + 4f(a_{n-1}) + f(b)], \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} S_n(f) &= \frac{1}{3}h_n[f(a) + 4f(a+h_n) + 2f(a+2h_n) + 4f(a+3h_n) + 2f(a+4h_n) \\ &\quad + \cdots + 2f(b-2h_n) + 4f(b-h_n) + f(b)]. \end{aligned}$$

2.5. Interpretação geométrica para as aproximações. Para visualizarmos uma interpretação geométrica para cada uma das aproximações definidas na seção anterior é necessário interpretar a integral em termos de uma área. Logo, é preciso supor que $f \in \mathcal{C}([a,b])$ seja uma função não negativa em $[a,b]$, ou seja, $f(x) \geqslant 0$, para todo $x \in [a,b]$. Nestas condições é fácil ver que

$E_n(f)$ é a soma das áreas dos retângulos de base h_n e altura dada pelo valor da função nos extremos à esquerda de cada subintervalo de $\mathcal{P}_n$;

$D_n(f)$ é a soma das áreas dos retângulos de base h_n e altura dada pelo valor da função nos extremos à direita de cada subintervalo de $\mathcal{P}_n$;

$M_n(f)$ é a soma das áreas dos retângulos de base h_n e altura dada pelo valor da função nos pontos médios de cada subintervalo de $\mathcal{P}_n$;

$T_n(f)$ é a soma das áreas dos trapézios de altura h_n e bases $f(a+kh_n)$ e $f(a+(k+1)h_n)$, valores da função nos extremos à esquerda e à direita de cada subintervalo de $\mathcal{P}_n$;

É também possível uma abordagem geométrica para $(S_n(f))_{n \text{ par}} = (S_{2j}(f))_{j\in\mathbb{N}}$. De fato, dado n natural par, isto é, $n = 2j$ para algum $j \in \mathbb{N}$, aproximamos o gráfico da função f no intervalo $[a_0, a_2]$ por uma função polinomial de grau menor igual a 2 que passa pelos pontos $(a_0, f(a_0)), (a_1, f(a_1))$ e $(a_2, f(a_2))$. Desta forma, temos que:

$S_n(f)$ é a soma das áreas dos $\frac{n}{2}$ trapézios "curvilíneos"de altura $2h_n$.

3. Estimativas de Erro

Nesta seção discutiremos mais a fundo os erros resultantes das aproximações descritas na seção anterior. Tal estudo é intrinsecamente interessante pois como estamos discutindo aproximações, uma pergunta natural é: Qual é o erro da aproximação obtida para o valor real da integral? Estes erros são possíveis de serem estimados e esta seção apresenta tais estimativas. Iniciamos com o caso em que f é monótona.

Teorema 2: *Se $f \in \mathcal{C}([a,b])$ é monótona então*

$$\left|T_n(f) - \int_a^b f\right| \leqslant \left[\frac{(b-a)|f(b)-f(a)|}{2}\right]\frac{1}{n}.$$

Demonstração: Suponhamos que f é não crescente. Então

$$E_n(f) \leqslant \int_a^b f \leqslant D_n(f) \Rightarrow -D_n(f) \leqslant -\int_a^b f \leqslant -E_n(f).$$

Caso somemos $T_n(f)$ na desigualdade anterior, obtemos

$$\begin{aligned}
& T_n(f) - D_n(f) \leqslant T_n(f) - \int_a^b f \leqslant T_n(f) - E_n(f) \\
\Rightarrow \quad & \frac{E_n(f)+D_n(f)}{2} - D_n(f) \leqslant T_n(f) - \int_a^b f \leqslant \frac{E_n(f)+D_n(f)}{2} - E_n(f) \\
\Rightarrow \quad & \frac{E_n(f)-D_n(f)}{2} \leqslant T_n(f) - \int_a^b f \leqslant \frac{D_n(f)-E_n(f)}{2} \\
\Rightarrow \quad & \left|T_n(f) - \int_a^b f\right| \leqslant \frac{D_n(f)-E_n(f)}{2} = \frac{f(b)-f(a)}{2}h_n \leqslant |f(b)-f(a)|\frac{(b-a)}{2n}.
\end{aligned}$$

Se f é não crescente então

$$D_n(f) \leqslant \int_a^b f \leqslant E_n(f) \Rightarrow -E_n(f) \leqslant -\int_a^b f \leqslant -D_n(f).$$

Somando $T_n(f)$ na desigulddade anterior, com um raciocínio análogo ao caso acima concluímos o resultado. □

O próximo teorema se refere a um resultado que pode ser interessante ser considerado quando se deseja aproximar a integral de uma função contínua côncava ou convexa em um dado intervalo $[a,b]$. Como este resultado não é o principal para este estudo, apenas enunciaremos abaixo.

Teorema 3: *Seja f uma função contínua em $[a,b]$ e sejam $|e_M|$ e $|e_T|$ os erros absolutos que resultam das apoximações pelo ponto médio e trapezoidal de $\int_a^b f$ sob uma partição uniforme $\mathcal{P}_n$.*

i. *se f'' não muda de sinal em (a,b) então $|e_M| < |e_T|$;*

ii. *se o gráfico de f é côncavo para baixo em (a,b), então $T_n(f) < \int_a^b f < M_n(f)$;*

iii. *se o gráfico de f é côncavo para cima em (a,b), então $M_n(f) < \int_a^b f < T_n(f)$.*

Denotamos agora

$$||f''|| = \max_{a\leqslant x\leqslant b} |f''(x)| \quad \text{e} \quad ||f^{(4)}|| = \max_{a\leqslant x\leqslant b} |f^{(4)}(x)|.$$

O resultado principal sobre estimativas de erro para as proximações da integrl de f em $[a,b]$ é dado pelo teorema a seguir.
Teorema 4:
i. *Se* $f \in \mathcal{C}^2([a,b])$, *então*

$$\left| M_n(f) - \int_a^b f \right| \leqslant \left[\frac{(b-a)^3}{24} ||f''|| \right] \frac{1}{n^2} \tag{13}$$

e

$$\left| T_n(f) - \int_a^b f \right| \leqslant \left[\frac{(b-a)^3}{12} ||f''|| \right] \frac{1}{n^2}. \tag{14}$$

ii. *Se* $f \in \mathcal{C}^4([a,b])$, *então*

$$\left| S_n(f) - \int_a^b f \right| \leqslant \left[\frac{(b-a)^5}{180} ||f^{(4)}|| \right] \frac{1}{n^4}. \tag{15}$$

Demonstração: Claramente separamos a demonstração deste teorema em dois casos:
i. Para a primeira desigualdade constante neste item, vejamos:

Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $\mathcal{P}_n$ a partição uniforme do intervalo $[a,b]$, cujos pontos médios de cada um dos n subintervalos é representado por

$$c_k = a + \left(k - \frac{1}{2} \right) h_n, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{16}$$

onde $h_n = \frac{b-a}{n}$.

Introduzimos n funções $\psi_k : [0, \frac{h_n}{2}] \to \mathbb{R}$ dadas por

$$\psi_k(t) = \int_{c_k - t}^{c_k + t} f(x)dx - 2tf(c_k), \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{17}$$

Claramente é possível observar que

$$\psi_k(t) = \int_{c_k}^{c_k + t} f(x)dx - \int_{c_k}^{c_k - t} f(x)dx - 2tf(c_k).$$

Para cada $k = 1, 2, \ldots, n$, vemos que a função ψ_k é duas vezes derivável em $[a,b]$ e um cálculo simples nos dá que:

$$\psi_k'(t) = f(c_k + t) + f(c_k - t) - 2f(c_k) \tag{18}$$

e

$$\psi_k''(t) = f'(c_k + t) - f'(c_k - t). \tag{19}$$

De (17), (18) e (19), obtemos que

$$\psi_k(0) = \psi_k'(0) = \psi_k''(0) = 0, \quad \forall k = 1, 2, \ldots, n. \tag{20}$$

Agora, para cada $k = 1, 2, \ldots, n$ e $0 < t \leqslant \frac{h_n}{2}$ fixados, podemos aplicar o Teorema do Valor Médio para a função $f'_{|[c_k - t, c_k + t]}$. Logo, para cada $k = 1, 2, \ldots, n$ e $0 < t \leqslant \frac{h_n}{2}$ fixados, $\exists \eta(k,t) \in (c_k - t, c_k + t)$ tal que

$$f'(c_k + t) - f'(c_k - t) = f''(\eta(k,t))(2t).$$

Substituindo (19) na igualdade acima, temos

$$\psi''_k(t) = 2tf''(\eta(k,t)) \tag{21}$$

Levando em conta que $f'' \in \mathcal{C}([a,b])$, temos que $\exists\ x_0, x_1 \in [a,b]$ tais que para todo $s \in [a,b]$ temos

$$f''(x_0) = \min_{a \leqslant x \leqslant b}\{f''(x); x \in [a,b]\} \leqslant f''(s) \leqslant \max_{a \leqslant x \leqslant b}\{f''(x); x \in [a,b]\} = f''(x_1), \tag{22}$$

de onde, em particular,

$$f''(x_0) \leqslant f''(\eta(k,t)) \leqslant f''(x_1),$$

ou ainda,

$$2tf''(x_0) \leqslant 2tf''(\eta(k,t)) \leqslant 2tf''(x_1).$$

Usando (21) na desigualdade acima, concluímos que para cada $k = 1, 2, \ldots, n$ e $0 \leqslant t \leqslant \frac{h_n}{2}$

$$2tf''(x_0) \leqslant \psi''_k(t) \leqslant 2tf''(x_1).$$

Observe também que esta desigualdade continua válida para $t = 0$. Então,

$$2tf''(x_0) \leqslant \psi''_k(t) \leqslant 2tf''(x_1), \quad \forall k = 1, 2, \ldots, n, \quad \forall t \in \left[0, \frac{h_n}{2}\right]. \tag{23}$$

