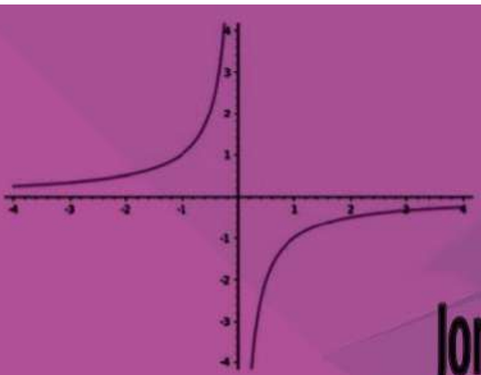


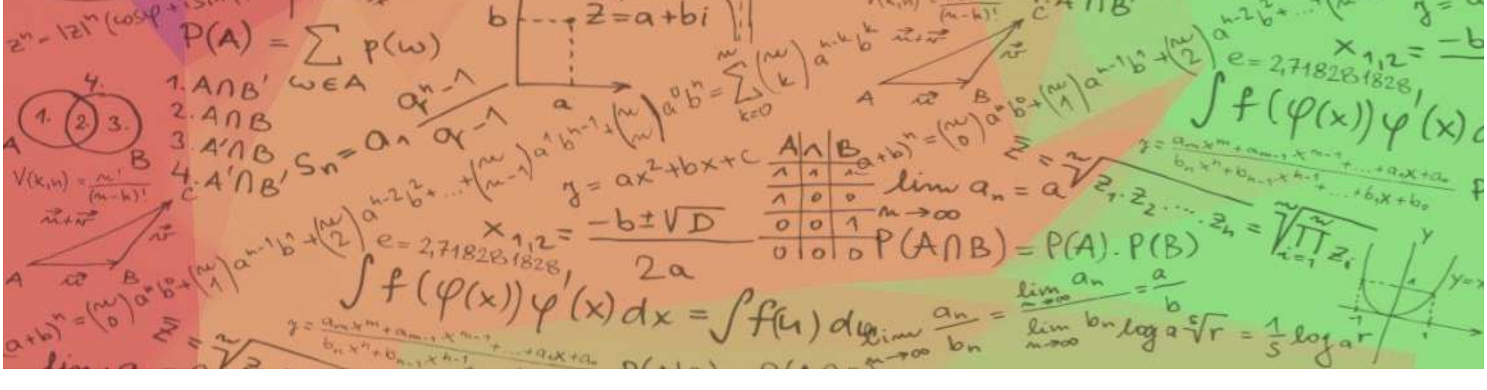
JEEPEMA

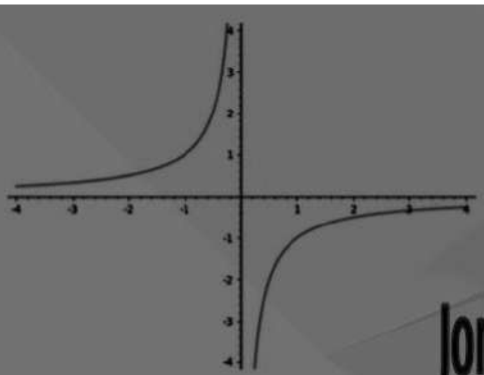
Jornal eletrônico de Ensino e Pesquisa de matemática

Cálculo Diferencial e INTEGRAL:

Exercícios • Apostilas • Resoluções • Vídeos Aulas •

um kit de sobrevivência!



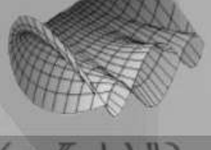


JEEPEMA

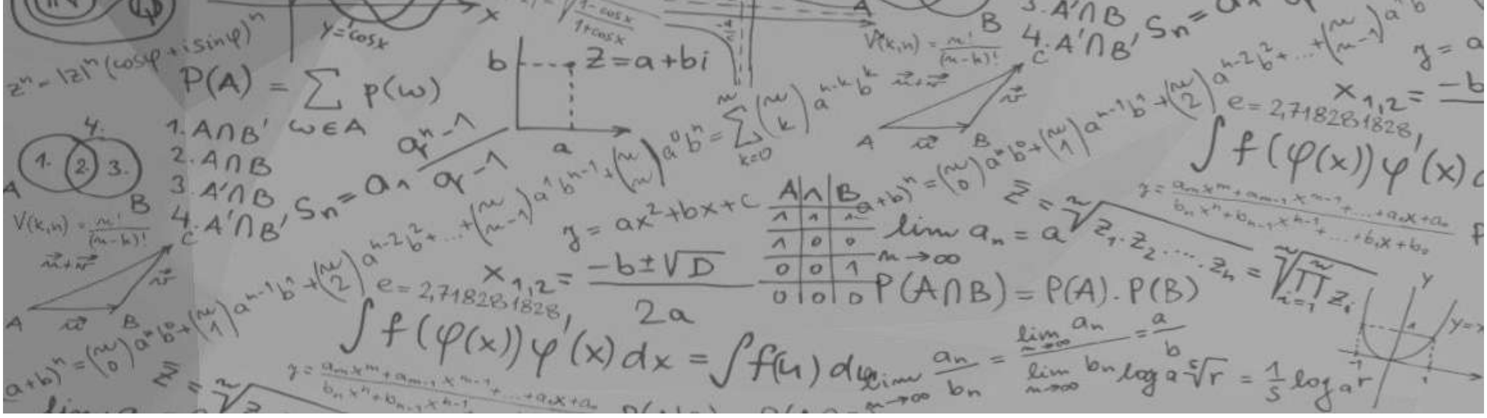
Jornal eletrônico de Ensino e Pesquisa de matemática

Cálculo Diferencial e INTEGRAL:

Exercícios • Apostilas • Resoluções • Vídeos Aulas •



um kit de sobrevivência!



