

JEEPEMA

Jornal eletrônico de Ensino e Pesquisa de matemática

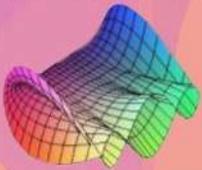
Cálculo

Diferencial

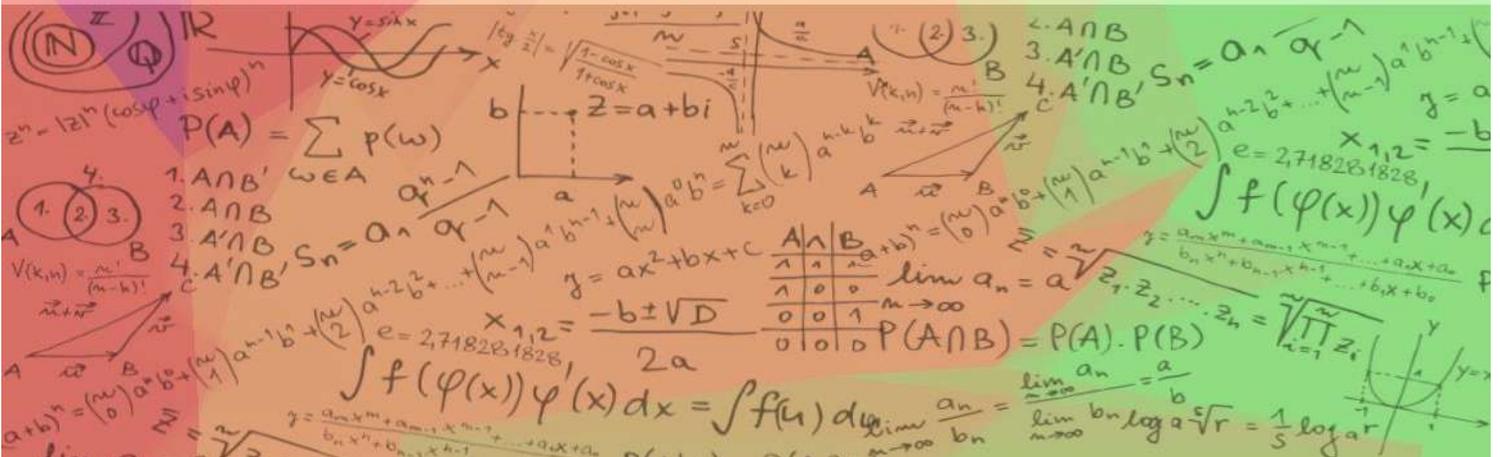
INTEGRAL

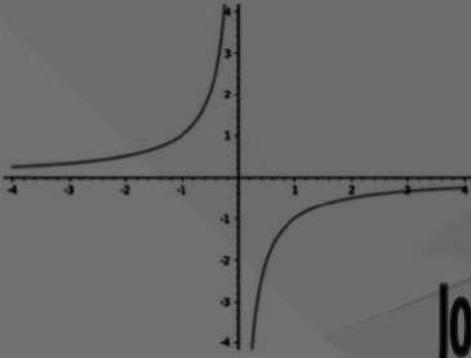


Exercícios • Apostilas • Resoluções • Vídeos Aulas •



um kit de sobrevivência!





JEEPEMA

Jornal eletrônico de Ensino e Pesquisa de matemática

Cálculo

Diferencial

Integral:



Exercícios • Apostilas • Resoluções • Vídeos Aulas •



um kit de sobrevivência!

$(\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R})$
 $z^n = |z|^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$
 $P(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega)$
 $z = a + bi$
 $g = ax^2 + bx + c$
 $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{5} \log_a r$
 $\int f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = \int f(u) du$
 $\int f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = \int f(u) du$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{5} \log_a r$

Aline E. de Medeiros	- editora assistente
Laerte Bemm	- editor assistente (DMA - UEM)
Doherty Andrade	- editor assistente
Rodrigo Martins	- editor chefe (DMA - UEM)
Rafaela Mayumi da S. Fuzioka	- identidade visual
Isadora Honório Guimarães	- identidade visual

Jornal Eletrônico de Ensino de Matemática - JEEPEMA
Universidade Estadual de Maringá, Maringá-PR - Brasil
ISSN: 2594-6323
DOI: 10.4025/jeepeema

Vol. 3 N° 1 / 41 páginas - Junho/2019

Palavras-chave: Teorema de Cramer, Propriedade de Determinantes e Matrizes, Solução de EDOs, Coeficientes Constantes, Métodos Numéricos, Método da Bisseção, Cordas, Secante e Método Newton-Raphson.



Índice

Volume 3 - N° 1

1

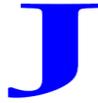
**Regra de Cramer: por que funciona?:
Doherty Andrade (FEITEP).**

2

**Variação dos Parâmetros para EDOs de
segunda ordem: Doherty Andrade
(FEITEP).**

3

**Métodos Numéricos Básicos para a
Solução de Equações Não Lineares:
Pedro Gabriel Papa Torelli (DMA - UEM).**



Regra de Cramer: por que funciona?

Doherty Andrade¹

RESUMO: Neste trabalho apresentamos uma demonstração bastante elementar o teorema de Cramer. A demonstração utiliza apenas propriedades dos determinantes e matrizes.

Sumário

1	Introdução	1
2	Regra de Cramer	1
3	Conclusão	4

1. Introdução

A regra de Cramer é um dos métodos diretos de resolução de sistemas de equações lineares mais conhecidos. Embora, bastante restritivo na sua aplicação (exige matriz quadrada com determinante não nulo), desempenha um papel importante dentro dessa teoria. Neste trabalho apresentamos uma demonstração bastante elementar o teorema de Cramer. A demonstração utiliza apenas propriedades dos determinantes e matrizes. A regra de Cramer é devido a Gabriel Cramer (1704 –1752) que publicou este resultado em 1750. Veja [4].

2. Regra de Cramer

Consideremos o sistema de equações lineares $Ax = b$. Suponha que A seja uma matriz $n \times n$ invertível (portanto, $\det(A) \neq 0$) e $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ são elementos do \mathbb{R}^n . A regra de Cramer apresenta a solução do sistema por

$$x_i = \frac{\det(M_i)}{\det(A)}, i = 1, 2, \dots, n$$

¹ FEITEP – Email: doherty200@hotmail.com

onde M_i é a matriz obtida de A pela substituição da i -ésima coluna pelo vetor coluna b .

Vamos demonstrar este resultado. Como $\det(A) \neq 0$, $Ax = b$ tem uma única solução que é $x = A^{-1}b$. Seria suficiente obter A^{-1} utilizando o método de eliminação de Gauss e em seguida obter a solução x . Mas Cramer foi além disso, utilizou propriedades de determinantes e matrizes para obter a solução.

Vamos iniciar a nossa demonstração estabelecendo alguma notação. Vamos denotar por a_i a i -ésima coluna de A , $i = 1, 2, \dots, n$. Por e_i vamos denotar o i -ésimo vetor da base canônica, ou equivalentemente, a i -ésima coluna da matriz identidade I_n . Seja X_i a matriz obtida de I_n pela substituição da i -ésima coluna pelo vetor coluna x .

Sabemos que no produto de matrizes, a k -ésima coluna de AB é o exatamente o produto de A pela k -ésima coluna de B . Note também que $Ae_k = a_k$ para $k = 1, \dots, n$, a k -ésima coluna de A .

Assim, por multiplicação, temos que:

$$\begin{aligned} AX_i &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & x_1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & x_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_i & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_n & \cdots & 1 \end{bmatrix} \\ &= [Ae_1, \dots, Ae_{i-1}, Ax, Ae_{i+1}, \dots, Ae_n] \\ &= [a_1, \dots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \dots, a_n] \\ &= M_i. \end{aligned}$$

Isto prova que $AX_i = M_i$.

Como X_i é a matriz I_n com a i -ésima coluna substituída por x , calculando o determinante de X_i por cofatores, temos:

$$\det(X_i) = (-1)^{(i+i)} x_i \det(I_{n-1}) = 1 \cdot x_i \cdot 1 = x_i.$$

Logo,

$$\det(M_i) = \det(AX_i) = \det(A) \det(X_i) = \det(A) x_i.$$

Segue que

$$x_i = \frac{\det(M_i)}{\det(A)}, i = 1, 2, \dots, n.$$

Pode ser interessante, veja [1], reescrever a demonstração de outro modo. Com a notação estabelecida anteriormente, temos:

$$\begin{aligned} \det(M_k) &= \det[a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, b, a_{k+1}, \dots, a_n] \\ &= \det[a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, Ax, a_{k+1}, \dots, a_n] \\ &= \det[a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n, a_{k+1}, \dots, a_n] \\ &= \det[a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, x_1 a_1, a_{k+1}, \dots, a_n] \\ &\quad + \det[a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, x_2 a_2, a_{k+1}, \dots, a_n] \\ &\quad + \dots + \det[a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, x_n a_n, a_{k+1}, \dots, a_n] \\ &= x_k \det[a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n] \\ &= x_k \det(A), \end{aligned}$$

pois cada termo $\det[a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, x_i a_i, a_{k+1}, \dots, a_n]$, com $i \neq k$ é nulo, uma vez que possuem duas colunas que diferem apenas pelo fator x_i . Logo,

$$x_k = \frac{\det(M_k)}{\det(A)}, k = 1, 2, \dots, n.$$

Exemplo 2.1

Consideremos o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 6 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$$

Colocando-o na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Primeiramente, vamos escrever as matrizes $M_i, i = 1, 2, 3$, onde cada coluna i de A é substituída por $b = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$:

$$M_1 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}, M_2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 6 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, M_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 6 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Calculando os determinantes:

$$\det(A) = 3, \det(M_1) = 9, \det(M_2) = 6, \det(M_3) = 15.$$

Segue que a solução é:

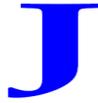
$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\det(M_1)}{\det(A)} = \frac{9}{3} = 3, \\ x_2 &= \frac{\det(M_2)}{\det(A)} = \frac{6}{3} = 2, \\ x_3 &= \frac{\det(M_3)}{\det(A)} = \frac{-15}{3} = -5. \end{aligned}$$

3. Conclusão

O Cálculo de determinantes pela definição, não é computacionalmente eficiente, pois exige muito tempo de máquina. Portanto, a utilização da regra de Cramer para resolver sistemas de equações lineares não é computacionalmente bom. É adequado apenas para sistemas de pequeno porte. Pode-se provar que o número de operações necessárias para resolver um sistema de n equações e n variáveis, pela regra de Cramer, é igual a $n(n+1)! - 1$. Ou seja, cresce muito rapidamente com n , veja [2]. Mas sua importância como ferramenta teórica da Matemática é inegável. É também um importante resultado que deve ser explorado no Ensino Fundamental e Médio.

Referências

1. ANDRADE, D. *Geometria Analítica*. 2. ed. Florianópolis: UFSC, 2010. 3
2. S. D. CONTE, *Elementary Numerical Analysis*. MacGraw-Hill, 1965. 4
3. CRAMER, Gabriel. *Introduction à l'Analyse des lignes Courbes algébriques*. Geneva: Europeana. pp. 656 -659.
4. BOYER, Carl B. *A History of Mathematics*. 2nd ed., 1968 . Wiley.