Integrando, membro a membro, a desigualdade acima de zero a s, com $s \in \left[0, \frac{h_n}{2}\right]$, temos:

$$\begin{array}{ccccc} \displaystyle\int_0^s 2tf''(x_0)dt & \leqslant & \displaystyle\int_0^s \psi''_k(t)dt & \leqslant & \displaystyle\int_0^s 2tf''(x_1)dt \\ s^2 f''(x_0) & \leqslant & \psi'_k(s) & \leqslant & s^2 f''(x_1). \end{array}$$

Integrando agora, de zero a t, sendo $t \in \left[0, \frac{h_n}{2}\right]$, verifica-se que:

$$\begin{array}{ccccc} \displaystyle\int_0^s s^2 f''(x_0)ds & \leqslant & \displaystyle\int_0^s \psi'_k(s)ds & \leqslant & \displaystyle\int_0^s 2s^2 f''(x_1)ds \\ \dfrac{t^3}{3} f''(x_0) & \leqslant & \psi_k(t) & \leqslant & \dfrac{t^3}{3} f''(x_1). \end{array}$$

Tomando, em particular $t = \frac{h_n}{2}$ na desigualdade acima, temos:

$$\frac{h_n^3}{24} f''(x_0) \ \leqslant\ \psi_k\left(\frac{h_n}{2}\right) \ \leqslant\ \frac{h_n^3}{24} f''(x_1).$$

Somando as desigualdades acima de $k = 1$ a $k = n$, obtemos

$$\frac{nh_n^3}{24} f''(x_0) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \psi_k\left(\frac{h_n}{2}\right) \leqslant \frac{nh_n^3}{24} f''(x_1).$$

Notando que $\sum_{k=1}^{n} \psi_k\left(\frac{h_n}{2}\right) = \int_a^b f - M_n(f)$, por (17) e (22), temos

$$f''(x_0) \leqslant \left[\frac{24}{nh_n^3}\right]\left[\int_a^b f - M_n(f)\right] \leqslant f''(x_1).$$

Esta desigualdade e o teorema do valor intermediário, aplicado a f'', implicam que para cada $n \in \mathbb{N}, \exists \beta_n \in (a, b)$ tal que

$$f''(\beta_n) = \left[\frac{24}{nh_n^3}\right]\left[\int_a^b f - M_n(f)\right],$$

ou seja,

$$\int_a^b f - M_n(f) = \frac{nh_n^3}{24} f''(\beta_n) = \frac{(b-a)^3}{24n^2} f''(\beta_n)$$

Finalmente, tomando o módulo na igualdade acima e lembrando que $|f''(x)| \leqslant ||f''||, \forall x \in [a, b]$, concluímos que

$$\left|\int_a^b f - M_n(f)\right| = \frac{(b-a)^3}{24n^2}|f''(\beta_n)| \leqslant \frac{(b-a)^3}{24n^2}||f''||$$

como desejado.

Agora de modo a validar a segunda desigualdade constante neste mesmo item, temos que:

Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $\mathcal{P}_n$ a partição uniforme do intervalo $[a, b]$, que o divide em n subintervalos de mesmo comprimento $h_n = \frac{b-a}{n}$. Isto é $\mathcal{P}_n = \{a_k\}_{0 \leqslant k \leqslant n} = \{a_0 = a < a_1 = a + h_n < \cdots < a_n = b\} = \{a_k = a + kh_n;\ k = 0, 1, \ldots, n\}$.

Introduzimos n funções $\varphi_k : [0, h_n] \to \mathbb{R}$ por

$$\varphi_k(t) = \frac{1}{2}t[f(a_k) + f(a_k + t)] - \int_{a_k}^{a_k+t} f(x)dx, \quad k = 0, 1, \ldots, (n-1). \tag{24}$$

Para cada $k = 0, 1, \ldots, (n-1)$ vemos que a função φ_k é duas vezes derivável em $[0, h_n]$ e um cálculo simples nos resulta

$$\varphi_k'(t) = \frac{1}{2}[f(a_k) - f(a_k + t) + tf'(a_k + t)] \tag{25}$$

e

$$\varphi_k''(t) = \frac{1}{2}tf''(a_k + t). \tag{26}$$

Então de (25) segue que

$$\varphi_k'(0) = 0, \quad \forall k = 0, 1, \ldots, (n-1) \tag{27}$$

e de (26) observamos que

$$\varphi_k''(0) = 0, \quad \forall k = 0, 1, \ldots, (n-1) \tag{28}$$

Além disso, desde que $f \in \mathcal{C}^2([a,b])$, temos que $f'' \in \mathcal{C}([a,b])$ e portanto, f assume valor máximo e valor mínimo no intervalo $[a,b]$, isto é, $\exists\ x_0, x_1 \in [a,b]$ tais que

$$f''(x_0) = \min_{a \leqslant x \leqslant b} \{f''(x); x \in [a,b]\} \leqslant f''(s) \leqslant \max_{a \leqslant x \leqslant b} \{f''(x); x \in [a,b]\} = f''(x_1), \quad \forall s \in [a,b].$$

Em particular, $\forall k = 0, 1, \ldots, (n-1), \forall t \in [0, h_n]$, segue que

$$f''(x_0) \leqslant f''(a_k + t) \leqslant f''(x_1),$$

ou ainda,

$$f''(x_0)\frac{t}{2} \leqslant f''(a_k + t)\frac{t}{2} \leqslant f''(x_1)\frac{t}{2}.$$

Integrando, membro a membro, de 0 a s, sendo $s \in [0, h_n]$, e usando (27), concluímos que:

$$\begin{array}{ccccc} \displaystyle\int_0^s \frac{1}{2} t f''(x_0) dt & \leqslant & \displaystyle\int_0^s \varphi_k''(t) dt & \leqslant & \displaystyle\int_0^s \frac{1}{2} t f''(x_1) dt \\ \displaystyle\frac{1}{4} s^2 f''(x_0) & \leqslant & \varphi_k'(s) & \leqslant & \displaystyle\frac{1}{4} s^2 f''(x_1), \quad \forall s \in [0, h_n], \forall k = 1, 2, \ldots, n. \end{array}$$

Integrando a desigualdade acima em s de 0 a t, com $t \in [0, h_n]$ e usando (28), resulta que:

$$\begin{array}{ccccc} \displaystyle\int_0^t \frac{1}{4} s^2 f''(x_0) ds & \leqslant & \displaystyle\int_0^t \varphi'(s) ds & \leqslant & \displaystyle\int_0^t \frac{1}{4} s^2 f''(x_1) ds \\ \displaystyle\frac{1}{12} t^3 f''(x_0) & \leqslant & \varphi_k(t) & \leqslant & \displaystyle\frac{1}{12} t^3 f''(x_1), \quad \forall t \in [0, h_n], \forall k = 1, 2, \ldots, n. \end{array}$$

Donde, em particular, tomando $t = h_n$, temos para $k = 1, 2, \ldots, n$:

$$\frac{1}{12} h_n^3 f''(x_0) \ \leqslant \ \varphi_k(h_n) \ \leqslant \ \frac{1}{12} h_n^3 f''(x_1)$$

Somando as desigualdades da forma acima de $k = 1$ a $k = n$, obtemos:

$$\frac{n h_n^3}{12} f''(x_0) \ \leqslant \ \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(h_n) \ \leqslant \ \frac{n h_n^3}{12} f''(x_1) \tag{29}$$

Agora usando (24), podemos ver que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \varphi_k(h_n) = T_n(f) - \int_a^b f$, para $n \in \mathbb{N}$.