Jornal Eletrônico de Ensino de Matemática - JEEPEMA
Universidade Estadual de Maringá, Maringá-PR - Brasil.
ISSN: 2594-6323
DOI: 10.4025/jeepema

Vol. 1 N° 1 / 103 páginas- Julho/2017

Palavras-chave: Ponto Fixo das Contrações, Método de Newton- Raphson, Espaço Métrico Completo, Curvas Cônicas, Superfícies Quádricas, Polinômios de Bersntein, Aproximação de funções, Convergência uniforme, Quatérnios.

Índice

Volume 1 - N° 1

J Jornal Eletrônico de Ensino e Pesquisa de Matemática
(1s.) **v. 1**, 1 (2017): 1–7. ©Jeepema – ISSN 2594-6323
www.dma.uem.br/kit/jeepema

Teorema Do Ponto Fixo Para Contrações

Bernadete Maria Suaki Brandão (DMA-UEM)
E-mail:bmsbrandao@uem.br

Resumo: Neste trabalho apresentamos o Teorema do Ponto Fixo para Contrações definidas em compactos $K \subset \mathbb{R}^n$. Como aplicação desse resultado apresentamos o método de Newton-Raphson.

Palavras-chave: Ponto Fixo das Contrações. Método de Newton-Raphson. *

Sumário

1. Introdução

O Teorema do Ponto Fixo para contrações é um resultado bastante importante da Matemática e é usado na resolução de diversos problemas. Apresentaremos aqui a sua versão no espaço $\mathbb{R}^n$ e, em seguida, uma aplicação. Optamos por esta versão devido ao fato de que podemos demonstrá-la usando o Princípio do Max/Min para funções reais, que pode ser considerado de fácil aceitação não exigindo, nesse momento, uma demonstração, embora isso seja perfeitamente possível.

Teorema 1.1 (Princípio Max/Min)**.** *Toda função real contínua* $f : C \to \mathbb{R}$ *definida em um subconjunto não vazio, fechado e limitado* $C \subset \mathbb{R}^n$

* Publicado em 14-08-2017.

atinge seu máximo e seu mínimo em C. Isto é, existem pontos x_0 e $x_1 \in C$ tais que $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1), \forall x \in C$.

Antes de apresentarmos o Teorema do Ponto Fixo vamos lembrar algumas definições importantes.

Definição 1.1. *Seja $C \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto não vazio. Uma aplicação $T : C \to \mathbb{R}^n$ é uma contração se existe uma constante k, com $0 \leq k < 1$ tal que*

$$\| T(x) - T(y) \| \leq k \| x - y \|, \forall x, y \in C \subset \mathbb{R}^n.$$

Caso seja necessário destacar o valor de k podemos dizer que T é uma k-contração.

Definição 1.2. *Um ponto fixo de uma aplicação T é um ponto x^*, que pertence tanto ao domínio quanto ao contradomínio de T, para o qual tem-se $T(x^*) = x^*$.*

2. O Teorema do Ponto Fixo

Teorema 2.1 (Teorema do Ponto Fixo para Contrações)**.** *Seja C um subconjunto não vazio, fechado e limitado do $\mathbb{R}^n$ e $T : C \to C$ uma k-contração. Então, T possui um único ponto fixo em C.*

Demonstração: Consideremos a função real $f : C \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \| x - T(x) \| .$$

Observe que f é uma função real e que todo zero de f é um ponto fixo de T em C. Uma vez que T é uma k-contração, usando a desigualdade triangular, podemos mostrar que

$$|f(x) - f(y)| \leq (1 + k) \| x - y \| .$$

Dessa forma, f é Lipschitziana e, portanto, é contínua em C. Como C é um subconjunto fechado e limitado do $\mathbb{R}^n$, o princípio do Min/Max garante a existência de $x^* \in C$ tal que

$$f(x^*) \leq f(x) \quad \forall x \in C.$$

Como $T(x^*) \in C$ temos, em particular, que $f(x^*) \leq f(T(x^*))$. Além disso,

$$f(T(x)) = \parallel T(x) - T(T(x)) \parallel \leq k \parallel x - T(x) \parallel .$$

Logo,

$$f(T(x)) \leq kf(x), \forall x \in C.$$

Assim,

$$f(x^*) \leq f(T(x^*)) \leq kf(x^*).$$

Mas como $f(x^*) \geq 0$ e $k < 1$, então $f(x^*) = 0$. Ou seja, x^* é uma raiz de f, sendo também um ponto fixo de T.

Para garantir a unicidade desse ponto fixo suponha que x_0 e x_1 sejam pontos fixos de T. Nesse caso,

$$\parallel x_0 - x_1 \parallel = \parallel T(x_0) - T(x_1) \parallel \leq k \parallel x_0 - x_1 \parallel$$

e, novamente, como $k < 1$ temos $\parallel x_0 - x_1 \parallel = 0$ o que significa que $x_0 = x_1$. $\square$

3. Aplicação: método de Newton-Raphson

Uma aplicação bastante interessante do Teorema do Ponto Fixo é o problema de determinar raízes para uma equação do tipo $g(x) = 0$.

Sabemos que, embora pareça um problema simples, somente em situações muito específicas, que seriam tipos muito especiais para a função g, é que se pode resolver tal equação de forma exata. Usando o resultado do teorema podemos estabelecer um método geral para encontrar aproximações para os valores procurados. Vamos formalizar o problema.

Considere uma função real definida e contínua em um intervalo aberto $(a, b) \subset \mathbb{R}$, $g : (a, b) \to \mathbb{R}$, tal que se possa garantir que g possui uma única raiz em (a, b). Isto é, existe um único $x^* \in (a, b)$ tal que $g(x^*) = 0$.