Varição dos Parâmetros para EDOs de segunda ordem

Doherty Andrade¹

RESUMO: Neste trabalho deduzimos a expressão geral para a solução de EDO's lineares de segunda ordem lineares não homogêneas a coeficientes constantes.

Sumário

1 O método de variação dos Parâmetros	5
2 Fórmula Fechada para a solução	9
3 Sugestão de atividade	11
4 Conclusão	12

1. O método de variação dos Parâmetros

Consideremos a EDO de segunda ordem não homogênea a coeficientes constantes

$$ay'' + by' + cy = G(x), \quad (1)$$

¹ Email: doherty200@hotmail.com

onde $a \neq 0, b, c$ são constantes reais e $G(x)$ é uma função contínua.

Vamos precisar ainda da equação homogênea associada:

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (2)$$

que desempenha um papel importante na obtenção da solução da equação (1).

Teorema 1.1 *Seja $y_p(x)$ uma solução particular da equação (1). Se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções linearmente independentes (LI) da EDO homogênea associada (2), então a solução geral da EDO (1) é dada por:*

$$y(x) = y_p(x) + C_1y_1(x) + C_2y_2(x),$$

onde C_1 e C_2 são constantes reais.

Portanto, para achar a solução geral da EDO não homogênea (1) precisamos de uma solução particular da não homogênea e de duas soluções LI da EDO homogênea associada (2).

Determinar a solução geral da EDO homogênea não é problema. A novidade é determinar a solução particular $y_p(x)$ da EDO não homogênea e é aqui que entra o método da variação dos parâmetros.

Suponha que, após resolver a equação homogênea

$$ay'' + by' + cy = 0, \quad (3)$$

obtivemos a sua solução geral como

$$y_c(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x), \quad (4)$$

onde $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções linearmente independentes. Vamos substituir as constantes c_1 e c_2 (ou parâmetros) da (4) pelas

funções arbitrárias e $u(x)$ e $v(x)$. Assim, procuramos uma solução particular da EDO não homogênea

$$ay'' + by' + cy = G(x) \quad (5)$$

da seguinte forma

$$y_p(x) = u(x)y_1(x) + v(x)y_2(x). \quad (6)$$

Esse método é chamado de método da variação dos parâmetros.

Como y_p deve ser solução da EDO (5), derivando y_p obtemos

$$y'_p(x) = u'(x)y_1(x) + u(x)y'_1(x) + v'(x)y_2(x) + v(x)y'_2(x). \quad (7)$$

Vamos supor que

$$u'y_1 + v'y_2 = 0. \quad (8)$$

Assim, $y''_p(x)$ fica mais simples:

$$y''_p = u'y'_1 + uy''_1 + v'y'_2 + vy''_2. \quad (9)$$

Substituindo em (5) e reorganizando, obtemos

$$u(ay''_1 + by'_1 + cy_1) + v(ay''_2 + by'_2 + cy_2) + a(u'y'_1 + v'y'_2) = G(x). \quad (10)$$

Como y_1 e y_2 são soluções da EDO homogênea os dois primeiros termos do lado esquerdo da equação acima se anulam, segue que

$$a(u'y'_1 + v'y'_2) = G(x). \quad (11)$$

Assim, devemos determinar duas funções $u(x)$ e $v(x)$ que satisfaçam às condições (8)-(11):

$$\begin{cases} u'y_1 + v'y_2 = 0 \\ a(u'y'_1 + v'y'_2) = G. \end{cases} \quad (12)$$

Ou equivalentemente,

$$\begin{cases} y_1 u' + y_2 v' = 0 \\ y_1' u' + y_2' v' = \frac{G}{a}. \end{cases} \quad (13)$$

O sistema (13) é um sistema de incógnitas u' e v' . Após obtermos u' e v' , usamos integração para obter u e v , e, assim a solução particular $y_p(x)$ é obtida.

Exemplo 1.2

Determinar a solução geral da EDO $y'' + y = \sin(x)$.

A EDO homogênea tem equação auxiliar igual a $r^2 + 1 = 0$, cujas soluções são $r_1 = i$ e $r_2 = -i$. Segue que a solução geral da EDO homogênea é

$$y_c(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x),$$

onde c_1 e c_2 são constantes.

Usando o método da variação dos parâmetros, devemos procurar uma solução particular da EDO não homogênea da forma

$$y_p(x) = u(x) \cos(x) + v(x) \sin(x).$$

Usando o sistema 12, de incógnitas u' e v' , obtemos que

$$u' \cos(x) + v' \sin(x) = 0 \quad (14)$$

$$-u' \sin(x) + v' \cos(x) = \sin(x) \quad (15)$$

Resolvendo o sistema, obtemos

$$\begin{aligned} u' &= -\frac{1}{2} + \frac{\cos(2x)}{2} \\ \Rightarrow u(x) &= -\frac{1}{2}x + \frac{\sin(2x)}{4} \\ v' &= \sin(x) \cos(x) \\ \Rightarrow v(x) &= \frac{\sin^2(x)}{2}. \end{aligned}$$

Logo, a solução particular $y_p(x)$ é:

$$y_p(x) = \left(-\frac{1}{2}x + \frac{\sin(2x)}{4}\right) \cos(x) + \frac{\sin^2(x)}{2} \sin(x).$$

Usando identidades trigonométricas para simplificar, podemos reescrever

$$y_p(x) = \frac{1}{2} \sin(x) - \frac{1}{2}x \cos(x).$$

Segue que a solução geral da EDO não homogênea é:

$$y(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x) + \frac{1}{2} \sin(x) - \frac{1}{2}x \cos(x) + c.$$

2. Fórmula Fechada para a solução

Podemos determinar as soluções do sistema dado em 13 e obter uma fórmula fechada para a solução da EDO não homogênea. É o que vamos fazer a partir daqui. O sistema pode ser reescrito como,

$$\begin{cases} u'y_1 + v'y_2 = 0 \\ u'y'_1 + v'y'_2 = \frac{G}{a}. \end{cases} \quad (16)$$

pode ser resolvido, usando a regra de Cramer.

Seja W o determinante principal do sistema, aqui denominado de Wronskiano,

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} = y_1 y'_2 - y'_1 y_2 \neq 0,$$

pois as funções y_1 e y_2 são linearmente independentes.

Pela regra de Cramer, obtemos que

$$u' = \frac{\Delta_{u'}}{W} = \frac{-Gy_2}{aW} \Rightarrow u(x) = - \int \frac{Gy_2}{aW} dx$$

$$v' = \frac{\Delta_{v'}}{W} = \frac{Gy_1}{aW} \Rightarrow v(x) = \int \frac{Gy_1}{aW} dx$$

Segue que $y_p(x)$ pode ser escrita como:

$$y_p(x) = -y_1(x) \int \frac{Gy_2}{aW} dx + y_2(x) \int \frac{Gy_1}{aW} dx + c. \quad (17)$$

Vamos usar a fórmula (17) em um exemplo.

Exemplo 2.1

Determinar a solução particular da EDO $y'' + y = \tan(x)$.

Aqui a EDO homogênea tem solução geral $y_c(x) = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)$. Assim, devemos procurar solução particular $y_p(x)$ da forma

$$\begin{aligned} y_p(x) &= u(x)y_1(x) + v(x)y_2(x) \\ \Rightarrow y_p(x) &= u(x) \cos(x) + v(x) \sin(x). \end{aligned}$$

Como $a = 1$, $W = 1$ e $G(x) = \tan(x)$, temos da fórmula (17) que

$$\begin{aligned}
y_p(x) &= -y_1(x) \int \frac{Gy_2}{aW} dx + y_2(x) \int \frac{Gy_1}{aW} dx \\
&= -\cos(x) \int \frac{\tan(x) \sin(x)}{1} dx + \sin(x) \int \frac{\tan(x) \cos(x)}{1} dx \\
&= -\cos(x) \int \frac{\sin^2(x)}{\cos(x)} dx + \sin(x) \int \sin(x) dx \\
&= -\cos(x) \int \frac{1 - \cos^2(x)}{\cos(x)} dx - \sin(x) \cos(x) + c \\
&= -\cos(x) \int \left(\frac{1}{\cos(x)} - \cos(x) \right) dx - \sin(x) \cos(x) + c \\
&= -\cos(x) \ln |\sec(x) + \tan(x)| \\
&+ \cos(x) \sin(x) - \sin(x) \cos(x) + c \\
&= -\cos(x) \ln |\sec(x) + \tan(x)| + c.
\end{aligned}$$

Como $a \neq 0$, dividindo a EDO por a , podemos supor que $a = 1$. Além disso, b e c podem ser funções contínuas quaisquer.

O método pode ser estendido analogamente para EDO's de ordem maior do que 2, neste caso o cálculo do determinante deve ser considerado como uma dificuldade.

3. Sugestão de atividade

Uma boa atividade é utilizar o software Maple, ou outro equivalente, para automatizar a resposta apresentada pelo método. Embora já exista esta solução pronta no software, é sempre instrutivo para o aluno refazer os passos do método computacionalmente. Veja um exemplo do Maple para obter uma solução particular da EDO de segunda ordem $y'' + y = \sin(t)$.

Notemos que $y_1(t) = \cos(t)$ e $y_2 = \sin(t)$ são soluções imediatas da EDO homogênea associada. Assim, podemos buscar por

uma solução particular utilizando o método da variação dos parâmetros. Veja a seguir os comandos Maple na worksheet.

```

> restart : with(linalg) :
> eq := diff(y(t), t$2) + y(t) = sin(t);
> simplify(eq);
> y[1] := t -> cos(t);
  y[2] := t -> sin(t); a := 1;
  G := t -> sin(t);
  W := t -> det(wronskian([y[1](t), y[2](t)], t));
  simplify(W(t));
> u(t) = -int( (G(t)·y[2](t) / (a·W(t))), t );
> v(t) = int( (G(t)·y[1](t) / (a·W(t))), t );
> -y[1](t)·int( (G(t)·y[2](t) / (a·W(t))), t ) + y[2](t)·int( (G(t)·y[1](t) / (a·W(t))), t ) + c;
> solparticular = simplify(%);
>

```

Figura 1: comandos Maple para o exemplo

Assim, após executar os comando, obtemos que a solução particular é $y_p(t) = -\frac{t}{2} \cos(t) + c$. Segue que a solução geral é:

$$y(t) = c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t) - \frac{1t}{2} \cos(t) + c.$$

4. Conclusão

Deve-se sugerir aos estudantes a adoção e utilização de um software de matemática simbólica, isto trará mais autonomia e reforço no seu aprendizado. Existem atualmente vários softwares

de computação algébrica gratuitos como, por exemplo, SciLab e SymPy do Python.

Referências

1. E. KREYSZIG, H. Kreyszig, and E. Norminton. *Advanced Engineering Mathematics*. Wiley, Hoboken, NJ, Tenth edition, (2011)
2. ANDRADE, D. *Geometria Analítica*. 2. ed. Florianópolis: UFSC, 2010.
3. BOYER, Carl B. *A History of Mathematics*. 2nd ed., 1968 . Wiley.