Desta igualdade e de (29), temos

$$\frac{nh_n^3}{12}f''(x_0) \leqslant T_n(f) - \int_a^b f \leqslant \frac{nh_n^3}{12}f''(x_1)$$

$$f''(x_0) \leqslant \left[\frac{12}{nh_n^3}\right]\left[T_n(f) - \int_a^b f\right] \leqslant f''(x_1)$$

Como $f'' \in C[a,b]$, pelo Teorema do Valor Intermediário de Bolzano, podemos afirmar que para cada $n \in \mathbb{N}, \exists\ \alpha_n \in [a,b]$ tal que

$$f''(\alpha_n) = \left[\frac{12}{nh_n^3}\right]\left[T_n(f) - \int_a^b f\right]$$

ou seja,

$$T_n(f) - \int_a^b f = \frac{nh_n^3}{12}f''(\alpha_n) = \frac{(b-a)^2}{12n^2}f''(\alpha_n)$$

Tomando o valor absoluto na igualdade anterior e utilizando o fato de que $|f''(x)| \leqslant ||f''||, \forall x \in [a,b]$:

$$\left|T_n(f) - \int_a^b f\right| = \frac{(b-a)^2}{12n^2}|f''(\alpha_n)| \leqslant \frac{(b-a)^2}{12n^2}||f''|| = \left[\frac{(b-a)^2}{12}||f''||\right]\frac{1}{n^2}$$

como desejado.

ii. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $\mathcal{P}_n$ a partição uniforme do intervalo $[a,b]$. Então, se $k = 0,1,2,\ldots,\frac{n}{2}-1$ tome $c_k = a + \frac{2k+1}{h_n}$ os pontos médios de cada subintervalo formados a partir da partição equidistante $\mathcal{P}_n$ e defina $\phi_k : [0,h_n] \to \mathbb{R}$ por

$$\phi_k(t) = \frac{t}{3}[f(c_k+t) + 4f(c_k) + f(c_k+t)] - \int_{c_k-t}^{c_k+t} f(x)dx. \tag{30}$$

Claramente podemos notar que:

$$\phi_k(t) = \frac{t}{3}[f(c_k+t) + 4f(c_k) + f(c_k+t)] - \left[\int_{c_k}^{c_k+t} f(x)dx - \int_{c_k}^{c_k-t} f(x)dx\right]. \tag{31}$$

Como $f \in \mathcal{C}^4([a,b])$, derivamos a função três vezes de modo a obter:

$$\phi_k'(t) = \frac{t}{3}[-f'(c_k-t) + f'(c_k+t)] - \frac{2}{3}[f(c_k-t) - 2f(c_k) + f(c_k+t)], \tag{32}$$

$$\phi_k''(t) = \frac{t}{3}[f''(c_k-t) + f''(c_k+t)] + \frac{1}{3}[f'(c_k-t) - f'(c_k+t)] \tag{33}$$

e

$$\phi_k'''(t) = \frac{t}{3}[f'''(c_k+t) - f'''(c_k-t)], \quad \text{para } t \in [0,h_n]. \tag{34}$$

Observe que de (32), (33) e (34), temos

$$\phi_k(0) = \phi_k'(0) = \phi_k''(0) = 0. \tag{35}$$

Deste modo, segue da aplicação do Teorema do Valor Médio em f''', que sabemos ser contínua em $[a, b]$, a afirmação de que $\exists\ \gamma_n \in [c_k - t, c_k + t]$ tal que

$$f'''(c_k + t) - f'''(c_k - t) = f^{(4)}(\gamma_n)(2t) \tag{36}$$

ou seja, de (34) e (36), temos

$$\phi_k'''(t) = \frac{t}{3}[f'''(c_k + t) - f'''(c_k - t)] = \frac{2t^2}{3} f^{(4)}(\gamma_n), \quad \text{para } t \in [0, h_n]. \tag{37}$$

Visto que $f \in \mathcal{C}^4([a, b])$ pode-se afirmar que $\exists\ x_0, x_1 \in [a, b]$ tais que

$$f^{(4)}(x_0) = \min\{f^{(4)}(x); x \in [a, b]\} \text{ e } f^{(4)}(x_1) = \max\{f^{(4)}(x); x \in [a, b]\}. \tag{38}$$

E assim, evidentemente temos que para $t \in [0, h_n]$

$$\begin{array}{ccccc} f^{(4)}(x_0) & \leqslant & f^{(4)}(\gamma_n) & \leqslant & f^{(4)}(x_1) \\ \frac{2t^2}{3} f^{(4)}(x_0) & \leqslant & \frac{2t^2}{3} f^{(4)}(\gamma_n) & \leqslant & \frac{2t^2}{3} f^{(4)}(x_1) \\ \frac{2t^2}{3} f^{(4)}(x_0) & \leqslant & \phi_k'''(t) & \leqslant & \frac{2t^2}{3} f^{(4)}(x_1). \end{array}$$

Agora, note que ao integrarmos a desigualdade acima de zero a v com $v \in [0, h_n]$ obtemos:

$$\frac{2v^3}{9} f^{(4)}(x_0) \leqslant \phi_k''(v) \leqslant \frac{2v^3}{9} f^{(4)}(x_1).$$

Integrando novamente, desta vez de zero a s, sendo $s \in [0, h_n]$:

$$\frac{s^4}{18} f^{(4)}(x_0) \leqslant \phi_k'(s) \leqslant \frac{s^4}{18} f^{(4)}(x_1).$$

Outra vez integrando, agora de zero a t, onde $t \in [0, h_n]$, tem-se

$$\frac{t^5}{90} f^{(4)}(x_0) \leqslant \phi_k(t) \leqslant \frac{t^5}{90} f^{(4)}(x_1).$$

Uma vez que $t \in [0, h_n]$, tomemos o caso particular onde $t = h_n$ na desigualdade acima para obtermos

$$\frac{h_n^5}{90} f^{(4)}(x_0) \leqslant \phi_k(h_n) \leqslant \frac{h_n^5}{90} f^{(4)}(x_1). \tag{39}$$

Somando as desigualdades acima de $k = 0$ a $k = \frac{n}{2} - 1$ e notando que $\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} \phi_k(h_n) = S_n(f) - \int_a^b f(x)dx$, é percebido que

$$\frac{nh_n^5}{180} f^{(4)}(x_0) \leqslant S_n(f) - \int_a^b f(x)dx \leqslant \frac{nh_n^5}{180} f^{(4)}(x_1),$$

ou seja,

$$f^{(4)}(x_0) \leqslant \left[\frac{180}{nh_n^5}\right]\left[S_n(f) - \int_a^b f(x)dx\right] \leqslant f^{(4)}(x_1) \tag{40}$$

Já que $f^{(4)}$ é contínua em $[a,b]$, ao aplicar o Teorema do Valor Intermediário de Bolzano, temos como resultado que para cada $n \in \mathbb{N}$ par $\exists \lambda_n$ tal que

$$\left[\frac{180}{nh_n^5}\right]\left[S_n(f) - \int_a^b f(x)dx\right] = f^{(4)}(\lambda_n)$$

$$S_n(f) - \int_a^b f(x)dx = \frac{nh_n^5}{180} f^{(4)}(\lambda_n). \tag{41}$$

Finalmente, tomando o módulo na igualdade (41) acima, e aplicando os fatos de que $h_n = \frac{(b-a)}{n}$ e $|f^{(4)}(x)| \leqslant ||f^{(4)}||, \forall x \in [a,b]$ concluímos que

$$\left|S_n(f) - \int_a^b f(x)dx\right| = \frac{nh_n^5}{180}|f^{(4)}(\lambda_n)| = \frac{(b-a)^5}{180n^4}|f^{(4)}(\lambda_n)| \leqslant \frac{(b-a)^5}{180n^4}||f^{(4)}||.$$

□

4. Aplicação dos Métodos Anteriores

Em Estatística, uma das mais importantes distribuições de probabilidade é a distribuição normal. Esta distribuição tem grande relevância já que muitas variáveis aleatórias em experimentos físicos mostraram ser aproximadamente normais. É o caso do estudo de distribuições de altura ou peso de uma população ou mesmo a distribuição da força de tração de peças de aço produzidas em um certo processo.

Por definição, uma variável X tem distribuição normal com média μ e variância σ^2 se possui função densidade de probabilidade

$$f(x|\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right],$$

onde exp é a função exponencial e μ e σ^2 são os parâmetros média e variância da distribuição, respectivamente. Note na Figura 1 que o gráfico da distribuição normal é simétrico em relação à uma reta vertical do tipo $x = x_0$, para algum $x_0 \in \mathbb{R}$, e ainda que é signifcativa em apenas um certo intervalo.

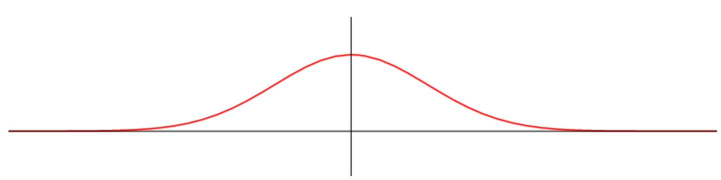


Figura 1: Esboço do gráfico de uma distribuição normal qualquer.

Dentro da distribuição normal, genericamente apresentada acima, temos um tipo particular de distribuição normal, é aquela que possui média nula e variância unitária, ou seja, a distribuição normal, cuja função densidade de probabilidade é

$$\rho(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}(u)^2\right]$$

A função acima é chamada forma padrão da distribuição normal. Claramente, esta forma não depende dos parâmetros μ e σ, já que estes são zero e um, respectivamente.

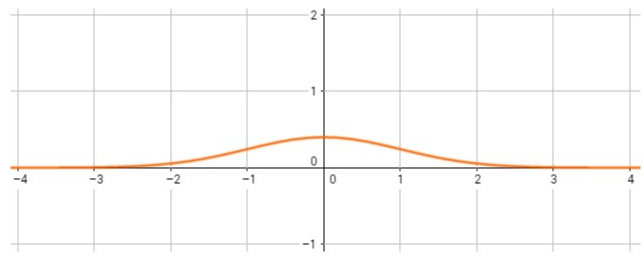


Figura 2: Esboço do gráfico da distribuição normal em sua forma padrão.