Um método para determinar uma aproximação para x^* consiste em encontrar uma função auxiliar A, que não se anule em algum intervalo fechado $I \subset (a, b)$, no qual a função

$$f(x) = x - A(x) \cdot g(x)$$

seja uma contração de I sobre I.

De fato, isso resolve o problema, pois sendo $f|_I : I \to I$ uma k-contração e $I \subset (a, b)$ um intervalo fechado e limitado, o Teorema do Ponto Fixo para Contrações garante que f possui um único ponto fixo em I.

Denotemos por x^* esse ponto fixo. Observe que como $f(x^*) = x^*$ temos que

$$\begin{aligned} & x^* = x^* - A(x^*) \cdot g(x^*) \\ \Rightarrow \qquad & A(x^*) \cdot g(x^*) = 0. \end{aligned}$$

E como A não se anula em I podemos concluir que deve ocorrer $g(x^*) = 0$. Ou seja, esse ponto fixo de f é a solução procurada da equação $g(x) = 0$.

Além disso, considere um ponto arbitrário $x_0 \in I$ e vamos gerar uma sequência, usando a função f, da seguinte forma:

$$x_n = f(x_{n-1}), \qquad n \geq 1.$$

Toda sequência gerada por f dessa forma será convergente e seu limite será x^*. Vamos demonstrar esta afirmação mostrando que $|x_n - x^*| \to 0$. Usando o fato de que f é uma k-contração temos:

$$\begin{aligned} |x_n - x^*| &= |f(x_{n-1}) - x^*| = |f(x_{n-1}) - f(x^*)| \\ &\leq k|x_{n-1} - x^*| = k|f(x_{n-2}) - f(x^*)| \\ &\leq k^2|x_{n-2} - x^*| \leq \ldots \leq k^n|x_0 - x^*|. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$|x_n - x^*| \leq k^n|x_0 - x^*|.$$

Como $0 \leq k < 1$ temos que $\lim_{n\to\infty} k^n = 0$ e daí $|x_n - x^*| \to 0$.

Consequentemente, podemos usar algum termo de uma sequência gerada como acima para aproximar o valor de x^*, que é a solução procurada para a equação $g(x) = 0$.

Além disso, podemos escolher o termo da sequência de forma que a aproximação seja satisfatória dentro de nossos propósitos, isto é, estabelecida uma tolerância $\varepsilon > 0$ pode-se determinar o índice n_0 de modo de $|x_{n_0} - x^*| < \varepsilon$.

Para vermos como se faz esta escolha vamos definir no intervalo I uma função auxiliar, análoga à usada na demonstração do teorema do ponto fixo, da seguinte forma:

$$h(x) = |x - f(x)|.$$

Observe que, se $x \in I$ e x^* é o ponto fixo de f, e lembrando que f é uma k-contração, então:

$$|x - x^*| \leq |x - f(x)| + |f(x) - f(x^*)| \leq h(x) + k|x - x^*|.$$

Logo, para todo $x \in I$,

$$|x - x^*| \leq \frac{1}{1-k} h(x).$$

Em particular,

$$|x_n - x^*| \leq \frac{1}{1-k} h(x_n).$$

Mas $h(f(x)) = |f(x) - f(f(x))| \leq k|x - f(x)| = kh(x), \quad \forall x \in I.$ Donde segue que:

$$\begin{aligned} h(x_n) &= h(f(x_{n-1}) \leq h(x_{n-1}) \\ &\leq k^2 h(x_{n-2}) \leq \ldots \leq k^n h(x_0). \end{aligned}$$

Então,

$$|x_n - x^*| \leq \frac{k^n}{1-k} h(x_0).$$

Basta então, escolher n_0 de forma que

$$\frac{k^{n_0}}{1-k} h(x_0) < \varepsilon$$

para termos que x_{n_0} aproxima adequadamente a solução da equação $g(x) = 0$.

Esse método aqui apresentado é a justificativa para a eficiência de uma conhecida técnica de aproximação de zeros de funções reais, que é o Método de Newton (ou Newton-Raphson), o qual propõe que se use a função auxiliar $A(x) = \frac{1}{g'(x)}$, que obviamente só pode ser utilizado sob certas condições sobre a função g. Vamos colocar o problema e as condições necessárias para a garantia de convergência do método.

Queremos resolver a equação

$$g(x) = 0$$

quando $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua com um único zero $x^* \in (a, b)$. Suponha ainda que as funções g' e g'' sejam contínuas em (a, b) e que $g'(x) \neq 0, \quad \forall x \in (a, b)$.

Se considerarmos a função auxiliar $A(x) = \frac{1}{g'(x)}$ temos que $A(x) \neq 0, \quad \forall x \in (a, b)$. Vamos mostrar que, nesse caso, existe um intervalo fechado $I^* \subset (a, b)$, com $x^* \in I^*$, tal que a função definida por

$$f(x) = x - A(x) \cdot g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

é uma contração de I^* em I^*.

Ora, f assim definida é contínua e diferenciável em (a, b) e

$$f'(x) = \frac{g''(x) \cdot g(x)}{[g'(x)]^2}.$$

Sendo então, f' uma função contínua em (a, b) com $f'(x^*) = 0$. Logo, para qualquer $k \in \mathbb{R}, k > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que $|f'(x)| \leq k, \quad \forall x \in I^* = [x^* - \delta, x^* + \delta] \subset [a, b]$.

Sendo $k < 1$, usando o Teorema do Valor Médio para derivadas, podemos garantir que $\forall x, y \in I^*$ existe $\xi \in I^*$ tal que

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)||x - y|.$$

Daí, temos que

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|, \quad \forall x, y \in I^*.$$

Ou seja, f é uma k-contração em I^*.