Métodos Numéricos básicos para a solução de equações não lineares

Pedro Gabriel Papa Torelli¹

RESUMO: Neste trabalho fazemos uma revisão dos principais métodos numéricos para o cálculo de soluções aproximadas de equações não lineares. Os métodos da bissecção, das cordas, secante e o método de Newton-Raphson são abordados. Algumas aplicações são sugeridas e os resultados são comparados.

Sumário

1 Solução de equações não lineares	14
2 Condições de existência de solução	15
3 Método da Bissecção	16
4 Método das Cordas	18
5 Método de Newton-Raphson	21
6 Aplicações	25

1. Solução de equações não lineares

Vejam um simples problema: Imagine que um grupo de amigos se cotizaram para arrecadar R\$ 1050,00, o custo de uma festa de confraternização. Todos deveriam contribuir igualmente. Perto do dia da realização da confraternização, porém, cinco pessoas desistiram de participar da festa e a parte de cada um do grupo sofreu um aumento de R\$ 17,50. Quantas pessoas tem o grupo de amigos? Trata-se de um problema muito simples, comumente considerado no ensino fundamental, usado como aplicação da teoria sobre equações do segundo grau. De fato, se x representa o número de pessoas do grupo, então, inicialmente, o valor que cada um pagaria pela festa seria $\frac{1050}{x}$. Com a desistência de 5 pessoas, o novo valor a ser pago por cada integrante do grupo passou para $\frac{1050}{x-5}$. A diferença entre os dois valores é de R\$ 17,50, então, temos a equação

$$\frac{1050}{x} - \frac{1050}{x-5} = 17,50$$

ou seja,

$$x^2 - 5x - 300 = 0. \quad (1)$$

¹ Mestrando em Matemática pela Universidade Estadual de Maringá. Email: pgptorelli@gmail.com

A solução do problema passa então pela obtenção da raiz positiva da equação (1), que neste caso, sendo uma equação quadrática com discriminante positivo $\Delta = 1225$, sabemos que existem raízes reais dadas por $x_1 = 20$ e $x_2 = -15$. Portanto, o grupo de amigos era composto por 20 pessoas.

Situações como descrevemos acima, ou seja, problemas reais cuja solução equivale a investigar se uma dada equação possui raiz e, no caso afirmativo, calcular seu valor são muito comuns na Matemática e nas ciências como Engenharias, Física, Química, Biologia entre outras. É importante notar que na imensa maioria dos casos a modelagem dos problemas nos remete a uma equação do tipo

$$f(x) = 0, \quad (2)$$

para a qual não conhecemos métodos ou fórmulas diretas para o cálculo das raízes. Muitas vezes se quer sabemos da existência de raízes. Este é o assunto deste artigo, isto é, a problemática consiste em dada uma função real $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, encontrar os zeros, ou seja, resolver a equação (2).

Em verdade, dada a equação (2), surgem naturalmente três questões básicas:

1. Existe raiz para a equação? (Existência)
2. Se existe raiz, ela é única? (Unicidade)
3. É possível calcular o valor da raiz? (Cálculo).

Neste artigo vamos discutir estas questões, inicialmente fazendo considerações sobre a existência de raízes e posteriormente apresentando resultados sobre a unicidade e métodos iterativos que nos permitem calcular valores aproximados para as raízes. Os três métodos de aproximação aqui discutidos podem ser encontrados em [2], [5] e [9]. A base em Análise Real aqui presente é provinda de [1], [3], [6], [7], [8] e, principalmente, [4].

2. Condições de existência de solução

É possível estabelecer condições suficientes para a existência de raízes para a equação (2). O resultado principal nesta direção é conhecido como Teorema do Valor Intermediário, que a grosso modo, afirma que uma função contínua deve assumir todos os valores intermediários à quaisquer dois valores assumidos.

Denotamos por $\mathcal{C}([a, b])$ o espaço vetorial das funções reais definidas e contínuas no intervalo fechado e limitado $[a, b] \subset \mathbb{R}$, isto é,

$$\mathcal{C}([a, b]) = \{f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ é contínua em } [a, b]\}.$$

Teorema 2.1 (Teorema do Valor Intermediário) *Sejam $f \in \mathcal{C}([a, b])$ e $k \in \mathbb{R}$ tal que $f(a) < k < f(b)$ (ou $f(b) < k < f(a)$). Então existe ao menos um $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = k$.*

Uma demonstração utilizando o teorema dos intervalos encaixados pode ser encontrada em www.dma.uem.br/kit/teoremadovalorintermediario.html.

Como corolário deste teorema decorre um importante resultado sobre a existência de raiz para a equação (2). Dada sua importância para nosso trabalho, vamos destacá-lo também como um teorema. Para tal, iremos introduzir mais uma notação. Dada uma função real $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida num intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$, denotamos por $\mathcal{Z}(f; (a, b))$ o conjunto dos zeros de f em (a, b) , ou seja, o conjunto das raízes da equação (2), localizadas no interior do intervalo $[a, b]$:

$$\mathcal{Z}(f; (a, b)) = \{c \in (a, b) \text{ tal que } f(c) = 0\}.$$

Também, para cada intervalo fechado e limitado $[a, b] \subset \mathbb{R}$, denotamos por $\mathcal{A}([a, b])$ o conjunto de todas as funções reais, definidas e contínuas no intervalo $[a, b]$ que possuem sinais opostos nos extremos do intervalo $[a, b]$, isto é:

$$\mathcal{A}([a, b]) = \{f \in \mathcal{C}([a, b]); f(a) \cdot f(b) < 0\}.$$

Observe que, para toda $f \in \mathcal{A}([a, b])$ temos uma das possibilidades: $f(a) < 0 < f(b)$ ou $f(b) < 0 < f(a)$. Agora estamos aptos para introduzir o resultado principal desta seção, dado pelo teorema abaixo.

Teorema 2.2 (Existência de solução) *Se $f \in \mathcal{A}([a, b])$ então $\mathcal{Z}(f; (a, b)) \neq \emptyset$.*

Note que a classe $\mathcal{A}([a, b])$ é uma classe admissível para existência de raiz. Questões sobre unicidade e cálculo de raízes persistem e serão tratadas nas próximas seções.

3. Método da Bissecção

É possível demonstrar o Teorema 2.2 por meio de uma abordagem direta e construtiva que fornece um algoritmo para se chegar à uma raiz da equação (2). Este método é o resultado da bissecção sucessiva de intervalos e por isso, o chamamos de Método da Bissecção.

Teorema 3.1 (Método da Bissecção) *Se $f \in \mathcal{A}([a, b])$, então $\mathcal{Z}(f; (a, b)) \neq \emptyset$. Além disso, é possível determinar um algoritmo, por meio de sucessivas bissecções do intervalo $[a, b]$, que encontra uma raiz exata da equação (2) ou gera uma sequência de pontos $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$, que converge para algum $c \in \mathcal{Z}(f; (a, b))$ e satisfaz a seguinte estimativa de erro:*

$$|p_n - c| \leq \frac{(b - a)}{2^n}, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

Demonstração: Como $f \in \mathcal{A}([a, b])$, temos que $f(a)$ e $f(b)$ têm sinais opostos. Para fixar ideias suponhamos que

$$f(a) < 0 < f(b).$$

É claro que para a outra possibilidade ($f(b) < 0 < f(a)$) a demonstração é análoga.

Iniciamos o algoritmo denotando $I_1 = [a_1, b_1]$, onde $a_1 = a$ e $b_1 = b$. Assim, temos que

$$|I_1| = b - a \text{ e } f(a_1) < 0 < f(b_1).$$

Agora, dividimos o intervalo I_1 ao meio, denotamos o ponto médio por $p_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$ e calculamos $f(p_1)$. Se $f(p_1) = 0$, então $p_1 \in \mathcal{Z}(f; (a, b))$ é uma raiz exata da equação (2) e o algoritmo acaba. Caso contrário, isto é, se $f(p_1) \neq 0$, então denotamos $I_2 = [a_2, b_2]$, onde

$$\begin{cases} a_2 = a_1 \text{ e } b_2 = p_1, & \text{se } f(p_1) > 0 \\ a_2 = p_1 \text{ e } b_2 = b_1, & \text{se } f(p_1) < 0. \end{cases}$$

Observe que em qualquer uma das possibilidades acima temos que

$$I_2 \subset I_1, |I_2| = \frac{b-a}{2} \text{ e } f(a_2) < 0 < f(b_2).$$

Obtido o intervalo I_2 , o dividimos ao meio através de seu ponto médio $p_2 = \frac{a_2+b_2}{2}$ e calculamos $f(p_2)$. Se $f(p_2) = 0$, então $p_2 \in \mathcal{Z}(f; (a, b))$ e nada mais há para ser feito. Por outro lado, se $f(p_2) \neq 0$, então denotamos por $I_3 = [a_3, b_3]$, onde

$$\begin{cases} a_3 = a_2 \text{ e } b_3 = p_2, & \text{se } f(p_2) > 0 \\ a_3 = p_2 \text{ e } b_3 = b_2, & \text{se } f(p_2) < 0. \end{cases}$$

Em qualquer caso, temos que

$$I_3 \subset I_2, |I_3| = \frac{b-a}{2^2} \text{ e } f(a_3) < 0 < f(b_3).$$

Continuamos o processo de bissecção de modo indutivo. Isto é, uma vez obtidos n intervalos por meio de sucessivas bissecções, dividimos o intervalo I_n ao meio, denotamos o ponto médio por $p_n = \frac{a_n+b_n}{2}$ e calculamos $f(p_n)$. Se $f(p_n) = 0$ então $p_n \in \mathcal{Z}(f; (a, b))$ e nada mais deve ser feito. Mas se $f(p_n) \neq 0$, então denotamos $I_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}]$, onde

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n \text{ e } b_{n+1} = p_n, & \text{se } f(p_n) > 0 \\ a_{n+1} = p_n \text{ e } b_{n+1} = b_n, & \text{se } f(p_n) < 0. \end{cases}$$

Da mesma forma, em qualquer caso, temos que

$$I_{n+1} \subset I_n, |I_{n+1}| = \frac{b-a}{2^n} \text{ e } f(a_{n+1}) < 0 < f(b_{n+1}).$$

Logo, para o algoritmo definido temos um número finito de etapas, quando para algum $n \in \mathbb{N}$ tem-se que $p_n \in \mathcal{Z}(f; (a, b))$, ou temos uma sequência infinita de pontos $(p_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset (a, b)$. Vamos mostrar que, neste caso, a sequência $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para um elemento $c \in \mathcal{Z}(f; (a, b))$. De fato, pela construção temos que $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de intervalos encaixantes tal que $|I_n| \rightarrow 0$. Logo, pelo Teorema dos Intervalos Encaixantes (pode ser visto em [4]), vemos que existe um único número real c que pertence a todos os intervalos I_n , isto é:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{c\} \text{ e } \lim(a_n) = c = \lim(b_n).$$

Pela continuidade de f devemos ter que

$$\lim(f(a_n)) = f(c) = \lim(f(b_n)).$$

Como $f(a_n) < 0 < f(b_n), \forall n \in \mathbb{N}$, concluímos que

$$f(c) = \lim(f(a_n)) \leq 0 \text{ e } f(c) = \lim(f(b_n)) \geq 0,$$

de onde resulta que $f(c) = 0$, isto é, $c \in \mathcal{Z}(f; (a, b))$.