Posto estes fatos, dada uma distribuição normal, em sua forma padrão, de uma variável X, a probabilidade da variável X estar situada no intervalo $[x_1, x_2]$ é dada pela a integral da função densidade de probabilidade de x_1 a x_2, ou seja,

$$\Pr(x_1 \leqslant X \leqslant x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \rho(u)du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{1}{2}u^2} du. \tag{42}$$

Veja que não é possível utilizar o Teorema Fundamental do Cálculo para resolver a integral acima. Nestas condições, utilizamos os métodos estudados neste capítulo para termos um valor aproximado para o valor da integral em (42).

Suponhamos que seja desejado calcular $\Pr(0 \leqslant X \leqslant 1)$, logo, deve-se resolver a integral $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 e^{-\frac{1}{2}u^2} du$. Como $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ é uma constante, focaremos no problema de se calcular $\int_0^1 e^{-\frac{1}{2}u^2} du$.

Para utilizar os principais métodos aqui apresentados, é necessário um estudo prévio acerca da função envolvida, por este motivo estudaremos a função $\rho(u) = e^{-\frac{1}{2}u^2}$ para obtermos as informações necessárias e após isto faremos as aproximações segundo os dispositivos já vistos.

Como já apresentado, para aplicar os resultados deste capítulo, devemos conhecer os pontos de máximo das derivadas segunda e quarta da função $\rho(u)$. Deste modo, explicitaremos aqui os cálculos necessários.

Primeiramente calcularemos as derivadas até a ordem 5. Evidentemente é possível realizar tais cálculos já que a função exponencial não possui restrições quanto à derivação, e consequentemente, todos os métodos de aproximação de integrais aqui vistos poderão ser aplicados.

$\rho'(u) = -ue^{-\frac{u^2}{2}}$

$\rho''(u) = e^{-\frac{u^2}{2}}(u^2 - 1)$
$\rho'''(u) = e^{-\frac{u^2}{2}}(3u - u^3)$
$\rho^{(4)}(u) = e^{-\frac{u^2}{2}}(u^4 - 6u^2 + 3)$
$\rho^{(5)}(u) = e^{-\frac{u^2}{2}}(-u^5 + 10u^3 - 15u)$

Nos métodos de aproximação trapezoidal e pelo ponto médio é necessário o máximo do conjunto $J = \{|\rho''(u)|; u \in [0,1]\}$. Veja que a procura do máximo valor de ρ'', nos remete a calcular o valor de ρ'' nos extremos do intervalo e analisar os pontos onde ρ''' é igual a zero ou não está definida. Mas como esta é definida em toda a reta real, observamos que:

$$\begin{aligned} \rho'''(u) = 0 &\iff e^{-\frac{u^2}{2}}(3u - u^3) = 0 \\ &\iff (3u - u^3) = 0, \text{ pois } e^{-\frac{u^2}{2}} \neq 0, \ \forall u \in \mathbb{R} \\ &\iff u(u^2 - 3) = 0 \\ &\iff u = 0 \text{ ou } u = \pm\sqrt{3} \end{aligned}$$

Notando que $\pm\sqrt{3} \notin [0,1]$, temos os seguintes valores: $\rho''(0) = -1$ e $\rho''(1) = 0$, e portanto, $|\rho''(u)| \leqslant |\rho''(0)| = 1$, para $u \in [0,1]$.

No método de Simpson deve-se encontrar o máximo para o conjunto $K = \{|\rho^{(4)}(u)|; u \in [0,1]\}$, e para isso, de modo análogo ao feito anteriormente, calcularemos $\rho^{(4)}$ nos extremos do intervalo considerado e analisaremos os pontos onde $\rho^{(5)}$ é igual a zero ou não está definida. Vendo que $\rho^{(5)}$ está definida em toda reta real, temos:

$$\begin{aligned} \rho^{(5)}(u) = 0 &\iff e^{-\frac{u^2}{2}}(-u^5 + 10u^3 - 15u) = 0 \\ &\iff -u^5 + 10u^3 - 15u = 0, \text{ pois } e^{-\frac{u^2}{2}} \neq 0, \ \forall u \in \mathbb{R} \\ &\iff (-u)(u^4 - 10u^2 + 15) = 0 \\ &\iff u = 0 \text{ ou } u = \sqrt{5 \pm \sqrt{10}} \end{aligned}$$

Tendo em vista que $\sqrt{5 \pm \sqrt{10}} \notin [0,1]$ resta vermos que $\rho^{(4)}(0) = 3$ e $\rho^{(4)}(1) \approx -1,2130613194$. Logo, temos que $|\rho^{(4)}(u)| \leqslant |\rho^{(4)}(0)| = 3$, para $u \in [0,1]$.

Posto isto, podemos ir às aproximações.

Agora, pode-se suceder a aproximação em duas formas: pode-se definir um número $n \in \mathbb{N}$ para que os cálculos sejam realizados a partir deste, ou ainda, pode-se escolher um certo erro para a aproximação e obter n que satisfaça tal estimativa desejada.

Para que tenhamos uma análise comparativa entre os métodos já apresentados optaremos por prosseguir a partir de um certo erro definido, para que possamos então comparar a eficiência de cada processo a partir do número n necessário para satisfazer a necessidade imposta. Logicamente, só é possível incluir no comparativo o método de Simpson se a função puder ser derivada quatro vezes, mas como este é o caso do exemplo aqui tomado, continuemos a análise.

Por exemplo, caso seja desejado um erro menor que 10^{-5}, vejamos qual seria o n que satisfaria cada processo estudado.

Na aproximação trapezoidal, da desigualdade (13), temos:

$$\left|T_n(\rho) - \int_0^1 \rho(u)du\right| \leqslant \frac{(1-0)^3}{12n^2}|\rho''(0)| = \frac{1}{12n^2}\cdot 1 = \frac{1}{12n^2}$$

Mas como desejamos ter o erro menor que 10^{-5}, devemos ter:

$$\frac{1}{12n^2} < 10^{-5} \iff n > 91,2870929184$$

Logo, n=92 satisfaz tal estimativa.

Na aproximação pelo ponto médio, da desigualdade (14), podemos afirmar que

$$\left|\int_0^1 \rho(u)du - M_n(\rho)\right| \leqslant \frac{(1-0)^3}{24n^2}|f''(0)| = \frac{1}{24n^2}\cdot 1 = \frac{1}{24n^2}$$

Analisando qual n é necessário para termos o erro desejado, temos

$$\frac{1}{24n^2} < 10^{-5} \iff n > 64,5497224369$$

Portanto, $n = 65$ é suficiente.

Já na regra de Simpson, ao utilizarmos a desigualdade (15), temos que:

$$\left|S_n(\rho) - \int_0^1 \rho(u)du\right| \leqslant \frac{(1-0)^5}{180n^4}|\rho^{(4)}(0)| = \frac{1}{180n^4}\cdot 3 = \frac{1}{60n^4}$$

E para atender a necessidade do erro dado, é necessário que

$$\frac{1}{60n^4} < 10^{-5} \iff n > 6,38943104246$$

Como é necessário n par para aplicação deste método, temos que $n = 8$ é o suficiente para obter um erro menor que 10^{-5}.

Para que tomemos ciência de qual é este valor aproximado, utilizando a linguagem de programação Julia, foram calculadas tais aproximações, e os valores obtidos foram:

$T_{92}(\rho) \approx 0,8556184201978315$;

$M_{65}(\rho) \approx 0,8556303735394275$;

$S_8(\rho) \approx 0,8556260464436526$.

Portanto, concluímos que:

Pelo método da aproximação trapezoidal,

$$\Pr(0 \leqslant X \leqslant 1) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot T_{92}(\rho) \approx 0,3413423637071942.$$

Já pelo método da aproximação pelo ponto médio,

$$\Pr(0 \leqslant X \leqslant 1) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot M_{65}(\rho) \approx 0,34134713240054887.$$

E pelo método da aproximação de Simpson,

$$\Pr(0 \leqslant X \leqslant 1) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot S_{8}(\rho) \approx 0,3413454061390929.$$

Das aproximações acima temos que são plausíveis e que diferem apenas na quinta casa decimal após a vírgula, o que é esperado já que aproximamos a integral com um erro menor que 10^{-5}.

O resultado obtido a partir das aproximações é coerente, pois sabe-se que uma probabilidade é um número entre 0 e 1. Ainda podemos compreender que a área abaixo do gráfico de ρ no intervalo $[0,1]$ representa aproximadamente 34,134% da área total abaixo do gráfico de ρ.

Referências

1. ANTON, H.; BIVENS, I.; DAVIS, S. *Cálculo*. 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2014.
2. ASANO, C. H.; COLLI, E. *Cálculo Numérico: Fundamentos e Aplicações*. Departamento de Matemática Aplicada, IME-USP, 2009.
3. BARTLE, R. G. *Elementos de Análise Real*. Rio de Janeiro: Editora Campus LTDA, 1983.
4. BARTLE, R. G.; SHERBERT, D. R. *Introduction to Real Analysis*. 4. ed. John Wiley & Sons, 2010.
5. BUSSAB, W. O.; MORRETIN, P. A. *Estatística Básica*. 4. ed. Atual Editora, 1987.
6. DEGROOT, M. H.; SCHERVISH, M. J. *Probability and statistics*. 4. ed., Pearson, 2011.
7. DE QUADROS, R.; DE BORTOLI, A. L. *Fundamentos de Cálculo Numérico para Engenheiros*, Porto Alegre, 2009.
8. JOHNSON, N. L.; KOTZ, S.; BALAKRISHNAN, N. *Continuous Univariate Distributions*. Vol. 1. 4. ed. 1994.
9. KUDRIÁVTSEV, L. D. *Curso de Análisis Matemático*. Vol 1. Editora MIR, 1984.
10. MOREIRA, C. N.; CABRAL, M. A. P. *Curso de Análise Real*. Departamento de Matemática Aplicada, IM-UFRJ, 2011.
11. RUDIN, W. *Principles of Mathematical Analysis*. 3. ed. McGraw-HILL International Book Company, 1976.
12. RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. da R. *Cálculo Numérico: Aspectos teóricos e computacionais*. 2. ed. São Paulo: Pearson, 1996.