Para garantir que f leva I^* em I^*, tomemos $x \in I^*$. Então, $|x - x^*| \leq \delta$, logo

$$|f(x) - x^*| = |f(x) - f(x^*)| \leq k|x - x^*| < k|x - x^*| < |x - x^*| \leq \delta.$$

Portanto,

$$|f(x) - x^*| < \delta \Rightarrow f(x) \in I^*.$$

Assim, temos que, se $A(x) = \frac{1}{g'(x)}$, então existe $\delta > 0$ tal que , se $I^* = [x^* - \delta, x^* + \delta]$ a função $f(x) = x - A(x) \cdot g(x)$ é uma k-contração de I^* em I^*. Pela discussão feita anteriormente temos demonstrado o seguinte resultado.

Teorema 3.1 (Método de Newton-Raphson)**.** *Se a equação $g(x) = 0$ tem uma única raiz x^* em um intervalo aberto J no qual g' e g'' são contínuas e g' não se anula, então J contém um intervalo fechado I^* tal que:*

(i) $x^* \in I^*$.

(ii) a raiz x^* é o limite de toda sequência gerada por

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n \geq 0$$

tal que $x_0 \in I^*$.

Referências

1. Burden, R. L., Faires, J. D. and Burden, A. M.. Análise Numérica, 3. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2015.

2. Lima, E. L.. Curso de Análise, v.2, 2. ed. Rio de Janeiro, IMPA, 1981.

3. Drager, L. D. and Foote, R. L..The Contraction Mapping Lemma and the Inverse Function Theorem in Advanced Calculus. The Amercican Mathetical Monthly, vol 93, no. 1, 1986, pp. 52-54.

4. Wagner, C. H. Generic Approach to Iterative Methods. Mathematics Magazine, vol. 55, no. 5, 1982, pp. 259-273.

J Jornal Eletrônico de Ensino e Pesquisa de Matemática
(1s.) **v. 1**, 1 (2017): 8–17. ©Jeepema – ISSN 2594-6323
www.dma.uem.br/kit/jeepema

Um espaço métrico incompleto

Alyssa de Oliveira Costa – DMA - UEM

Resumo: O objetivo deste texto é apresentar um exemplo de espaço métrico incompleto diferente de $\mathbb{Q}$. Para tanto, definiremos alguns conceitos prévios necessários para nossa melhor compreensão. Indicamos a referência [1], para o leitor que queira se aprofundar mais sobre espaços métricos.

Palavras-chave: Espaço Métrico Completo, Sequências de Cauchy, Convergência. *

Sumário

1. Introdução

Os espaços métricos estudados em Análise Funcional vão além de conjuntos envolvendo números reais, com frequência encontramos conjuntos mais gerais, como, por exemplo, o conjunto de todas as sequências convergentes de números reais ou o conjunto todas as sequências convergentes de números complexos, o conjunto de todas as funções a valores reais contínuas e definidas em um intervalo fechado, entre outros. A métrica nesses conjuntos é definida de forma que satisfaça algumas propriedades, que iremos definir logo

* Publicado em 14-08-2017.

abaixo. Podemos construir, então, vários espaços métricos com métricas diferentes e, assim, podemos investigar quando eles são completos ou incompletos.

Definição 1.1. *Um espaço métrico é um par (X, d), onde X é um conjunto não vazio e d é uma função definida em $X \times X$ que satisfaz, para todos $x, y, z \in X$, as seguintes propriedades*

(M1) $d(x, y)$ *é um valor real, finito e não negativo;*

(M2) $d(x, y) = 0$ *se, e somente se,* $x = y$*;*

(M3) $d(x, y) = d(y, x)$*;*

(M4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ *(Desigualdade Triangular).*

A função d é chamada métrica em X.

Para simplificarmos, escreveremos X para indicar (X, d). Também, indicaremos por $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais, ou seja,

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}.$$

O conjunto dos números reais é denotado por $\mathbb{R}$.

A seguir, vejamos alguns exemplos de espaços métricos.

Exemplo 1.2. Consideremos em $\mathbb{R}$ a métrica usual $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$d(x, y) = |x - y|,$$

para quaisquer números $x, y \in \mathbb{R}$. O conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ é um espaço métrico.

Exemplo 1.3. O espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, onde cada ponto $x \in \mathbb{R}^n$ é da forma $x = (x_1, \ldots x_n)$, com $x_i \in \mathbb{R}$, dotado da métrica definida por

$$d(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$$

é um espaço métrico.

Para encontrar as demontrações dos exemplos acima e conhecer mais exemplos de espaços métricos, veja [1] ou [2].

Antes de falarmos em um espaço métrico incompleto, precisamos entender o que é um espaço métrico completo e, para isso, é primordial a definição de sequência de Cauchy.

Definição 1.4. *Uma sequência (x_n) em um espaço métrico $X = (X, d)$ é dita convergente se existe um $x \in X$ tal que*

$$\lim_{n \to \infty} d(x_n, x) = 0.$$

O elemento x é chamado limite de (x_n) em X.

Conhecendo a Definição 1.4, agora podemos definir sequência de Cauchy.

Definição 1.5. *Uma sequência (x_n) em um espaço métrico X é dita sequência de Cauchy em X, se para todo $\epsilon > 0$ existe um $N \in \mathbb{N}$ tal que*

$$d(x_m, x_n) < \epsilon, \quad \textit{para todo} \quad m, n > N.$$

Com essas definições, podemos entender o conceito de espaço métrico completo.

Definição 1.6. *Um espaço métrico (X, d) é dito completo se toda sequência de Cauchy em X converge em X, ou seja, o limite de uma sequência de Cauchy em X é um elemento de X.*

Exemplo 1.7. Nem toda sequência de Cauchy em X é convergente em X. De fato, consideremos o espaço métrico $(\mathbb{Q}, d)$, com a métrica usual dada por $d(x, y) = |x - y|$, onde $x, y \in \mathbb{Q}$.