Por fim, note também que $a_n < p_n < b_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Então, tomando o limite e considerando o Teorema do Confronto (consta em [4]), obtemos que $\lim p_n = c$. A estimativa de erro (3) é consequência direta do fato de que $c, p_n \in I_n = [a_n, b_n]$, e isto completa a demonstração. \square

Veja a demonstração do teorema dos intervalos encaixados em www.dma.uem.br/kit/intervalosencaixados.html.

O Método da Bissecção e a teoremaa de existência nada garantem sobre a unicidade, ou seja, sabemos que existe pelo menos uma raiz no intervalo (a, b) e o método da bissecção encontra uma raiz exata ou determina uma sequência $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que converge para uma raiz.

4. Método das Cordas

Da mesma forma que na seção anterior, onde apresentamos o método da bissecção, admitimos que f está nas condições do Teorema de Existência de Raiz, isto é, $f \in \mathcal{A}([a, b])$. Agora vamos introduzir um novo método onde impomos condições adicionais para a função f , precisamente que o gráfico de f seja suave e não muda de concavidade, as quais vão garantir, além da existência, a unicidade da raiz no intervalo $[a, b]$. O método é chamado Método das cordas e está baseado na aproximação da raiz da equação (2) por meio da secante (segmentos de retas) que ligam dois pontos do gráfico de f . Intuitivamente, as aproximações da raiz c de f são construídas da seguinte forma: Consideramos a corda ligando os pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ e denotamos por p_1 a intersecção desta corda com o eixo x . Na sequência tomamos o intervalo $[a, p_1]$ ou $[p_1, b]$, de modo que os valores de f nos extremos tenham sinais opostos, e construímos uma nova corda, cuja intersecção com o eixo x nos dá a aproximação p_2 . Procedemos com este raciocínio e obtemos uma sequência $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que converge para a raiz c .

Antes de formalizarmos o método, observamos que se $f \in \mathcal{A}([a, b])$ é suficientemente suave, digamos f é duas vezes derivável em $[a, b]$ e

$$f''(x) = 0, \forall x \in [a, b], \quad (4)$$

então f é uma função afim, do tipo $f(x) = \alpha x + \beta$, cujo gráfico coincide com a corda (segmento de reta) que liga os pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$. Analiticamente,

$$f(x) = f(a) + \left[\frac{f(b)f(a)}{b-a} \right] (x-a)$$

e sua única raiz em (a, b) é o ponto c dado por

$$c = a - \frac{f(a)(b-a)}{f(b) - f(a)}.$$

Portanto, supondo (4), a equação (2) é uma equação do primeiro grau e o problema se mostra trivial. Então é razoável supor que f'' não seja identicamente nula em $[a, b]$, isto é, não satisfaz (4). Denotamos $f''0$ em $[a, b]$, para indicar que f'' não é identicamente nula em $[a, b]$.

Teorema 4.1 (Método das Cordas) *Se $f \in \mathcal{A}([a, b])$ é duas vezes derivável em $[a, b]$, $f''0$ em $[a, b]$ e f'' não muda de sinal em $[a, b]$, então $\mathcal{Z}(f; (a, b)) = \{c\}$. Além disso, a sequência $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida por recorrência por*

$$\begin{cases} p_1 = a - \frac{f(a)(b-a)}{f(b)-f(a)} \\ p_{n+1} = p_n - \frac{f(p_n)(p_n-u)}{f(p_n)-f(u)}, \quad \text{para } n \geq 1, \end{cases} \quad (5)$$

onde

$$u = \begin{cases} a, & \text{se } f'' \text{ assume o sinal de } f(a) \text{ em algum ponto de } [a, b] \\ b, & \text{se } f'' \text{ assume o sinal de } f(b) \text{ em algum ponto de } [a, b], \end{cases}$$

converge para a única raiz c da equação (2).

Demonstração: Para demonstrarmos a primeira parte do teorema, ou seja, a afirmação de que $\mathcal{Z}(f; (a, b)) = \{c\}$, basta provar a unicidade pois a existência de raiz já está garantida pelo Teorema 2. Logo, suponhamos, por absurdo, que existam $c_1, c_2 \in (a, b)$ tais que $f(c_1) = f(c_2) = 0$ e $c_1 \neq c_2$, digamos, $c_1 < c_2$. Como $f \in \mathcal{A}([a, b])$ para fixar o raciocínio, admitamos que

$$f(a) < 0 < f(b). \quad (6)$$

O outro caso ($f(b) < 0 < f(a)$) pode ser considerado de modo análogo. Também para fixar as ideias, como f'' não é identicamente nula em $[a, b]$ e não muda de sinal, suponhamos que

$$f''(x) \leq 0, \forall x \in [a, b] \text{ e } f''(x_0) < 0, \text{ para algum } x_0 \in [a, b]. \quad (7)$$

Aqui, também observamos que para a outra possibilidade (f'' não identicamente nula assumindo o sinal positivo) a demonstração é análoga. Feitas as suposições necessárias, pelo Teorema de Rolle (veja em [4]), concluímos que existe $\theta \in (c_1, c_2)$ tal que $f(\theta) = 0$. Das hipóteses sobre f e por (7) concluímos que o gráfico de f é côncavo para baixo em (a, b) e portanto, θ é um ponto de máximo local de f . Deste fato e levando em conta que o gráfico de f não troca de concavidade (é sempre côncavo para baixo), concluímos que f é crescente em (a, θ) e decrescente em (θ, b) . Logo, $f(a) < 0$ e $f(b) < 0$, o que é um absurdo, pois contradiz (6). Assim, está provada a unicidade da raiz para a equação (2), ou seja, existe um único ponto $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

Antes de passarmos à demonstração da segunda parte do teorema observamos que:

$$\text{se } f(a) < 0 < f(b), \text{ então } \begin{cases} f(x) < 0, \forall x \in [a, c] \\ f(x) > 0, \forall x \in (c, b], \end{cases}$$

e por outro lado,

$$\text{se } f(b) < 0 < f(a), \text{ então } \begin{cases} f(x) > 0, \forall x \in [a, c] \\ f(x) < 0, \forall x \in (c, b]. \end{cases}$$

Agora, vamos provar a segunda parte do teorema, isto é, mostrar que $p_n \rightarrow c$ quando $n \rightarrow \infty$. De início vamos verificar que $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente, provando, com isto que ela é uma sequência monótona e limitada.

Novamente, antes de iniciar a argumentação é necessário fixar o cenário, e suponhamos então que

$$f(a) < 0 < f(b), \quad (8)$$

como sempre, o outro caso pode ser tratado com um raciocínio parecido. Denotamos por $g_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ a função cujo gráfico é a reta que liga os pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$, isto é,

$$g_1(x) = f(a) + \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right] (x - a).$$

Um cálculo simples mostra que p_1 definido em (5) é a única raiz de g_1 no intervalo (a, b) . Também decorre de (8) que a reta que liga os pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ tem inclinação positiva, ou seja, g_1 é uma função crescente.

Para continuar, suponhamos que f'' assuma o sinal positivo em algum ponto de (a, b) , e como sempre, o caso contrário tem demonstração análoga. Então o gráfico de f é côncavo para cima e portanto, devemos ter $f(x) < g_1(x)$ para todo $x \in (a, b)$. Logo, em particular,

$$0 = f(c) < g_1(c).$$

Como $g_1(p_1) = 0$, então $g_1(p_1) < g_1(c)$ e, conseqüentemente,

$$p_1 < c \text{ e } f(p_1) < 0.$$

Na situação fixada por nós, f'' assume o sinal de $f(b)$ (positivo), então

$$p_2 = p_1 - \frac{f(p_1)(p_1 - b)}{f(p_1) - f(b)}$$

é a única raiz da função $g_2 : [p_1, b] \rightarrow \mathbb{R}$ cujo gráfico é a reta que liga os pontos $(p_1, f(p_1))$ e $(b, f(b))$. Pelo mesmo raciocínio aplicado à função g_1 , logo acima, temos que $f(x) < g_2(x), \forall x \in (p_1, b)$ e, em particular, $0 = f(c) < g_2(c)$. Como $g_2(p_2) = 0$, então $g_2(p_2) < g_2(c)$ e, conseqüentemente,

$$p_1 < p_2 < c \text{ e } f(p_2) < 0.$$

Agora suponha que para $n \in \mathbb{N}$ tenhamos verificado que $p_1 < p_2 < p_3 < \dots < p_{n-1} < p_n < c$. Então, $f(p_n) < 0$ e

$$p_{n+1} = p_n - \frac{f(p_n)(p_n - b)}{f(p_n) - f(b)}$$

é a única raiz da função $g_{n+1} : [p_n, b] \rightarrow \mathbb{R}$ cujo gráfico é a reta que liga os pontos $(p_n, f(p_n))$ e $(b, f(b))$. Novamente usando que o gráfico de f é côncavo para cima, segue que $f(x) < g_{n+1}(x), \forall x \in [p_n, b]$. Em particular, $0 = f(c) < g_{n+1}(c)$, de onde vemos que

$$p_n < p_{n+1} < c.$$

Assim, por indução, $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é monótona crescente e limitada superiormente por c . Logo, $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente. Denotamos por um momento $p = \lim(p_n)$.

Tomando o limite em (5), obtemos

$$p = p - \frac{f(p)(p-b)}{f(p) - f(b)}$$

de onde resulta que

$$f(p)(p-b) = 0. \quad (9)$$

Desde que $p \leq c < b$, temos $(p-b) \neq 0$. Isto e (9) nos levam a concluir que

$$f(p) = 0.$$

Pela unicidade da raiz de f em (a, b) devemos ter que $p = c$ e isto completa a demonstração do teorema. \square

5. Método de Newton-Raphson

Nesta seção, novamente supomos que f esteja nas condições do teorema de existência de raiz para a equação (2), isto é, $f \in \mathcal{A}([a, b])$. O método de Newton-Raphson, também conhecido como método das tangentes, é um método baseado no conceito de derivada, precisamente usando uma interpretação geométrica da derivada, construímos uma sequência de pontos $(p_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset (a, b)$ que converge para a raiz c de f .

Dada $f \in \mathcal{A}([a, b])$ suponhamos adicionalmente que f é diferenciável em $[a, b]$ e $f'(x) \neq 0$, para todo $x \in (a, b)$. Nestas condições está garantida a existência e unicidade de raiz de f em (a, b) , isto é, existe um único ponto $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$. De fato, a existência é consequência do Teorema 2 e a unicidade pode ser vista supondo, por absurdo, que existam c_1 e c_2 em (a, b) tais que $f(c_1) = f(c_2) = 0$ e $c_1 \neq c_2$. Logo, pelo Teorema de Rolle, deveria existir θ entre c_1 e c_2 tal que $f'(\theta) = 0$, o que não pode ocorrer uma vez que, por hipótese, $f'(x) \neq 0$, para todo $x \in (a, b)$.