J Jornal Eletrônico de Ensino e Pesquisa de Matemática
(1s.) v. 3 2 (2019): 25–26. ©Jeepema–ISSN-2594-6323.
www.dma.uem.br/kit/jeepema

A constante de Kaprekar–6174

Prof. Doherty Andrade – doherty200@hotmail.com

1. A Constante 6174

Dado um número N com 4 dígitos (base 10), escrevendo os digitos de N em forma ascendente obtemos um número N_1 e escrevendo os dígitos de N de forma descendente obtemos um número N_2. Subtraindo o maior número do menor obtemos um número N_3. Se $N_3 = 6174$ já atingimos a constante de Kaprekar. Se não, repete-se o processo com o número N_3. Após um número finito de passos (no máximo 8 passos) atinge-se a constante de Kaprekar $K = 6174$. Observe que deve-se considerar o dígito zero quando este aparecer no processo.

2. Notebook em Python

O código abaixo para notebook, em Python 3.7.3, executa o procedimento acima. No exemplo, tomamos o número $N = 1234$. Este código foi baseado no trabalho de Kuba Siekierzynski de 2016.

Se você usa Jupyter Notebook para executar arquivos Python, digite este notebook e execute-o.

```
In [1]: """
        Código baseado em  Kuba Siekierzynski (c) 2016

        Este algoritimo retorna a constante de Kaprekar 6174 para nos. com 4 dígitos.

        Apenas para uso didático -- prof. Doherty Andrade

        """
        # armazena a constante de Kaprekar
        K = [6174]
        def asce(n):
            # escreve o número em forma ascendente.
            return int(''.join(sorted(str(n))))

        def desce(n):
            # escreve o número em forma descendente
            return int(''.join(sorted(str(n))[::-1]))

        n = input("Entre com um número de 4 dígitos: ")
        while True:
            # inicia as iterações
```

```
        print(desce(n), "-", asce(n), "=", desce(n)-asce(n))
        n = desce(n) - asce(n)

        if n not in K:
            # verifica se já atingiu a constante
            K.append(n)
        else:
            if K.index(n) == len(K)-1:
            # se encontrou como ultimo número é a constante
                K = []
                K.append(n)
            else:
                K = K[K.index(n):]
            break

    print('Constante de Kaprekar foi obtida em ',len(K), 'passos:', n)
```

```
Entre com um número de 4 dígitos: 1234
4321 - 1234 = 3087
8730 - 378 = 8352
8532 - 2358 = 6174
Constante de Kaprekar foi obtida em  3 passos: 6174
```

Se aplicarmos a rotina de Kaprekar aos números com 3 dígitos (base 10), resultará na constante 495 em no máximo 6 passos. Pesquise sobre a constante de Kaprekar para números com diferentes quantidade de dígitos.

Referências

1. Susanna S. Epp. Discrete Mathematics With Applications. Cengage Learning, 1993.
2. Ronald L. & Patashnik Oren Knuth, Donald E. & Graham. Concrete Mathematics : A Foundation for Computer Science. Addison- Wesley, 1994.
3. D. Andrade. Matemática Discreta. Notas de Aula. DMA- UEM. 2005.

Jornal Eletrônico de Ensino e Pesquisa de Matemática
(1s.) **v. 3** 2 (2019): 27–41. ©Jeepema–ISSN-2594-6323.
www.dma.uem.br/kit/jeepema

Regra de três Simples e Composta

Prof. Doherty Andrade – doherty200@hotmail.com

Resumo: Nestas notas apresentamos um revisão sobre regra de três simples e composta e suas propriedade. Apresentamos também algumas aplicações elementares.

Sumário

1. Introdução

Os conceitos de razão, proporção e como consequência suas aplicações, nos ajudam a resolver problemas importantes. O método chamado *regra de três* é uma importante técnica que não pode ser desprezada. Embora importante, esse é um assunto elementar, em nível inicial de sexta série, e, portanto, ao alcance de de todo estudante.

Vamos então, conforme solicitado, vamos aos conceitos básicos necessários para o entendimento desse assunto.

Chamamos de **grandeza** a tudo o que pode ser medido. São exemplos de grandezas, tempo, massa, velocidade, distância, temperatura e etc.

Chamamos de **razão** entre dois números a e $b \neq 0$ ao quociente entre eles, isto é, $\frac{a}{b}$. Chamamos o número a de antecedente e o número b de consequente.

Por exemplo, a razão entre 8 e 2 é 4, pois $\frac{8}{2} = 4$.

No nosso vocabulário empregamos muitas vezes o conceito de razão. A palavra razão tem origem na palavra latina *ratio* e significa divisão.

Apenas 3, dentre 100 pessoas, lêem jornais regularmente. A razão entre a quantidade que lêem jornal e os que não lêem jornal é $\frac{3}{100}$. Isto é, 3%.

Outros exemplos em que aparece o conceito de razão:

i. **Escala**: é a razão entre o comprimento apresentado em um desenho ou maquete e o comprimento correspondente real, ambos expressos na mesma unidade de medida.

ii. **Velocidade**: é a razão entre a distância percorrida e o tempo gasto em percorrê-la.

iii. **Densidade demográfica**: é a razão entre o número total de habitantes e a área da região.

iv. **Consumo médio de combustível**: é a razão entre a distância percorrida e a quantidade de combustível gasto em percorrê-la.

v. **Gramatura de papel:** é a razão entre a massa do papel e a área do papel.

Diariamente, muitas vezes sem nos dar conta disso, estamos comparando grandezas. Vejamos alguns exemplos:

1. Se o litro da gasolina custa R$2,50, então dez litros custam R$25,00. Note, pela tabela, que aumentando a quantidade de gasolina a ser comprada, o preço também aumenta.

Qtdade de gasolina	**Preço a ser pago**
1	2,50
2	5,00
4	10,00
8	20,00
10	25,00

Vemos que dobrando a quantidade litros de gasolina, dobramos também o preço a ser pago. Aqui as grandezas comparadas foram o preço da gasolina e litros. Note que a razão entre os valores da primeira grandeza (Quantidade de gasolina) e os valores correspondentes da segunda grandeza (preço) são iguais. Vejamos, tomemos como exemplo as seguintes quantidades

Qtdade de gasolina	**Preço a ser pago**
4	10,00
8	20,00

Assim, temos

$$\frac{4}{10} = \frac{2}{5} \text{ e } \frac{8}{20} = \frac{2}{5}.$$

2. Se um operário em um dia de trabalho constrói um muro de 3 metros de comprimento, então (nas mesmas condições) para construir um muro de 24 metros ele precisará de 8 dias. Note, pela tabela, que ao aumentarmos o tempo de trabalho, aumentamos também o comprimento do muro.

Dias de trabalho	**Comprimento do muro**
1	3
2	6
4	12
8	24

Aqui as grandezas comparadas foram o tempo de trabalho e o comprimento do muro.

Note que a razão entre os valores da primeira grandeza (tempo de trabalho) e os valores correspondentes da segunda grandeza (comprimento do muro) são iguais. Tomemos como exemplo as seguintes quantidades:

Dias de trabalho	**comprimento do muro**
2	6
4	12

Assim, temos:

$$\frac{2}{6} = \frac{1}{3} \text{ e } \frac{4}{12} = \frac{1}{3}.$$

Vamos agora estabelecer o conceito básico no estudo das proporções. Dizemos que duas grandezas são **diretamente propocionais** quando a razão entre os valores da primeira grandeza e os valores correspondentes da segunda grandeza são iguais.

Mais precisamente, sejam G_1 e G_2 duas sequências de medidas dadas por

$$\begin{array}{lcl} G_1 & : & a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots \\ G_2 & : & b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots. \end{array}$$

Se

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \cdots = \frac{a_n}{b_n} = k$$

dizemos que as duas grandezas G_1 e G_2 são diretamente proporcionais.

Assim, no exemplo 1), a grandeza quantidade de gasolina e preço são grandezas diretamente proporcionais, pois dois valores quaisquer correspondentes dessas grandezas possuem a mesma razão, igual (nesse caso) a $\frac{2}{5}$.

No exemplo 2), a grandeza dias de trabalho e o comprimento do muro são grandezas diretamente proporcionais, pois dois valores quaisquer correspondentes dessas grandezas possuem a mesma razão, igual (nesse caso) $\frac{1}{3}$.

Chamamos de **proporção** a igualdade entre duas razões.

Em uma proporção

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

a e d são denominamos extremos, b e c denominados meios.

Lemos a proporção $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ da seguinte forma: a está para b, assim como c está para d.