Consideremos a sequência (x_n) gerada por $x_0 = 1$ e $x_{n+1} = N(x_n), n \geq 0$, onde $N(x) = \frac{x^2+1}{2x}$. Note que os primeiros elementos dessa sequência são:

$$(1, 1.5, 1.416666666, 1.414215686, 1.414213562, , \ldots).$$

Essa sequência foi construída por meio do método de Newton-Raphson
(veja em http://www.dma.uem.br/kit/) e, assim, é fácil ver que a sequência é convergente para $\sqrt{2}$ e, portanto, é de Cauchy. Como a sequência (x_n) converge para um número irracional, segue que $(\mathbb{Q}, d)$ não é um espaço métrico completo.

Exemplo 1.8. Consideremos o conjunto $C[a, b]$ constituído pelas funções a valores reais definidas em um intervalo fechado $[a, b]$ e contínuas. Em $C[a, b]$, defina

$$d(f, g) = \max_{t \in [a,b]} |f(t) - g(t)|, \tag{1}$$

onde $f, g \in C[a, b]$. O espaço $C[a, b]$ dotado dessa métrica é um espaço métrico completo. Para mais detalhes e conhecer outros exemplos, veja [1].

2. Espaço métrico incompleto

Existem vários exemplos de espaços métricos completos, por exemplo, o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, o espaço dos números complexos, o espaço das funções contínuas com a métrica definida por (1), entre outros. Pela Definição 1.6, para um espaço métrico ser incompleto devemos exibir uma sequência de Cauchy contida no espaço X que convirja para um certo elemento que não pertença a X. No Exemplo 1.7, vimos que o conjunto dos números racionais não é um espaço métrico completo.

Neste trabalho, destacamos um exemplo de espaço métrico incompleto, como segue abaixo.

Exemplo 2.1. Consideremos o espaço métrico (X, d), onde $X = C[0,1]$, com a seguinte métrica

$$d(f,g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)| dt,$$

onde $f, g \in X$. Vamos provar que o espaço (X, d) é incompleto.

Incialmente, mostraremos que a função d é uma métrica em X. Sejam f, g e $h \in X$, vamos verificar que as propriedades (M1) – (M4) da Definição 1.1 estão satisfeitas. Para tanto, utilizaremos as propriedades de módulo de um número real e de funções contínuas, por exemplo, sabemos que a soma de duas funções contínuas definidas em $[0,1]$ é uma função contínua e integrável em $[0,1]$.

É fácil ver que a propriedade (M1) é válida, pois

$$|f(t) - g(t)| \geq 0, \quad \text{para todo} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Então,

$$\int_0^1 |f(t) - g(t)|\, dt \geq 0.$$

Sejam f, $g \in X$. Para mostrarmos a propriedade (M2), primeiramente, verificaremos que, se $d(f,g) = 0$, então $f = g$. De

$$d(f,g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)|\, dt = 0,$$

segue que $|f(t) - g(t)| \equiv 0$ (identicamente nula). Caso contrário, teríamos $|f(t) - g(t)| = c(t) \geq 0$, com $c(t) > 0$ em pelo menos algum ponto t_0. Pela continuidade de c, teríamos $c(t) > 0$ em alguma vizinhança de t_0. E assim,

$$\int_0^1 |f(t) - g(t)|\, dt = \int_0^1 c(t)\, dt > 0.$$

Reciprocamente, se tivermos $f = g$, então

$$\int_0^1 |f(t) - g(t)|\, dt = \int_0^1 |f(t) - f(t)|\, dt = 0.$$

Logo, a propriedade (M2) está satisfeita.

Vamos mostrar a propriedade (M3), para isso notemos que

$$d(f,g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)|\, dt \quad \text{e} \quad d(g,f) = \int_0^1 |g(t) - f(t)|\, dt.$$

Ainda $|f(t) - g(t)| = |-1|\,|g(t) - f(t)| = |g(t) - f(t)|$, assim, vale (M3), como queríamos demonstrar.

Só nos resta mostrar a propriedade (M4). Pela desigualdade triangular (para módulos de números reais),

$$|f(t)-g(t)| = |f(t)-h(t)+h(t)-g(t)| \leq |f(t)-h(t)|+|h(t)-g(t)|.$$

Logo,

$$\int_0^1 |f(t) - g(t)|\, dt \leq \int_0^1 |f(t) - h(t)|\, dt + \int_0^1 |h(t) - g(t)|\, dt.$$

Desta maneira, vale a Desigualdade Triangular. Provamos, assim, que valem as propriedades (M1) – (M4). Portanto, (X, d) é um espaço métrico.

Mostraremos, a seguir, que (X, d) não é um espaço métrico completo, ou seja, exibiremos uma sequência de Cauchy em X e mostraremos que ela converge para um elemento que não está em X.

Para tal feito, consideremos a sequência de funções contínuas (f_m), $m \in \mathbb{N}$. Cada função $f_m : [0,1] \to [0,1]$ é dada por

$$f_m(t) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad t \in [0, \frac{1}{2}] \\ m(t - \frac{1}{2}), & \text{se} \quad t \in [\frac{1}{2}, a_m] \\ 1, & \text{se} \quad t \in [a_m, 1], \end{cases}$$

onde $a_m = \frac{1}{2} + \frac{1}{m}$, com $m \in \mathbb{N}$. Observemos a Figura 1.