Escolhemos aleatoriamente $p_1 \in (a, b)$ e seja p_2 o ponto sobre o eixo x onde a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(p_1, f(p_1))$ corta o eixo x . Então

$$p_2 = p_1 - \frac{f(p_1)}{f'(p_1)}.$$

Supondo que $p_2 \in (a, b)$, na sequência, denotamos por p_3 o ponto sobre o eixo x onde a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(p_2, f(p_2))$ corta o eixo x . Isto é,

$$p_3 = p_2 - \frac{f(p_2)}{f'(p_2)}.$$

Supondo que sempre tenhamos $p_n \in (a, b)$ e prosseguindo desta forma, definimos por recorrência uma sequência de pontos $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ como segue:

$$\begin{cases} p_1 \in (a, b) \text{ fixado arbitrariamente,} \\ p_{n+1} = p_n - \frac{f(p_n)}{f'(p_n)}, \quad \text{para } n \geq 1. \end{cases} \quad (10)$$

Com hipóteses adicionais sobre a função f é possível mostrar que a sequência $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de pontos do intervalo (a, b) que converge para c , a única raiz de f em (a, b) .

Teorema 5.1 (Método de Newton-Raphson) *Seja $f \in \mathcal{A}([a, b])$ duas vezes derivável em $[a, b]$. Suponha que $0 < m = \min_{a \leq x \leq b} |f'(x)|$ e existe $M > 0$ tal que $|f''(x)| \leq M$, para todo $x \in [a, b]$. Então $\mathcal{Z}(f; (a, b)) = \{c\}$ e, além disso, se $p_1 \in V_\delta(c) = (c - \delta, c + \delta)$, onde*

$$\delta = \min \left\{ |c - a|, |c - b|, \frac{1}{K} \right\} \text{ e } K = \frac{M}{2m}, \quad (11)$$

temos que a sequência $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ está bem definida pela recorrência (10) e converge para c .

Demonstração: A primeira parte do teorema sobre a existência e unicidade da raiz c para f é consequência imediata do Teorema 2 e do Teorema de Rolle.

Para demonstrarmos a segunda parte do teorema, consideremos o seguinte lema:

Lema 5.2 *Se $\alpha \in (a, b)$ e β é dado por $\beta = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}$, então $|\beta - c| \leq K|\alpha - c|^2$.*

Demonstração: Se $\alpha = c$, então $\beta = c$ e o resultado está satisfeito ocorrendo a igualdade. Então suponhamos $\alpha \neq c$. Pelo Teorema de Taylor, sabemos que existe η entre α e c tal que

$$f(c) = f(\alpha) + f'(\alpha)(c - \alpha) + \frac{1}{2}f''(\eta)(c - \alpha)^2.$$

Desta igualdade e sabendo que $f(c) = 0$, segue que

$$-f(\alpha) = f'(\alpha)(c - \alpha) + \frac{1}{2}f''(\eta)(c - \alpha)^2. \quad (12)$$

Substituindo (12) na definição de β , concluímos que

$$\beta - c = \frac{1}{2} \frac{f''(\eta)}{f'(\alpha)} (c - \alpha)^2.$$

Ao tomarmos o módulo nesta igualdade e utilizarmos a limitação de f'' , obtemos

$$|\beta - c| \leq \frac{1}{2} \frac{M}{|f'(\alpha)|} (c - \alpha)^2 \leq \frac{M}{2m} (c - \alpha)^2 = K|\alpha - c|^2$$

e finalizamos a prova do lema. □

Agora retornamos à demonstração do teorema. É claro que a δ -vizinhança de c , isto é, o intervalo $V_\delta(c) = (c - \delta, c + \delta) \subset (a, b)$ é não nula. Seja $p_1 \in V_\delta(c)$ aleatoriamente fixado. Também tomando

$$p_2 = p_1 - \frac{f(p_1)}{f'(p_1)},$$

pelo Lema 1, obtemos

$$|p_2 - c| \leq K|p_1 - c|^2 < K\delta^2 \leq K\frac{1}{K}\delta = \delta,$$

ou seja, $p_2 \in V_\delta(c) \subset (a, b)$. Se para $n \geq 1$ tivermos $p_n \in V_\delta(c)$ e tomarmos $p_{n+1} = p_n - \frac{f(p_n)}{f'(p_n)}$, então pelo Lema 1, temos

$$|p_{n+1} - c| \leq K|p_n - c|^2 < K\delta^2 \leq \delta,$$

ou seja, $p_{n+1} \in V_\delta(c)$. Logo, por indução concluímos: sempre que $p_1 \in V_\delta(c)$ e $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ for definido pela recorrência (10), temos

$$p_n \in V_\delta(c) \text{ e } |p_{n+1} - c| \leq K|p_n - c|^2, \forall n \in \mathbb{N}. \quad (13)$$

Para finalizar, vamos mostrar que $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para c . De fato, usando (13), temos

$$\begin{aligned} |p_2 - c| &\leq K|p_1 - c|^2 = K|p_1 - c||p_1 - c| \leq K\delta|p_1 - c|; \\ |p_3 - c| &\leq K|p_2 - c|^2 = K|p_2 - c||p_2 - c| \leq K\delta K\delta|p_1 - c| = (K\delta)^2|p_1 - c|; \\ |p_4 - c| &\leq K|p_3 - c|^2 = K|p_3 - c||p_3 - c| \leq K\delta(K\delta)^2|p_1 - c| = (K\delta)^3|p_1 - c|. \end{aligned}$$

Logo, supondo que para $n \geq 2$ tenhamos $|p_n - c| < (K\delta)^{n-1}|p_1 - c|$, então

$$|p_{n+1} - c| \leq K|p_n - c|^2 \leq K|p_n - c||p_n - c| \leq K\delta(K\delta)^{n-1}|p_1 - c| = (K\delta)^n|p_1 - c|.$$

Portanto, por indução, provamos que

$$|p_{n+1} - c| < (K\delta)^n|p_1 - c|, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \quad (14)$$

Agora, de (11) temos que $\delta < \frac{1}{K}$, o que implica $(K\delta) < 1$. Logo,

$$\lim(K\delta)^n = 0. \quad (15)$$

Passando o limite em (14) e usando (15), obtemos $\lim p_n = c$ e isto completa a demonstração. \square

Observação 5.3

Na prática, quando o método de Newton-Raphson é programado para um computador e p_1 é escolhido de forma não cautelosa, ou quando o zero da função se encontra muito próximo a um dos extremos do intervalo considerado, o método de Newton-Raphson pode não convergir para o zero da função, podendo apresentar uma sequência de pontos que não converge (tende a mais ou menos infinito) ou uma sequência que oscila entre pontos e não converge para o valor da raiz. Em contrapartida, encontrar uma vizinhança $V_\delta(c)$ com δ satisfazendo a condição posta em (11) pode mostrar-se inviável, pois o extremo refinamento das informações pode resultar em um intervalo de comprimento muito pequeno quando comparado às intenções do problema no qual é desejado resolver, e assim, os extremos do intervalo encontrado já são aproximações satisfatórias para o zero da função.

De modo a exemplificar tais fatos vamos apresentar aqui tais situações para que na prática possamos ver que tomar pontos para iniciar o método de Newton-Raphson sem que este esteja incluso na vizinhança de raio expresso em (11) pode acarretar resultados indesejados.

Iremos, então, analisar a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 - 2x - 5$. Primeiramente, claro, devemos determinar um intervalo no qual seja garantida a existência de uma raiz para esta função. Deste pressuposto, ao analisarmos os pontos $x = -1$ e $x = 3$ notamos que estes são tais que $f(-1) = -4$ e $f(3) = 16$. Por este fato e notando que f é uma função polinomial, e portanto, contínua, temos que pelo Teorema do Valor Intermediário, o Teorema 1, f possui ao menos uma raiz no intervalo $[-1, 3]$.

Vamos aplicar o método de Newton-Raphson com a finalidade de encontrar a raiz da função f , porém, daremos um ponto inicial não escolhido devidamente. O ponto que iremos iniciar as iterações será $x = 0$ e a partir deste, na Tabela 1 podemos visualizar o comportamento das aproximações obtidas.

n	p_n	$f(p_n)$
1	0	-5
2	-2,5	-16,625
3	-1,5671641791	-5,7146324514
4	-0,5025924450	-4,1217695422
5	-3,8207064676	-53,1324879623
6	-2,5493933913	-16,4707576140
7	-1,6081114997	-5,9423896750
8	-0,5761004336	-4,0390020905
9	-4,5977095833	-92,9952575692
10	-3,0835431467	-28,1519768702

Tabela 1: Aproximação da raiz de f pelo Método de Newton-Raphson com p_1 desfavorável.

Ao analisar a tabela, podemos concluir que p_1 escolhido indevidamente acarretou em uma sequência de aproximações que não manifestam caráter de convergência.

Agora, tomemos para estudo a função $h : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(x) = \frac{30 \cdot \ln(x)}{2^x} +$
 1. Novamente aplicando a teoria de existência, notamos que se escolhermos os pontos

$x = 0,5$ e $x = 5$, teremos que $h(0,5) \approx -13,7038721520$ e $h(5) \approx 2,5088480429$, portanto, podemos afirmar que existe ao menos uma raiz da função h no intervalo $\left[\frac{1}{2}, 5\right]$, pois h é uma função contínua em $(0, \infty)$.

Deste modo, novamente aplicaremos o Método de Newton-Raphson partindo de uma primeira aproximação descuidadamente escolhida, a saber, $x = 2,5$. A Tabela 2 ilustra o comportamento neste caso.

n	p_n	$h(p_n)$
1	2,5	5,8593654253
2	7,1990139453	1,4030296152
3	12,7888324386	1,0108042853
4	154,0124851784	≈ 1
5	$\approx 2 \cdot 10^{44}$	≈ 1

Tabela 2: Aproximação da raiz de h pelo Método de Newton-Raphson com p_1 desfavorável.

Inegavelmente notamos da tabela 2 que o Método de Newton-Raphson resultou uma sequência de aproximações que tende a infinito, donde somos capazes de concluir que o ponto de início das iterações mal escolhido pode também acarretar uma sequência de pontos que tende a infinito, por exemplo.

6. Aplicações

Nesta seção consideramos dois problemas em que empregamos os métodos abordados acima e comparamos os resultados obtidos. Pretende-se, assim, explicitar a eficiência de um deles.

Problema 1: Estudos em microbiologia permitem obter informações a respeito de bactérias, como identificação, avaliação de seu crescimento, estimativas sobre contaminação, agentes patogênicos, entre outros. Um destes estudos está relacionado com a contaminação de alimentos ou amostras clínicas, sendo interessante determinar um tempo aproximado para se manusear um certo material sem que haja contaminação por bactérias. Para a abordagem deste problema, é necessário que tenhamos uma função que modela o crescimento populacional das bactérias consideradas.

Posto isso, inicialmente é feito um estudo acerca do crescimento populacional para uma bactéria específica, e para que seja possível coletar dados são feitas amostragens de modo a obter uma função que modele o crescimento populacional. Para este propósito são deixados ao ar livre recipientes, conhecidos como placas de Petri, inicialmente estéreis e munidos de um meio de cultura parcialmente próprio para a reprodução da bactéria em questão. Tais placas são então abertas e seladas uma a cada 30 minutos. Por meio desta metodologia estuda-se a bactéria em questão, de modo a investigar o biovolume presente em cada placa.