A propriedade fundamental das proporções nos permite resolver muitos problemas. Ela afirma que se temos $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ então, necessariamente tem-se que $ad = bc$.

Em palavras temos o seguinte:

Propriedade 1.1 (Propriedade Fundamental) *Em uma proporção, o produto dos meios é igual ao produto dos extremos. Isto é,*

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc.$$

Para obter este resultado basta multiplicar ambos os lados da igualdade $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ pelo termo bd. O que resultada em

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{abd}{b} = \frac{cbd}{d} \Rightarrow ad = bc.$$

Segue dessa propriedade, que se conhecermos três números de uma proporção, então o quarto é facilmente calculado. Vem dessa propriedade o nome **Regra de Três**.

Tomemos o seguinte exemplo:

$$\frac{4}{3} = \frac{8}{x}.$$

Utilizando a Propriedade Fundamental, temos que

$$\frac{4}{3} = \frac{8}{x} \Leftrightarrow 4x = 8 \times 3 \Leftrightarrow x = \frac{24}{4} \Leftrightarrow x = 6.$$

2. Exemplos: grandezas diretamente proporcionais

Já temos todos os elementos necessários para resolver problemas simples envolvendo grandezas diretamente proporcionais.

Primeiro exemplo: Se o litro da gasolina custa R$2,50, então quanto custam doze litros?

Vamos denominar por x o preço de 12 litros de gasolina. Assim, temos os seguintes dados:

Qtdade de gasolina	Preço a ser pago
1	2,50
12	x

Primeiro note que as grandezas envolvidas são diretamente proporcionais. Como há igualdade entre a razão entre os preços de gasolina e a razão entre os valores correspondentes a serem pagos, temos a seguinte proporção

$$\frac{1}{2,5} = \frac{12}{x}.$$

Resolvendo essa proporção, obtemos a equação $x = 12 \times 2,5 = 30,0$. Assim, por 12 litros de gasolina deve ser pago R$30,00.

Segundo exemplo: Se um operário em um dia de trabalho constrói um muro de 3 metros de comprimento, então (nas mesmas condições) em quanto tempo ele construirá um muro de 24 metros?

Vamos denominar por x o tempo que o operário leva para construir um muro de 24 metros. Temos a seguinte tabela:

Dias de trabalho	**comprimento do muro**
1	3
x	24

Primeiro note que as grandezas envolvidas são diretamente proporcionais. Como há igualdade entre a razão entre os dias gastos na construção e os valores correspondentes aos comprimentos, temos a seguinte proporção

$$\frac{1}{3} = \frac{x}{24}.$$

Resolvendo essa proporção, obtemos a equação $3x = 24$ e portanto $x = 8$. Assim, em 8 dias de trabalho, o operário constrói um muro de 24 metros.

Terceiro exemplo: Três amigos, João, Pedro e Miguel montaram um oficina mecânica. João entrou com R$15.000,00, Pedro com R$ 30.000,00 e Miguel com R$ 45.000,00 na sociedade. Depois de seis meses obtiveram R$ 60.000,00 de lucro. O lucro deve ser dividido, entre eles, proporcionalmente ao valor investido. Quanto cada um deve receber?

Vamos denotar por x, a parte do lucro recebida por João; y a parte do lucro recebida por Pedro e por z a parte do lucro recebida por Miguel. Assim, tem-se $x + y + z = 60.000$. Como a divisão deve ser proporcional ao capital investido, temos

$$\frac{x}{15.000} = \frac{y}{30.000} = \frac{z}{45.000} = k,$$

onde k é o valor comum das razões. Segue que $x = 15.000k$, $y = 30.000k$ e $z = 45.000k$. Assim, como $x + y + z = 60.000$ podemos escrever

$$\begin{aligned} 15.000k + 30.000k + 45.000k &= 60.000 \\ 90.000k &= 60.000 \\ k &= \frac{60.000}{90.000} \\ k &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Logo, para João temos $\frac{x}{15.000} = \frac{2}{3}$ e portanto, pela regra de três, $x = R\$10.000,00$. Para Pedro, temos $\frac{y}{30.000} = \frac{2}{3}$ e assim, pela regra de três, temos $y = R\$20.000$. Para Miguel, temos $\frac{z}{45.000} = \frac{2}{3}$. Donde $z = R\$30.000,00$

3. Propriedades

Já vimos a propriedade fundamental das proporções e com ela fomos capazes de resolver alguns problemas. Vamos ver outras propriedades que se ajudarão e resolver problemas mais facilmente.

Propriedade 3.1 (Segunda Propriedade) *Em toda proporção* $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ *tem-se*

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Uma relação similar vale para o caso $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$.

De fato, tem-se:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} \Leftrightarrow \frac{a+c+e}{b+d+f} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}.$$

Primeiramente vamos provar que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b}$.

De $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ temos que $ad = bc$. Somando ab a ambos os lados, obtemos $ad + ab = bc + ab$. Reorganizando, tem-se $(a+c)b = (b+d)a$. O que resulta em

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b}.$$

Do mesmo modo, demonstra-se a segunda parte: $\frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d}$. De $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ temos que $ad = bc$. Somando dc a ambos os lados, obtemos $ad + dc = dc + bc$. Reorganizando, tem-se $(a+c)d = (b+d)c$. O que resulta em

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d}.$$

Note que a propriedade acima fornece no primeiro caso

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} \\ \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d} \end{aligned}$$

e no segundo caso

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{a+c+e}{b+d+f} = \frac{a}{b} \\ \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{a+c+e}{b+d+f} = \frac{c}{d} \\ \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{a+c+e}{b+d+f} = \frac{e}{f}. \end{aligned}$$

Exemplo 3.1

Podemos utilizar a segunda propriedade para resolver de modo mais simples o problema dos três amigos sócios na oficina mecânica.

Vimos que
$$\frac{x}{15.000} = \frac{y}{30.000} = \frac{z}{45.000} = k.$$
Utilizando a segunda propriedade temos que
$$\frac{x+y+z}{15.000+30.000+45.000} = \frac{x}{15.000} = \frac{y}{30.000} = \frac{z}{45.000}.$$
Como $x+y+z = 60.000$, segue que
$$\frac{60.000}{90.000} = \frac{x}{15.000} = \frac{y}{30.000} = \frac{z}{45.000}.$$
De onde segue, após simplificação e utilizando regra de três seguidamente, que:
$$\begin{aligned} \frac{2}{3} &= \frac{x}{15.000} \Rightarrow x = 10.000 \\ \frac{2}{3} &= \frac{y}{30.000} \Rightarrow y = 20.000 \\ \frac{2}{3} &= \frac{z}{45.000} \Rightarrow z = 30.000. \end{aligned}$$

Podemos resumir a técnica empregada no exemplo acima em um teorema que facilita muito a divisão em partes diretamente proporcionais.

Teorema 3.2 *Sejam dados $N > 0$ e números não nulos a, b e c. Os números x, y e z que dividem N em partes diretamente proporcionais a, respectivamente, a, b e c são dados por:*
$$\begin{aligned} x &= \frac{Na}{a+b+c} \\ y &= \frac{Nb}{a+b+c} \\ z &= \frac{Nc}{a+b+c}. \end{aligned}$$

A demonstração deste teorema segue diretamente da segunda propriedade.

4. Grandezas Inversamente Proporcionais

Assim como as grandezas diretamente proporcionais, as grandezas inversamente proporcionais também aparecem em nosso cotidiano. Vejamos alguns exemplos:

1. Com velocidade de 100 km/h um trem bala percorre uma determinada distância em 3 horas. Aumentando a velocidade para 150km/h ele percorrerá a mesma distância em 2 horas.

   Note, pela tabela, que aumentando a velocidade do trem, diminuímos o tempo de viagem.

Velocidade (km/h)	**Tempo (h)**
100	3
150	2
200	3/2
400	3/4

Vemos que dobrando a velocidade, percorremos o mesmo percurso na metade do tempo. Aqui as grandezas comparadas foram velocidade e tempo. Note que a razão entre dois valores de velocidade e a razão entre seus respectivos tempos **não** é a mesma. Vejamos, tomemos os seguintes valores,

Velocidade (km/h)	**Tempo (h)**
100	3
200	$\frac{3}{2}$

Mas observe que tomando a razão de uma grandeza com os inversos da outra grandeza,

$$\frac{100}{\frac{1}{3}} = 300 \text{ e } \frac{200}{\frac{2}{3}} = 300.$$

temos igualdade. Logo, temos a proporção

$$\frac{100}{\frac{1}{3}} = \frac{200}{\frac{2}{3}} = 300.$$

2. Dois operários realizam uma tarefa em 6 dias. Em quanto tempo 4 operários realizam juntos o mesmo serviço?

   Note, pela tabela, que ao aumentarmos o número de trabalhadores o tempo necessário para realizar a tarefa diminui.

Número de operários	**Tempo (h)**
2	6
4	3
8	1,5

Note que a razão entre duas quantidades de dias de trabalho e a razão entre os respectivos tempo de trabalho não é a mesma. Vejamos, tomemos as seguintes quantidades

Número de operários	**Tempo (h)**
2	6
4	3

Calculando as razões, temos que

$$\frac{2}{6} = \frac{1}{3} \text{ e } \frac{4}{3} = \frac{4}{3},$$

são diferentes.