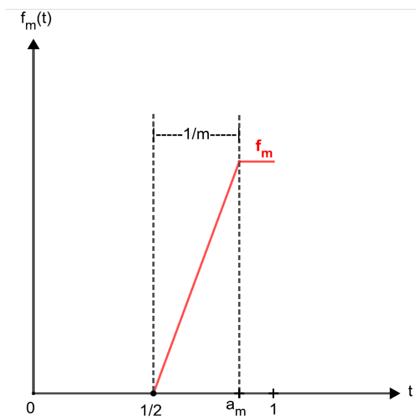


Figura 1: Função f_m

Vamos mostrar que (f_m) é uma sequência de Cauchy em X, ou seja, que para todo $\epsilon \geq 0$, existe um $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(f_m, f_n) < \epsilon$, para todo $m, n > N$.

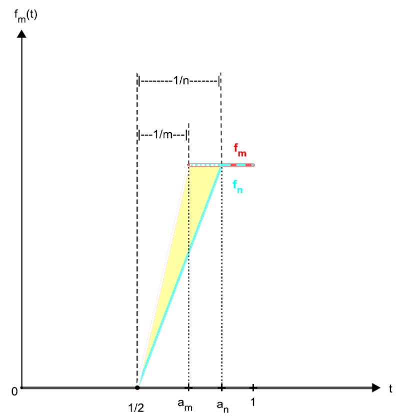


Figura 2: Funções f_m e f_n

Sem perda de generalidade, suponhamos $m, n \in \mathbb{N}$ com $m > n$. A Figura 2 exibe os gráficos de f_m e f_n. Provaremos, a seguir, que (f_m) é uma sequência de Cauchy em X.

Observando o triângulo em amarelo na Figura 2, temos que para $\varepsilon > 0$, existe $N = \dfrac{1}{2\varepsilon}$ tal que, para $m > n > N$,

$$d(f_m, f_n) = \int_0^1 |f_m(t) - f_n(t)|dt = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right) < \frac{1}{2n} < \frac{1}{2N} < \epsilon.$$

Outra maneira de mostrarmos a desigualdade acima é calculando a integral

$$\begin{aligned} d(f_m, f_n) &= \int_0^1 |f_m(t) - f_n(t)|dt = \int_{\frac{1}{2}}^{a_m} |f_m(t) - f_n(t)|dt + \int_{a_m}^{a_n} |1 - f_n(t)|dt \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^{a_m} |m(t - \frac{1}{2}) - n(t - \frac{1}{2})|dt + \int_{a_m}^{a_n} |1 - n(t - \frac{1}{2})|dt \\ &= (m - n)\int_{\frac{1}{2}}^{a_m} (t - \frac{1}{2})dt + \int_{a_m}^{a_n} |1 - n(t - \frac{1}{2})|dt. \end{aligned}$$

Sabendo que $a_m = \frac{1}{2} + \frac{1}{m}$ e $a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{n}$, resolvendo a integral acima, obtemos

$$\begin{aligned}
d(f_m, f_n) &= (m-n)\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{m}} (t-\frac{1}{2})dt + \int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{m}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} (1-nt+\frac{n}{2})dt \\
&= \left(\frac{m-n}{2m^2}\right) + \frac{1}{n} - \frac{1}{m} - \frac{1}{2n} + \frac{n}{2m^2} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right).
\end{aligned}$$

Logo, para $\varepsilon > 0$, existe $N = \dfrac{1}{2\varepsilon}$ tal que, para $m > n > N$,

$$d(f_m, f_n) < \frac{1}{2n} < \frac{1}{2N} < \varepsilon.$$

Dessa forma, mostramos que a sequência (f_m) é de Cauchy em X.

Provaremos agora que (f_m) converge para uma função f que não pertence a X. Para isso, suponhamos que (f_m) convirja para $f \in X$. Então, $d(f_m, f) \to 0$ quando $m \to \infty$. No entanto,

$$\begin{aligned}
d(f_m, f) &= \int_0^1 |f_m(t) - f(t)|dt \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} |f(t)|dt + \int_{\frac{1}{2}}^{a_m} |f_m(t) - f(t)|dt + \int_{a_m}^1 |1 - f(t)|dt
\end{aligned} \quad (2)$$

Quando $m \to +\infty$, a sequência (a_m) converge para $\dfrac{1}{2}$, assim, (2) se torna

$$\int_0^{\frac{1}{2}} |f(t)|dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 |1 - f(t)|dt = 0. \quad (3)$$

A equação (3) só terá solução se

$$\int_0^{\frac{1}{2}} |f(t)|dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 |1 - f(t)|dt = 0.$$

Desta forma, $|f(t)| = 0$, $t \in [0, \frac{1}{2}]$ e $|1 - f(t)| = 0$, para $t \in [\frac{1}{2}, 1]$. Logo,

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \\ 1, & \text{se} \quad t \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

o que é uma contradição, pois por hipótese $f \in X$ e f não é contínua em $[0, 1]$. Portanto, o espaço métrico (X, d) é um espaço métrico incompleto.

Referências

1. KREYSZIG, E. *Introductory Functional Analysis with Applications*, New York: Jonh Wiley & Sons, 1978. 8, 10, 11

2. LIMA, E. L. *Espaços Métricos*, Rio de Janeiro: Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 1993.

J Jornal Eletrônico de Ensino e Pesquisa de Matemática
(1s.) **v. 1**, 1 (2017): 18–27. ©Jeepema – ISSN 2594-6323
www.dma.uem.br/kit/jeepema

Identificação de Cônicas e Quádricas

Marcelo M. Santos–DM-IMECC-UNICAMP
Email: msantos@ime.unicamp.br

Resumo: O principal objetivo dessas notas é identificar a cônica que a equação quadrática

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

descreve no plano com coordenadas cartesianas (C.C.) xy. Questão similar para a quádrica

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz + j = 0$$

no espaço com C.C. xyz.