Suponhamos que após repetir este experimento para se ter dados próximos aos reais, a análise microbiológica muniu-se de uma tabela contendo dados do biovolume da bactéria em função do tempo e a partir de algum método de ajuste de curva, como o método dos mínimos quadrados ou aproximação por funções racionais ou polinômios

trigonométricos, foi possível modelar o biovolume em função do tempo pela função $g(t) = t^2 + \ln(t) - t + 1$. A Figura 1 apresenta um esboço do gráfico desta função obtido pelo programa Geogebra.

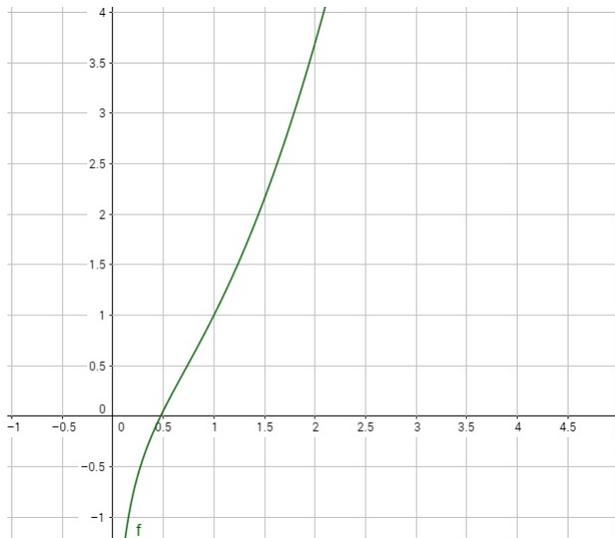


Figura 1: Gráfico da função $g(t) = t^2 + \ln(t) - t + 1$.

A partir disto, foi observado que a raiz desta função g representa o momento limite em que não haveria biovolume de bactérias na placa e que a partir deste instante começa uma contaminação. Ou seja, as bactérias somente começam a se instalar na placa após um instante k , raiz da função g . Logo, a função que realmente modela o crescimento populacional da bactéria é:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq k \\ t^2 + \ln(t) - t + 1 & \text{se } t > k. \end{cases}$$

Veja na Figura 2 um esboço do gráfico que relaciona o biovolume de bactérias, em mm^3/L , versus o tempo, em escala de 30 minutos.

Note que caso seja conhecido o valor de k , teremos o momento em que a bactéria se instala nas placas de Petri, o que pode ser útil para se estimar o tempo em que algum alimento ou material possa ser manuseado sem risco de contaminação pela bactéria. Assim, passamos agora para o problema puramente matemático, ou seja, resolver a equação

$$t^2 + \ln(t) - t + 1 = 0. \quad (16)$$

Denotando como antes,

$$g(t) = t^2 + \ln(t) - t + 1$$

vemos que g está bem definida para todo $t > 0$, ou seja, o domínio da função g é o intervalo $(0, \infty)$. Também temos que g é contínua em $(0, \infty)$ e portanto, fixados $0 < a < b < \infty$, teremos que $g \in \mathcal{C}([a, b])$. Para usarmos a teoria de existência e também os métodos iterativos anteriormente estudados é necessário encontrar um intervalo $[a, b] \subset (0, \infty)$ conveniente, que isole no seu interior a raiz da equação (16). Olhando as hipóteses dos teoremas estudados vemos que $[a, b] \subset (0, \infty)$ deve ser tal que

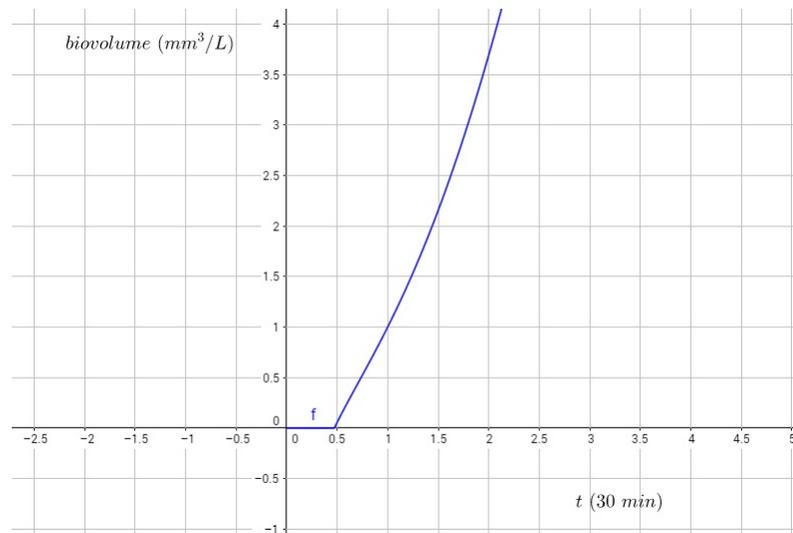


Figura 2: Gráfico da função f : tempo (t) vs biovolume de bactérias (*biovolume*).

- i) $g(a)$ e $g(b)$ tenham sinais opostos;
- ii) g' não se anule em $[a, b]$;
- iii) g'' não seja identicamente nula e não troque de sinal em $[a, b]$.

Um cálculo simples nos dá que

$$g'(t) = \frac{2t^2 - t + 1}{t} \quad \text{e} \quad g''(t) = \frac{2t^2 - 1}{t}, \quad t > 0.$$

Facilmente podemos estudar os sinais de g' e g'' , obtendo que g' é positiva para qualquer $t > 0$, $g''(t) < 0$ para $t \in \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $g''(t) > 0$ para $t \in \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$.

Como $g'(t) > 0$, não existem pontos críticos e g é uma função crescente em todo intervalo $(0, \infty)$. Olhando o sinal de g'' concluímos que o gráfico de g é côncavo para baixo no intervalo $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e côncavo para cima no intervalo $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$. No ponto $\frac{\sqrt{2}}{2}$ o gráfico troca de concavidade e em cada um dos intervalos $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$ vemos que g'' não muda de sinal e nunca se anula. Portanto já vemos que a escolha de um intervalo de isolamento da raiz em $[a, b]$ deve ser tal que

$$[a, b] \subset \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \text{ou} \quad [a, b] \subset \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$$

Por meio de uma calculadora vemos que

$$g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \approx 0,446319628 > 0$$

e como g é crescente, vemos que $g(x) > 0$, para todo $x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$. Isto descarta a possibilidade de se escolher $[a, b] \subset \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$.

Veamos também que de $\sqrt{2} < \sqrt{3}$, concluímos que

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} < \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$g\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{3} + 1 \approx 0,2066769198 > 0$$

e

$$g\left(\frac{1}{10}\right) = \left(\frac{1}{10}\right)^2 + \ln\left(\frac{1}{10}\right) - \frac{1}{10} + 1 \approx -1,392585093 < 0.$$

Logo uma possível escolha para o intervalo $[a, b]$, intervalo de isolamento da raiz, é o intervalo $\left[\frac{1}{10}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right] \subset \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Note que $g \in \mathcal{A}\left(\left[\frac{1}{10}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]\right)$, com $g\left(\frac{1}{10}\right) < 0 < g\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, é duas vezes derivável em $\left[\frac{1}{10}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$, $g'(t) \neq 0, \forall t \in \left[\frac{1}{10}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$, $g'' \neq 0$ em $\left[\frac{1}{10}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$ e g'' não muda de sinal em $\left[\frac{1}{10}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$ (em particular g'' é negativa no intervalo, mesmo sinal de $g\left(\frac{1}{10}\right)$). As limitações m e M , respectivamente, limitante inferior de $|g'|$ e limitante superior de $|g''|$ podem ser obtidas. De fato, como g'' é negativa no intervalo de isolamento, temos g' decrescente, sabemos também que g' é positiva, então

$$m = \min_{\frac{1}{10} \leq t \leq \frac{\sqrt{3}}{3}} |g'(t)| = g'\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \approx 1,8867513459. \quad (17)$$

Calculando temos que $g'''(t) = \frac{2}{t^3} > 0, \forall t \in \left[\frac{1}{10}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$. Logo, g'' é crescente e negativa no intervalo considerado e, consequentemente, $|g''|$ é decrescente e positiva. Portanto

$$M = \max_{\frac{1}{10} \leq t \leq \frac{\sqrt{3}}{3}} |g''(t)| = -g''\left(\frac{1}{10}\right) = 98. \quad (18)$$

De (17) e (18) temos que

$$1,8867513459 < |g'(t)| \quad \text{e} \quad |g''(t)| < 98, \quad \forall t \in \left[\frac{1}{10}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right].$$

Resumindo a argumentação acima, vimos que a função g no intervalo $\left[\frac{1}{10}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$ satisfaz as hipóteses dos Teoremas 3, 4 e 5. Portanto, existe uma única raiz da equação (16) no intervalo $\left[\frac{1}{10}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$. Vamos então aplicar os métodos aqui apresentados.

Como nosso intuito é aproximar a raiz de g , para termos um norteamto, suporemos que seja desejada uma estimativa tal que esta tenha erro menor que 10^{-4} .

Método da bissecção: No primeiro método, o da bissecção, temos que é possível ter um erro menor que 10^{-4} caso $|p_n - c| \leq \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{(b-a)}{2^n} < 10^{-4}$ e nesse caso específico, como estamos tomando o intervalo $\left[\frac{1}{10}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$, devemos ter $\frac{\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{10}}{2^n} < 10^{-4}$. Veja que $n = 13$ satisfaz a desigualdade anterior. Deste modo, vamos construir uma tabela com algumas informações sobre o processo de iteração, sendo estas os extremos de cada subintervalo, a aproximação, o valor de g nas aproximações e o erro máximo que pode ser obtido. Na Tabela 3, a coluna Erro máximo relativa à iteração i representa o valor máximo que $|p_n - c|$ pode apresentar em cada subintervalo I_i .

n	a_n	b_n	p_n	$g(p_n)$	Erro máximo
1	1/10	$1/\sqrt{3}$	0,3386751346	-0,3066882239	0,238675134
2	0,3386751346	$1/\sqrt{3}$	0,4580127019	-0,0290954287	0,119337567
3	0,4580127019	$1/\sqrt{3}$	0,5176814855	0,0919175163	0,059668783
4	0,4580127019	0,5176814855	0,4878470937	0,0323944384	0,029834391
5	0,4580127019	0,4878470937	0,4729298978	0,0019246814	0,014917195
6	0,4580127019	0,4729298978	0,4654712998	-0,0135126075	0,007458597
7	0,4654712998	0,4729298978	0,4692005988	-0,0057762828	0,003729298
8	0,4692005988	0,4729298978	0,4710652483	-0,0019214433	0,001864649
9	0,4710652483	0,4729298978	0,4719975731	0,0000027007	0,000932324
10	0,4710652483	0,47199757305	0,4715314106	-0,0009590999	0,0004661623
11	0,4715314106	0,47199757305	0,4717644918	-0,0004781319	0,0002330812
12	0,4717644918	0,47199757305	0,4718810324	-0,0002376987	0,0001165406
13	0,4718810324	0,47199757305	0,4719393027	-0,0001174948	0,000058270

Tabela 3: Aproximação da raiz de g pelo Método da Bissecção.