Observe que tomando os inversos (de uma grandeza ou de outra), temos

$$\frac{2}{\frac{1}{6}} = 2 \times \frac{6}{1} = 12 \text{ e } \frac{4}{\frac{1}{3}} = 4 \times \frac{3}{1} = 12.$$

Logo, temos a proporção

$$\frac{2}{\frac{1}{6}} = \frac{4}{\frac{1}{3}}.$$

Estes dois exemplos ilustram grandezas inversamente proporcionais.

Dizemos que duas grandezas são **inversamente propocionais** quando a razão entre dois valores quaisquer da primeira grandeza e os inversos correspondentes da segunda grandeza são iguais.

Mais precisamente, sejam G_1 e G_2 duas sequências de medidas dadas por

$$\begin{aligned} G_1 &: a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots \\ G_2 &: b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots. \end{aligned}$$

Se

$$\frac{a_1}{\frac{1}{b_1}} = \frac{a_2}{\frac{1}{b_2}} = \frac{a_3}{\frac{1}{b_3}} = \cdots = \frac{a_n}{\frac{1}{b_n}} = k$$

dizemos que as duas grandezas G_1 e G_2 são **inversamente propocionais**

Nos dois exemplos apresentados acima, as grandezas são inversamente proporcionais.

Note que

$$\frac{a_1}{\frac{1}{b_1}} = \frac{a_2}{\frac{1}{b_2}} \Leftrightarrow a_1 b_1 = a_2 b_2,$$

que na prática agiliza os cálculos.

5. Exemplos: grandezas inversamente proporcionais

Já temos todos os elementos necessários para resolver problemas simples envolvendo grandezas inversamente proporcionais.

Primeiro exemplo: Com velocidade de 100 km/h um trem de alta velocidade percorre uma determinada distância em 3 horas. Aumentando a velocidade para 150km/h, em quanto tempo ele percorrerá a mesma distância?

Vamos denominar por x o tempo necessário para fazer o trajeto com velocidade de 150km/h.

Velocidade (km/h)	Tempo (h)
100	3
150	x

Como há igualdade entre o inverso da razão entre as velociades e os valores correspondentes ao tempo, temos a seguinte proporção

$$\frac{100}{\frac{1}{3}} = \frac{150}{\frac{1}{x}}.$$

Resolvendo essa proporção, obtemos a equação $150x = 300$. Assim, $x = 2$. Logo, aumentado a velocidade, o tempo gasto diminuirá para duas horas.

Na prática, escreve-se diretamente o produto $150x = 100 \times 3$, o que resulta $x = 2$.

Segundo exemplo: Dois operários realizam um tarefa em 6 dias. Em quanto tempo 4 operários juntos realizam o mesmo serviço?

Vamos denominar por x o tempo que 4 operários levam para realizar a obra.

Número de operários	Tempo
2	6
4	x

Como as grandezas são inversamente proporcionais, temos a seguinte proporção:

$$\frac{2}{\frac{1}{6}} = \frac{4}{\frac{1}{x}}.$$

Resolvendo essa equação, temos $4x = 12$ e, portanto, $x = 3$. Assim, em 3 dias de trabalho, 4 operários realizam o tabalho.

Na prática, escreve-se diretamente o produto $4x = 12$, o que resulta $x = 3$.

Terceiro exemplo: Um pai deixou 104 mil reais de herança para os seus três filhos. Esse total deve ser dividido em partes inversamente proporcionais às suas idades. André o mais novo tem 2 anos, César o do meio tem 3 anos e Rodrigo o mais velho tem 4 anos. Quanto cada um receberá?

Vamos denotar por x, a parte recebida por André; y a parte recebida por César e por z a parte recebida por Rodrigo. Assim, tem-se $x + y + z = 104.000,00$. Como a divisão deve ser inversamente proporcional às idades, temos

$$\frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{y}{\frac{1}{3}} = \frac{z}{\frac{1}{4}} = k,$$

onde k é o valor comum das razões. Segue de

$$\frac{x}{\frac{1}{2}} = k, \quad \frac{y}{\frac{1}{3}} = k, \quad \frac{z}{\frac{1}{4}} = k$$

que

$$x = \frac{k}{2}, \ y = \frac{k}{3}, \ \ z = \frac{k}{4}.$$

Assim, como $x + y + z = 104.000$ podemos escrever

$$\begin{aligned}
\frac{k}{2} + \frac{k}{3} + \frac{k}{4} &= 104.000 \\
\frac{6k + 4k + 3k}{12} &= 104.000 \\
\frac{13k}{12} &= 104.000 \\
k &= \frac{104.000 \times 12}{13} \\
k &= 96.000
\end{aligned}$$

Logo, para João temos $x = \dfrac{96.000}{2} = 48.000,00$. Para Pedro, temos $y = \dfrac{96.000}{3} = 32.000,00$. Para Miguel, temos $z = \dfrac{96.000}{4} = 24.000,00$.

Assim, temos que João receberá R$48.000,00, Pedro receberá R$32.000,00 e Miguel R$24.000,00

Apresentamos agora a segunda propriedade adaptada para o caso de grandezas inversamente proporcionais.

Propriedade 5.1 (Segunda Propriedade–grandezas inversamente proporcionais) *Em toda proporção* $\dfrac{a}{\frac{1}{b}} = \dfrac{c}{\frac{1}{d}}$ *tem-se*

$$\frac{a}{\frac{1}{b}} = \frac{c}{\frac{1}{d}} \Leftrightarrow \frac{a + c}{\frac{1}{b} + \frac{1}{d}} = \frac{a}{\frac{1}{b}} = \frac{c}{\frac{1}{d}}.$$

Uma relação similar vale para o caso $\dfrac{a}{\frac{1}{b}} = \dfrac{c}{\frac{1}{d}} = \dfrac{e}{\frac{1}{f}}$:

$$\frac{a}{\frac{1}{b}} = \frac{c}{\frac{1}{d}} = \frac{e}{\frac{1}{f}} \Leftrightarrow \frac{a + c + e}{\frac{1}{b} + \frac{1}{d} + \frac{1}{f}} = \frac{a}{\frac{1}{b}} = \frac{c}{\frac{1}{d}} = \frac{e}{\frac{1}{f}}.$$

O exemplo acima pode ser facilmente resolvido utilizando esta propriedade. De fato, como a partilha deve ser inversamente proporcional às idades, temos

$$\frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{y}{\frac{1}{3}} = \frac{z}{\frac{1}{4}},$$

e usando a segunda propriedade podemos escrever:

$$\frac{x + y + z}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}} = \frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{y}{\frac{1}{3}} = \frac{z}{\frac{1}{4}}.$$

De onde segue que:

$$\frac{x + y + z}{\frac{13}{12}} = 2x = 3y = 4z.$$

Logo,

$$\frac{104.000}{\frac{13}{12}} = 2x = 3y = 4z.$$

Resolvendo cada uma das equações:

$$\begin{aligned}
\frac{104.000}{\frac{13}{12}} = 2x \quad &\Rightarrow \quad x = 48.000 \\
\frac{104.000}{\frac{13}{12}} = 3y \quad &\Rightarrow \quad y = 32.000 \\
\frac{104.000}{\frac{13}{12}} = 4z \quad &\Rightarrow \quad z = 24.000.
\end{aligned}$$

Podemos resumir a técnica empregada no exemplo acima em um teorema que facilita muito a divisão em partes inversamente proporcionais.

Teorema 5.1 *Sejam dados $N > 0$ e números não nulos a, b e c. Os números x, y e z que dividem N em partes inversamente proporcionais a, respectivamente, a, b e c são dados por:*

$$\begin{aligned}
x &= \frac{Nbc}{ab + ac + bc} \\
y &= \frac{Nac}{ab + ac + bc} \\
z &= \frac{Nab}{ab + ac + bc}.
\end{aligned}$$

A demonstração deste resultado segue diretamente da terceira propriedade.

6. Proporcionalidade composta

Já definimos quando duas grandezas são **diretamente propocionais**. Do mesmo modo, podemos definir grandezas diretamente proporcionais para três ou mais grandezas .

Mais precisamente, sejam G_1, G_2 e G_3 três sequências de medidas dadas por

$$\begin{aligned}
G_1 &: a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots \\
G_2 &: b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots \\
G_3 &: c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n, \ldots.
\end{aligned}$$

Dizemos que G_1 é diretamente proporcional a G_2 e a G_3 de forma composta se

$$\frac{a_1}{b_1c_1} = \frac{a_2}{b_2c_2} = \frac{a_3}{b_3c_3} = \cdots = \frac{a_n}{b_nc_n} = k.$$

Dizemos que G_1 é inversamente proporcional a G_2 e a G_3 de forma composta se

$$\frac{a_1}{\frac{1}{b_1c_1}} = \frac{a_2}{\frac{1}{b_2c_2}} = \frac{a_3}{\frac{1}{b_3c_3}} = \cdots = \frac{a_n}{\frac{1}{b_nc_n}} = k.$$

Dizemos que G_1 é diretamente proporcional a G_2 e inversamente proporcional a G_3 de forma composta se

$$\frac{a_1}{b_1 \times \frac{1}{c_1}} = \frac{a_2}{b_2 \times \frac{1}{c_2}} = \frac{a_3}{b_2 \times \frac{1}{c_3}} = \cdots = \frac{a_n}{b_n \times \frac{1}{c_n}} = k.$$

Vejamos alguns exemplos aplicando esses conceitos.