Palavras-chave: Curvas Cônicas. Superfícies Quádricas*

Sumário

1. Introdução

Consideremos a curva cônica que a equação quadrática

$$(C) \qquad ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

descreve no plano com coordenadas cartesianas xy e a quádrica

$$(Q) \qquad ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz + j = 0$$

* Publicado em 14-08-2017.

no espaço xyz.

Usando notação matricial, sejam

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix} \;\; e \;\; K = \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix}.$$

Então (C) se escreve como

$$(C) \qquad X^t AX + KX + f = 0.$$

Analogamente, se

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a & d/2 & e/2 \\ d/2 & b & f/2 \\ e/2 & f/2 & c \end{bmatrix} \;\; e \;\; K = \begin{bmatrix} g & h & i \end{bmatrix},$$

então (Q) se escreve como

$$(Q) \qquad X^t AX + KX + j = 0.$$

De fato, no caso (C), temos

$$\begin{aligned} X^t AX &= \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ax + (b/2)y \\ (b/2)x + cy \end{bmatrix} \\ &= ax^2 + bxy + cy^2 \end{aligned}$$

e

$$KX = \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = dx + ey.$$

O caso (Q) é análogo e fica como exercício (dever de casa/complementar da matéria).

Observações: a) Tanto em (C) como em (Q), a matriz A é quadrada simétrica ($[A]_{ij} = [A]_{ji}$);

b) Os produtos matriciais $X^t AX$ e KX podem ser identificados, respectivamente, com os produtos internos $AX \cdot X$ e $K \cdot X$ (identificando as matrizes colunas AX e X, e a matriz linha K, com vetores);

c) (Q) reduz-se a (C) tomando-se $z = 0$. (A interseção de uma quádrica com o plano $z = 0$ é uma cônica.)

2. Caso Simples

Caso em que não temos os "termos cruzados" xy, xz e yz. Isto é, $b = 0$ em (C) e $d = e = f = 0$ em (Q)).

O caso mais simples de análise da equação (C) ou (Q) é caso da ausência dos "termos cruzados", i.e. $b = 0$ em (C) e $d = e = f = 0$ em (Q). Notemos que isto significa exatamente que a matriz A (em (C) ou em (Q)) é diagonal (todos os elementos fora da diagonal principal são nulos)! Neste caso, vejamos que podemos identificar o conjunto descrito por (C) ou (Q) simplesmente por completamento de quadrados e translação da origem do sistema de coordenadas cartesianas. Para explicar a análise, consideremos (C) no caso em que $b = 0$, $a \neq 0$ e $c \neq 0$. Neste caso, completando os quadrados, temos:

$$\begin{array}{l} ax^2 + cy^2 + dx + ey + f = 0 \\ a(x^2 + \frac{d}{a}x + (\frac{d}{2a})^2) + c(y^2 + \frac{e}{c}y + (\frac{e}{2c})^2) - \frac{d^2}{4a} - \frac{e^2}{4c} + f = 0 \\ a(x + \frac{d}{2a})^2 + c(y + \frac{e}{2c})^2 = k \end{array}$$

onde $k := \frac{d^2}{4a} + \frac{e^2}{4c} - f$;

se $k = 0$, a equação reduz-se ao ponto $x = -\frac{d}{2a}$, $y = -\frac{e}{2c}$, quando a e c têm o mesmo sinal, ou a um par de retas se cruzando neste ponto, quando a e c têm sinais opostos;

se $k \neq 0$, podemos escrever a equação acima como

$$\frac{a}{k}(x + \frac{d}{2a})^2 + \frac{c}{k}(y + \frac{e}{2c})^2 = 1,$$

o que nos dá um conjunto vazio se $a/k < 0$ e $c/k < 0$, uma hipérbole com "centro" em $(-\frac{d}{2a}, -\frac{e}{2c})$ se a/k e c/k têm sinais opostos, e uma elipse com "centro" em $(-\frac{d}{2a}, -\frac{e}{2c})$ se $a/k > 0$ e $c/k > 0$. Veja observação no parágrafo sobre 'translação' abaixo.

Exemplo:

$$\begin{array}{l} 4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0 \\ 4(x^2 - 2x + 1) + 9(y^2 - 4y + 4) - 4 - 36 + 4 = 0 \\ 4(x-1)^2 + 9(y-2)^2 = 36 \\ \frac{1}{9}(x-1)^2 + \frac{1}{4}(y-2)^2 = 1 \end{array}$$

uma elipse

Exercícios:

1) Se em (C), tivermos $b = 0$ e $a = 0$, ou, $b = 0$ e $c = 0$, mostre que a equação (C) descreve uma parábola, um par de retas paralelas, uma reta ou um conjunto vazio.

2) Em (Q), se $d = e = f = 0$, mostre que a equação pode ser escrita como

i) $a(x + \frac{g}{2a})^2 + b(y + \frac{h}{2b})^2 + (z + \frac{i}{2c})^2 = k$, se $a \neq 0$, $b \neq 0$ e $c \neq 0$, onde
$k := \frac{g^2}{4a} + \frac{h^2}{4b} + \frac{i^2}{4c} - j$;

ii) $gx + b(y + \frac{h}{2b})^2 + (z + \frac{i}{2c})^2 = k$, se $a = 0$, $b \neq 0$ e $c \neq 0$, onde $k := \frac{h^2}{4b} + \frac{i^2}{4c} - j$. (Temos uma equação similar a esta quando $[b = 0$, $a \neq 0$ e $c \neq 0]$ ou $[c = 0$, $a \neq 0$ e $b \neq 0]$.)