É importante ressaltar que o método da bissecção nos permite calcular o erro da aproximação obtida para a raiz da função.

Método da secante: Para o segundo método não há como estimar o erro facilmente como no método anterior, entretanto, na prática, é comum utilizar-se como critério de parada das iterações os valores de g nos pontos encontrados. Porém, como o método da bissecção nos permite calcular o erro da aproximação, utilizaremos como critério para parada das iterações a aproximação obtida na última iteração do método anterior, ou seja, nosso critério para o cessamento das iterações será uma iteração que se assemelhe a 0,4719393027, onde há a estimativa de que $|0,4719393027 - c| < 10^{-4}$.

Deste modo, na Tabela 4, estão explícitos os pontos encontrados após cada iteração e também, o valor da função g aplicada nesses pontos.

Método de Newton-Raphson: Para a utilização do terceiro método, é necessário determinar $V_\delta(c)$, onde δ é dado por (11). Da definição de δ temos que é necessário estimar $|c - a|$ e $|c - b|$ e calcular $\frac{1}{K}$. Como o ponto c é desconhecido, é impossível obter um número exato para $|c - a|$ e $|c - b|$, mas é possível que obtenhamos um valor que seja menor que estes dois para que possamos determinar uma vizinhança aceitável centrada no ponto c para assim admitirmos uma aproximação inicial p_1 e prosseguirmos com o método de Newton-Raphson.

n	p_n	$g(p_n)$
1	0,5156610080	0,0879395608
2	0,4909717560	0,0387128332
3	0,4803970015	0,0172418471
4	0,4757448369	0,0077146876
5	0,4736747416	0,0034586862
6	0,4727489815	0,0015518921
7	0,4723340537	0,0006966017
8	0,4721478971	0,0003123850
9	0,4720643411	0,0001404143
10	0,4720268297	0,0000630458
11	0,4720099878	0,0000283079
12	0,4720024259	0,0000127104
13	0,4719990306	0,0000057071

Tabela 4: Aproximação da raiz de g pelo Método das Cordas.

Note que se considerarmos os pontos $z = \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{20}\right)$ e $w = \left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{20}\right)$, temos que

$$g(z) = g\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{20}\right) = g\left(\frac{3}{20}\right) \approx -1,0246199848 < 0$$

e

$$g(w) = g\left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{20}\right) = g\left(\frac{20\sqrt{3} - 3}{60}\right) \approx 0,1108577334 > 0.$$

Note que estes cálculos foram realizados para mostrar que mesmo avançando $\frac{1}{20}$ de a e retornando $\frac{1}{20}$ de b , obtemos que a raiz c não se encontra nos intervalos $[a, z]$ e $[w, b]$. Portanto, podemos afirmar que

$$|c - a| > |z - a| = \frac{1}{20} \text{ e } |c - b| > |b - w| = \frac{1}{20}.$$

Ainda temos que

$$K \approx \frac{98}{2 \cdot 1,8867513459} \approx 25,9705658122 \Rightarrow \frac{1}{K} \approx 0,0385051295,$$

ou seja, a vizinhança $V_\delta(c)$ terá raio aproximadamente igual a $\delta = 0,0385051295$, o que mostra a inviabilidade, para os fins do problema inicial, de se aplicar o método de Newton-Raphson em um intervalo tão restrito. Mais ainda, o comprimento deste intervalo representa 2,31030777049 minutos, ou seja, em torno de 2 minutos e 18 segundos quanto ao tempo para contaminação. Assim, para um erro de 2 minutos, pode-se tornar inviável utilizar o método de Newton-Raphson nestas condições, pois é possível que para os fins do estudo qualquer ponto neste intervalo já dê uma aproximação satisfatória.

Porém para que seja possível visualizar o comportamento do método de Newton-Raphson ao ser posto em prática, será apresentada a Tabela 5, a seguir, que informa os pontos da sequência (p_n) encontrados pelas iterações e também o valor de f nestes.

Para a escolha da aproximação p_1 , podemos utilizar os métodos anteriores para determinarmos o intervalo a ser utilizado aqui, que pelo método das secantes, podemos aproximar por $(0,4719990306 - 0,0385051295, 0,4719990306 + 0,0385051295)$, ou seja, pelo intervalo $(0,4334939011, 0,5105041601)$.

Por estar neste intervalo, vamos considerar $p_1 = 0,434$ e aplicar o método de Newton-Raphson. As iterações são expressas na Tabela 5.

n	p_n	$g(p_n)$
1	0,434	-0,0803547449
2	0,4709932273	-0,0020701716
3	0,4719956544	-0,0000012568
4	0,4719962637	-0,0000000000000462

Tabela 5: Aproximação da raiz de g pelo Método de Newton-Raphson.

Note que para $n = 3$ já obteríamos o resultado desejado, porém, de modo a tornar mais clara a velocidade de convergência do método realizamos uma iteração adicional e notamos que o número de dígitos nulos após a vírgula na aproximação de $g(p_n)$ supera o número máximo de casas consideradas nas aproximações deste estudo, que seria de 10 casas decimais após a vírgula. Veja que neste método há uma convergência consideravelmente mais rápida para a raiz da equação quando comparamos aos métodos anteriores, porém, há um fator a ser considerado: foi necessário iniciar este método a partir de um ponto já muito próximo do zero da função.

Agora, voltando ao problema do estudo do biovolume de bactérias, podemos concluir que as aproximações foram:

- Método da Bissecção: 0,4719975731, ou seja, o tempo estimado para a contaminação seria de 14,159927193 min;
- Método das Cordas: 0,4719990306, ou seja, o tempo estimado para a contaminação seria de 14,195570918 min;
- Método de Newton-Raphson: 0,4719962637, ou seja, o tempo estimado para a contaminação seria de 14,159887911 min.

Em todas as aproximações acima, temos que o tempo procurado para se poder manusear o material sem ter a possível contaminação por uma bactéria específica é o de 14 minutos e 10 segundos.

É possível notar algumas particularidades neste exemplo quando analisamos a eficiência dos métodos. Claramente tivemos que o método das secantes se mostrou mais eficiente que o método da bissecção, e que ainda, o método de Newton-Raphson superou o da secante quando analisamos as tabelas. Porém, é necessário levar-se em conta que o método de Newton-Raphson exigiu um intervalo muito restrito para o início das iterações.

Problema 2: Neste item apresentamos um problema exclusivamente matemático, sem contextualizações. É desejada a aproximação da raiz da equação

$$x^3 + 2x + 2 = 0. \quad (19)$$

Se denotarmos por h a função dada por $h(x) = x^3 + 2x + 2$, vemos que esta é definida para todo $x \in \mathbb{R}$, e por se tratar de uma função polinomial, é de classe C^∞ , logo, os métodos estudados são todos aplicáveis.

Para a determinação de um intervalo que contenha a raiz da equação (19), novamente nos atentamos às hipóteses dos teoremas estudados e vemos que é necessário determinar $[a, b] \subset \mathbb{R}$ tal que

- i) $h(a)$ e $h(b)$ tenham sinais opostos;
- ii) h' não se anule em $[a, b]$;
- iii) h'' não seja identicamente nula e não troque de sinal em $[a, b]$.

Calculando as derivadas da função h obtemos que para todo $x \in \mathbb{R}$

$$h'(x) = 3x^2 + 2 \quad \text{e} \quad h''(x) = 6x.$$

Ao estudar os sinais de h' e h'' concluímos que h' é estritamente positiva em todo seu domínio, $h''(x) > 0$ para $x \in (0, \infty)$ e $h''(x) < 0$ para $x \in (-\infty, 0)$.

Sabemos ainda que $x = 0$ é ponto crítico de h' , nos levando a analisar que h' é decrescente no intervalo $(-\infty, 0)$ e é crescente no intervalo $(0, \infty)$. Estudando o sinal de h'' vemos que esta possui sinal negativo em $(-\infty, 0)$ e positivo em $(0, \infty)$ e se anula em $x = 0$.

Das informações acima vemos que é necessário determinar um intervalo $[a, b]$, de isolamento da raiz, tal que

$$[a, b] \subset (-\infty, 0) \quad \text{ou} \quad [a, b] \subset (0, \infty)$$

Já que $h'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ então h é crescente em todo seu domínio. Notando também por cálculos elementares que $h(0) = 2$, podemos descartar a possibilidade de considerar $[a, b] \subset (0, \infty)$.

Podemos ver que

$$h\left(-\frac{1}{100}\right) = \left(-\frac{1}{100}\right)^3 - \frac{2}{100} + 2 = 1,979999 > 0$$

e

$$h(-3) = (-3)^3 + 2(-3) + 2 = -31 < 0.$$

Assim, podemos tomar $[a, b] = \left[-3, -\frac{1}{100}\right]$, já que $h \in \mathcal{A}\left(\left[-3, -\frac{1}{100}\right]\right)$. Ainda vemos que em $\left[-3, -\frac{1}{100}\right]$ h é duas vezes derivável, $h'(x) \neq 0$, $h'' \neq 0$ e h'' não muda de sinal neste mesmo intervalo, sendo este o mesmo sinal de $h(-3) < 0$. Ainda pudemos ver acima que $h(-3) < 0 < h\left(-\frac{1}{100}\right)$.

Fixado o intervalo para a análise podemos determinar as limitações m e M . Por h' se tratar de uma função decrescente e positiva em $\left[-3, -\frac{1}{100}\right]$, temos que

$$m = \min_{-3 \leq x \leq -1/100} |h'(x)| = h'(-3) = 29. \quad (20)$$

Calculando temos que $h'''(x) = 6 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Logo, h'' é crescente e negativa em $\left[-3, -\frac{1}{100}\right]$. Portanto

$$M = \max_{-3 \leq x \leq -1/100} |h''(x)| = -h''(-3) = 18. \quad (21)$$

De (20) e (21) temos que para todo $x \in \left[-3, -\frac{1}{100}\right]$

$$29 < |h'(x)| \quad \text{e} \quad |h''(x)| < 18.$$

Assim, resumindo as informações acima, temos que h no intervalo $\left[-3, -\frac{1}{100}\right]$ satisfaz as hipóteses dos Teoremas 3, 4 e 5. Portanto, existe uma única raiz para (19) neste intervalo. Vejamos agora, as aproximações obtidas por cada método.