7. Exemplos: Regra de três composta

1. Dois clubes e futebol decidem construir um estádio ao custo de R$100.000.000,00 (cem milhões). O critério de investimento para cada clube foi que a divisão seria diretamente proporcional à quantidade de torcedores de cada clube e inversamente proporcional à distância de suas sedes até o estádio. Com os dados da tabela abaixo, determine o quanto cada clube de investir.

Clube	Torcedores	Distância
A	150.000	30 km
B	220.000	15 km

   Vamos denotar por x a quantia a ser investida pelo clube A e por y a quantia investida pelo clube B. É claro que $x + y = 100$ milhões. Como as quantias x e y são diretamente proporcionais ao número de torcedores e inversamente proporcionais às distâncias, temos que

$$\frac{x}{150.000 \times \frac{1}{30}} = \frac{y}{220.000 \times \frac{1}{15}}.$$

   Simplificando, temos a proporção

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{4}.$$

   De onde segue, pela segunda propriedade, que

$$\frac{x+y}{1+4} = \frac{x}{1} = \frac{y}{4}.$$

   Logo,

$$\frac{100}{5} = \frac{x}{1} = \frac{y}{4},$$

   e, portanto, $x = 20$ milhões e $y = 80$ milhões.

2. Um trabalhador trabalha duas horas diárias para montar 18 componentes eletrônicos. Com o aumento da demanda, a fábrica contrata mais dois funcionários que trabalharão com o primeiro trabalhador por 8 horas diárias. Quantos componentes eles produzirão por dia?

Trabalhadores	Horas	Componentes
1	2	18
3	8	x

Como as grandezas número de trabalhadores e horas são diretamente proporcionais à quantidade de componentes, temos que:

$$\frac{18}{x} = \frac{1}{3} \times \frac{2}{8} \Rightarrow x = 216 \text{ componentes} .$$

3. Duas bombas escoam 2100 litros de água em três horas. Em quanto tempo 5 bombas do mesmo tipo escoariam 7000 litros?

Bombas	Volume (litros)	Tempo
2	2100	3
5	7000	x

A grandeza quantidade de bombas e o tempo são grandezas inversamente proporcionais. Já a grandeza volume e o tempo são grandezas diretamente proporcionais.

Logo, podemos escrever

$$\frac{3}{x} = \frac{5}{2} \times \frac{2100}{7000} \Rightarrow x = 4.$$

4. Com 10 funcionários uma indústria produz 2000 peças trabalhando 8 horas por dia durante 5 dias. O número de funcionários para que a empresa produza 6000 peças em 15 dias, trabalhando apenas 4 horas por dia, será de:

Note que:

A grandeza número de funcionários é diretamente proporcional à grandeza número de peças.

A grandeza número de funcionários é inversamente proporcional à grandeza horas trabalhadas.

A grandeza número de funcionários é inversamente proporcional à grandeza dias trabalhados.

Trabalhadores	Peças	horas/dia	dias
10	2000	8	5
x	6000	4	15

$$\frac{10}{x} = \frac{2000}{6000} \times \frac{4}{8} \times \frac{15}{5} \Rightarrow x = 20.$$

8. Usando Maple

Podemos utilizar um software de matemática simbolica para programar a divisão em partes diretamente e inversamente proporcionais apresentadas pelo teoremas.. Veja o exemplo em Maple.

```
Diretopro := (N, a, b, c) -> (N*a/(a+b+c), N*b/(a+b+c), N*c/(a+b+c));
Inverpro := (N, a, b, c) -> (N*b*c/(a*b+a*c+b*c), N*a*c/(a*b+a*c+b*c),
                            N*a*b/(a*b+a*c+b*c));
```

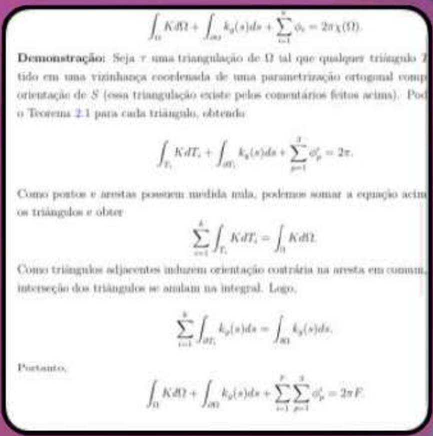
Referências

1. ANDRADE, D. *Geometria Analítica*. 2. ed. Florianópolis: UFSC, 2010.
2. GARCIA, N.M. *Matemática Comercial e Financeira*. 1a. ed. EDUEM: UEM, 2011.
3. www.dma.uem.br/kit/arquivos/arquivos_pdf/regradetres.pdf.

UEM Universidade Estadual de Maringá

Cálculo Diferencial e Integral:

um kit de sobrevivência



$$\int_{\Omega} K d\Omega + \int_{\partial\Omega} k_g(s)ds + \sum_{i=1}^{k} \phi_i = 2\pi\chi(\Omega).$$

Demonstração: Seja τ uma triangulação de Ω tal que qualquer triângulo T
tido em uma vizinhança coordenada de uma parametrização ortogonal comp
orientação de S (essa triangulação existe pelos comentários feitos acima). Pod
o Teorema 2.1 para cada triângulo, obtendo

$$\int_{T_i} K dT_i + \int_{\partial T_i} k_g(s)ds + \sum_{p=1}^{3} \phi_p^i = 2\pi.$$

Como pontos e arestas possuem medida nula, podemos somar a equação acim
os triângulos e obter

$$\sum_{i=1}^{k} \int_{T_i} K dT_i = \int_{\Omega} K d\Omega.$$

Como triângulos adjacentes induzem orientação contrária na aresta em comum,
interseção dos triângulos se anulam na integral. Logo,

$$\sum_{i=1}^{k} \int_{\partial T_i} k_g(s)ds = \int_{\partial\Omega} k_g(s)ds.$$

Portanto,

$$\int_{\Omega} K d\Omega + \int_{\partial\Omega} k_g(s)ds + \sum_{i=1}^{F}\sum_{p=1}^{3} \phi_p^i = 2\pi F.$$

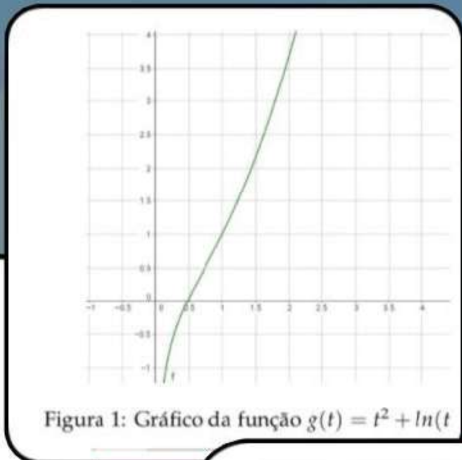
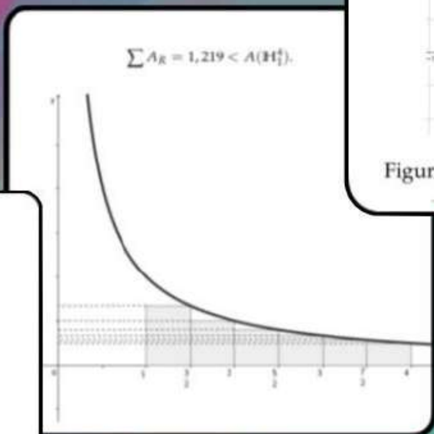
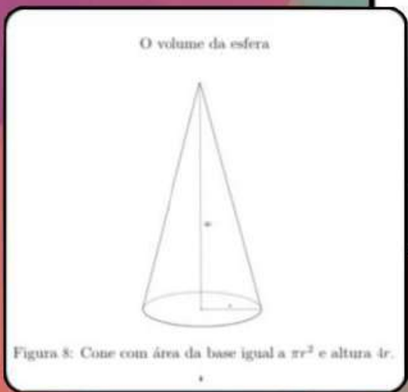


Figura 1: Gráfico da função $g(t) = t^2 + ln(t$

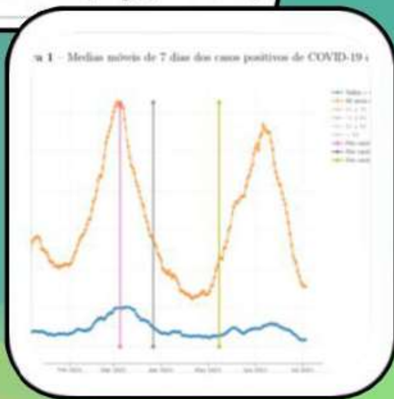


$\sum A_R = 1,219 < A(\mathbb{H}_1^4)$.



O volume da esfera

Figura 8: Cone com área da base igual a πr^2 e altura $4r$.



Esta revista é responsável pela formulação de textos autorais desenvolvido pelo projeto de extensão "Kit". Neste projeto, contamos com alunos graduandos e demais interessados em matemática aplicada.
Entre seus textos, podemos encontrar, curiosidades, resoluções, demonstrações , fatos relevantes , ideais para IC, entre outros!