Método da bissecção: Novamente, como no exemplo anterior, tomaremos um valor máximo para o erro que desejamos, e desta forma, seguiremos as iterações até alcançar tal objetivo. No caso do método da bissecção a estimativa de erro é possível e, supondo que desejemos um erro menor que 10^{-3} , então temos que, para o intervalo considerado, tal erro é possível ser alcançado caso o número n de iterações seja tal que $\frac{-\frac{1}{100} + 3}{2^n} < 10^{-3}$, ou seja, $n \geq 12$. Assim, na Tabela 6 podemos notar o desenvolvimento deste primeiro método.

n	a_n	b_n	p_n	$h(p_n)$	Erro máximo
1	-3	-1/100	-1,505	-4,4188626249	1,495
2	-1,505	-1/100	-0,7575	0,0503417686	0,7475
3	-1,505	-0,7575	-1,13125	-1,7101906738	0,37375
4	-1,13125	-0,7575	-0,944375	-0,7309853103	0,186875
5	-0,944375	-0,7575	-0,8509375	-0,3180342732	0,0934375
6	-0,8509375	-0,7575	-0,80421875	-0,1285802899	0,04671875
7	-0,80421875	-0,7575	-0,780859375	-0,0378410100	0,023359375
8	-0,780859375	-0,7575	-0,7691796875	0,0065651609	0,0116796875
9	-0,780859375	-0,7691796875	-0,7750195312	-0,0155586312	0,0058398437
10	-0,7750195312	-0,7691796875	-0,7720996093	-0,0044769865	0,0014599609
11	-0,772096093	-0,7691796875	-0,7706396484	0,0010490150	0,0014599609
12	-0,7720996093	-0,7706396484	-0,7713696289	-0,0017127526	0,0007299804

Tabela 6: Aproximação da raiz de h pelo Método da Bissecção.

Método da secante: Novamente lembramos que para este método não há estimativa para o erro como no método anterior, e portanto, iremos utilizar como critério de parada a aproximação dada pelo método anterior, que nos garante o erro desejado nas aproximações. Assim, neste método, encerraremos as iterações ao termos uma aproximação p_i tal que $|p_i - (-0,7713696289)| < 10^{-3}$ como pode ser visto na Tabela 7.

Note que este método obteve uma convergência consideravelmente lenta, resultando aproximações muito próximas às anteriores. Tal fato pode ser justificado, quando analisamos o gráfico desta função, pela notável inclinação da curva neste intervalo, o que ocasionou a construção de secantes com diferenças de inclinação muito pequenas.

n	p_n	$h(p_n)$
1	-0,1895087079	1,6141766534
2	-0,3286086299	1,3072983867
3	-0,4423337297	1,0287859084
4	-0,5244876716	0,8067447498
5	-0,587264477	0,6228992009
6	-0,6348016149	0,4745888014
7	-0,6704651997	0,3576796808
8	-0,6970369127	0,2672635010
9	-0,7167219733	0,1983828653
10	-0,7312407783	0,1465144373
11	-0,7419131115	0,1077987848
12	-0,7497381275	0,0790905005
13	-0,7554646251	0,0579068418
14	-0,7596495161	0,0423320061
15	-0,7627046516	0,0309113780
16	-0,7649333287	0,0225532603
17	-0,7665582124	0,0164451593
18	-0,7677424005	0,0119860289
19	-0,7686051606	0,0087331878
20	-0,7692336026	0,0063616292
21	-0,7696912928	0,0046332914
22	-0,7700245872	0,0033740906

Tabela 7: Aproximação da raiz de h pelo Método das Cordas.

Método de Newton-Raphson: Para utilizarmos este método é necessário determinar $V_\delta(c)$, para isso, é exigido estimar $|c - a|$ e $|c - b|$ e calcular $\frac{1}{K}$.

De um estudo já visto já podemos determinar $\frac{1}{K}$ a partir de m e M já definidos:

$$K = \frac{18}{2 \cdot 29} \approx 0,3103448275 \Rightarrow \frac{1}{K} \approx 3,2222222222.$$

Para estimarmos $|c - a|$ e $|c - b|$ consideremos os pontos $z' = \left(-3 + \frac{1}{100}\right)$ e $w' = \left(-\frac{1}{100} - \frac{1}{100}\right)$. Note que

$$h(z') = h(-2,99) \approx -30,710899 < 0$$

e

$$h(w') = h(-0,02) \approx 1,959992 > 0,$$

ou seja, mesmo avançando $\frac{1}{100}$ de a e retornando $\frac{1}{100}$ de b , obtemos que a raiz c não se encontra nos intervalos $[a, z']$ e $[w', b]$. Portanto, podemos afirmar que

$$|c - a| > |z' - a| = \frac{1}{100} \quad \text{e} \quad |c - b| > |b - w'| = \frac{1}{100}.$$

Desta forma, vemos que $\delta \approx 3,222222222 > 3,2$. Veja que o intervalo que estamos considerando, $\left[-3, -\frac{1}{100}\right]$ possui comprimento $b - a = -\frac{1}{100} - (-3) = 2,99$. De acordo com as aproximações pelos métodos anteriores, temos que para a escolha de p_1 , o método de Newton-Raphson garante a convergência da sequência de aproximações caso tomemos p_1 no intervalo $(-0,7713696289 - 3,2, -0,01 + 3,2) = (-3,9713696289, 3,19)$, ou seja, não é necessário nenhuma restrição adicional ao intervalo anteriormente considerado.

Por estar compreendido no intervalo $[a, b]$, escolhemos $p_1 = -2$ para iniciar as iterações do método de Newton-Raphson que são apresentadas na Tabela 8 abaixo.

n	p_n	$h(p_n)$
1	-2	-10
2	-1,2857142857	-2,6967930029
3	-0,8981985756	-0,5210284459
4	-0,7803263582	-0,0358006347
5	-0,7709709408	-0,0002040726

Tabela 8: Aproximação da raiz de h pelo Método de Newton-Raphson.

Veja que pelo método de Newton-Raphson uma aproximação semelhante às obtidas pelos métodos anteriores foi alcançada com apenas 5 iterações, mostrando sua eficiência e contrapondo um número maior de iterações visto nas tabelas dos primeiros dois métodos.

Sintetizando as aproximações obtidas pelos três métodos, temos que estas foram:

- -0,7713696289 pelo método da bissecção;
- -0,7700245872 pelo método da secante;
- -0,7709709408 pelo método de Newton-Raphson.

Conclusões gerais podem ser obtidas a partir das tabelas numéricas apresentadas anteriormente e naturalmente o leitor já pôde observar que o Método de Newton-Raphson se mostra realmente eficaz. Além disso, um fenômeno comum na Teoria das Aproximações aqui é percebido: aproximações melhores e sequências com convergência mais rápida são obtidas quando se exige mais do problema em questão. De fato, o Método de Newton-Raphson é mais eficaz, porém, como já discutido anteriormente, escolher o primeiro ponto desta sequência tendo a garantia de que a mesma irá convergir pode não ser uma tarefa óbvia e vantajosa frente ao problema dado. O Método das Cordas pode ser uma alternativa interessante, caso suas hipóteses sejam satisfeitas. O Método da Bissecção possui convergência lenta, mas é de extrema importância uma vez que garante a existência de raízes e ainda, estima o erro da aproximação.

O métodos numéricos apresentados aqui podem ser executados on-line em http://www.dma.uem.br/kit/paginas/proced_numericos.

Referências

1. ANTON, H.; BIVENS, I.; DAVIS, S. *Cálculo*. 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2014. 15
2. ASANO, C. H.; COLLI, E. *Cálculo Numérico: Fundamentos e Aplicações*. Departamento de Matemática Aplicada, IME-USP, 2009. 15
3. BARTLE, R. G. *Elementos de Análise Real*. Rio de Janeiro: Editora Campus LTDA, 1983. 15
4. BARTLE, R. G.; SHERBERT, D. R. *Introduction to Real Analysis*. 4. ed. John Wiley & Sons, 2010. 15
5. DE QUADROS, R.; DE BORTOLI, A. L. *Fundamentos de Cálculo Numérico para Engenheiros*, Porto Alegre, 2009. 15
6. KUDRIÁVTSEV, L. D. *Curso de Análisis Matemático*. Vol 1. Editora MIR, 1984. 15
7. MOREIRA, C. N.; CABRAL, M. A. P. *Curso de Análise Real*. Departamento de Matemática Aplicada, IM-UFRJ, 2011. 15
8. RUDIM, W. *Principles of Mathematical Analysis*. 3. ed. McGraw-HILL International Book Company, 1976. 15
9. RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. da R. *Cálculo Numérico: Aspectos teóricos e computacionais*. 2. ed. São Paulo: Pearson, 1996. 15
10. D. Andrade (2019, março 15). Intervalos encaixados. Acesso <http://www.dma.uem.br/kit/intervalosencaixados.html>
11. D. Andrade (2019, abril 15). O Teorema do Valor Intermediário. Acesso <http://www.dma.uem.br/kit/teoremadovalorintermediario.html>

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL: um kit de sobrevivência

$$\int_{\Omega} K d\Omega + \int_{\partial\Omega} k_p(s) ds + \sum_{p=1}^k \phi_p = 2\pi \chi(\Omega).$$

Demonstração: Seja τ uma triangulação de Ω tal que qualquer triângulo T tido em uma vizinhança coerente de uma parametrização ortogonal com orientação de S (essa triangulação existe pelos comentários feitos acima). Pelo Teorema 2.1 para cada triângulo, obtém-se:

$$\int_T K dT_i + \int_{\partial T} k_p(s) ds + \sum_{p=1}^k \phi_p = 2\pi.$$

Como pontos e arestas possuem medida nula, podemos somar a equação acima os triângulos e obter:

$$\sum_{i=1}^k \int_T K dT_i = \int_{\Omega} K d\Omega.$$

Como triângulos adjacentes induzem orientação contrária na aresta em comum, interseção dos triângulos se anula no integral. Logo,

$$\sum_{i=1}^k \int_{\partial T_i} k_p(s) ds = \int_{\partial\Omega} k_p(s) ds.$$

Portanto,

$$\int_{\Omega} K d\Omega + \int_{\partial\Omega} k_p(s) ds + \sum_{p=1}^k \sum_{i=1}^k \phi_p = 2\pi F.$$

$$\sum A_k = 1,219 < A(\mathbb{H}_t^2).$$

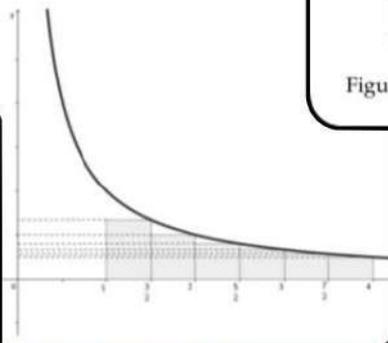


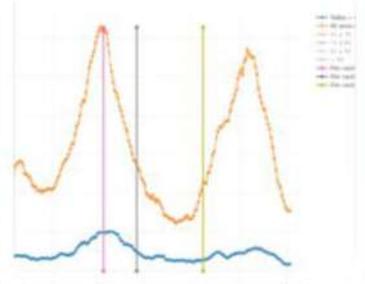
Figura 1: Gráfico da função $g(t) = t^2 + \ln(t)$

O volume da esfera



Figura 8: Cone com área da base igual a πr^2 e altura $4r$.

Fig 1 - Médias móveis de 7 dias dos casos positivos de COVID-19



Esta revista é responsável pela formulação de textos autorais desenvolvido pelo projeto de extensão "Kit". Neste projeto, contamos com alunos graduandos e demais interessados em matemática aplicada. Entre seus textos, podemos encontrar, curiosidades, resoluções, demonstrações, fatos relevantes, ideais para IC, entre outros!