3. Caso com Mudança de coordenadas

Mudança de coordenadas cartesianas e eliminação dos " termos cruzados"

Um sistema de coordenadas cartesianas (C.C.) é determinado por um ponto, chamado *origem*, e por um conjunto de n vetores ortonormais (ortogonaias dois a dois e unitários), chamados *vetores diretores*; $n = 2$, no plano, e $n = 3$, no espaço (tridimensional). As coordenadas de um ponto P são determinadas pela relação

$$\begin{aligned} \vec{OP} &= xU_1 + yU_2, &\quad \text{no plano} \\ \vec{OP} &= xU_1 + yU_2 + zU_3, &\quad \text{no espaço} \end{aligned}$$

O é a origem, $\{U_1, U_2\}$, $\{U_1, U_2, U_3\}$ são os vetores diretores.

Observação: a relação acima determina as coordenadas de maneira única. De fato, como os vetores são ortonormais, elas são dadas pelos produtos internos:

$$x = \vec{OP} \cdot U_1, \quad y = \vec{OP} \cdot U_2, \quad z = \vec{OP} \cdot U_3.$$

Translação: dois sistemas de C.C. com mesmos vetores diretores e origens distintas. Vejamos as relações entre as coordenadas de um ponto P (qualquer) nos dois sistemas (um sendo a translação do outro). No plano, denotando as origens por O e O', como

$$\vec{OO'} + \vec{O'P} = \vec{OP},$$

se (x, y) e (x', y') são as suas coordenadas nos dois sistemas, e (x_0, y_0) são as coordenadas da origem O' no sistema com origem O, temos as relações

$$\begin{aligned} (x_0U_1 + y_0U_2) + (x'U_1 + y'U_2) &= xU_1 + yU_2 \\ (x_0 + x')U_1 + (y_0 + y')U_2 &= xU_1 + xU_2 \end{aligned}$$

logo,

$$\begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \end{cases}$$

ou, em notação matricial,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

ou, mais abreviadamente,

$$X = X' + X_0,$$

onde $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $X' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ e $X_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$.

No espaço, de forma análoga, também temos a relação $X = X' + X_0$,
sendo $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, $X' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$ e $X_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$
(ou, equivalentemente,

$$\begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \\ z = z' + z_0 \end{cases}).$$

Observação : Pelo que vimos acima, na ausência de termos cruzados, uma mudança de coordenadas (mudança de variáveis) dada por uma translação $X = X' + X_0$, leva (C) ou (Q) numa equação "canônica" (mais simples) nas variáveis $(x', y') \equiv X'$. Por exemplo, se $a \neq 0$ e $c \neq 0$ (e $b = 0$), tomando $X_0 = (-d/2a, -e/2c)$, temos que nas variáveis (x', y') a equação (C) se escreve como

$$ax'^2 + cy'^2 = k,$$

onde $k := \frac{d^2}{4a} + \frac{e^2}{4c} - f$.

Eliminação dos termos cruzados:

Para "eliminarmos" os termos cruzados, em (C) ou (Q), lembramos que observamos acima que a ausência deles significa exatamente que a matriz A é diagonal (todos os elementos fora da diagonal principal são nulos)! Então a idéia é buscar um novo sistema de coordenadas cartesianas no qual eles não aparecem e daí, pelo que fizemos no caso sem termos cruzados (acima), saberemos identificar a cônica ou quádrica. Com este fim, consideramos dois sistemas de C.C. com a mesma origem O e com vetores diretores $\{U_1, U_2\}$ e $\{U_1', U_2'\}$, no plano, ou $\{U_1, U_2, U_3\}$ e $\{U_1', U_2', U_3'\}$, no espaço. Vejamos as relações entre as coordenadas de um ponto P (qualquer) nos dois sistemas. No plano, podemos escrever

$$U_1' = a_1 U_1 + b_1 U_2, \quad U_2' = a_2 U_1 + b_2 U_2$$

((a_j, b_j) são as coordenadas do vetor U_j', $j = 1, 2$, no sistema determinado pelos vetores diretores U_1, U_2). Então, se (x, y) e (x', y') são as coordenadas do ponto P nos dois sistemas, temos as relações

$$\begin{aligned} xU_1 + yU_2 &= \vec{OP} \\ &= x'U_1' + y'U_2' \\ &= x'(a_1 U_1 + b_1 U_2) + y'(a_2 U_1 + b_2 U_2) \\ &= (a_1 x' + a_2 y')U_1 + (b_1 x' + b_2 y')U_2 \end{aligned}$$

logo,

$$\begin{cases} x = a_1 x' + a_2 y' \\ y = b_1 x' + b_2 y' \end{cases}$$

ou, em notação matricial,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

ou, mais abreviadamente,

$$X = QX',$$

onde $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $X' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ e $Q = \begin{bmatrix} U_1' & U_2' \end{bmatrix}$ é a matriz cujas colunas são as coordenadas dos vetores U_1', U_2' no sistema U_1, U_2.

No espaço:

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

$$Q = \begin{bmatrix} U_1' & U_2' & U_3' \end{bmatrix},$$

$$X' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}.$$

Observação: $QQ^t = I$, i.e. Q é invertível e $Q^t = Q^{-1}$. (Uma matriz com esta propriedade é chamada uma *matriz ortogonal.*)

Voltemos à equação (C) ou (Q), que em notação matricial se escreve da mesma forma:

$$X^t AX + KX + f = 0$$

$(f = j$ em $(Q))$. Fazendo a substituição $X = QX'$ (mudando para um novo sistema de coordenadas/ para as novas coordenadas dadas por X'), obtemos

$$X'^t(Q^t AQ)X' + (KQ)X' + f = 0.$$

A questão agora é a seguinte: Existe uma matriz $Q = \begin{bmatrix} U_1' & U_2' & U_3' \end{bmatrix}$ (ou $Q = \begin{bmatrix} U_1' & U_2' \end{bmatrix}$, no plano) tal que $Q^t AQ$ seja uma matriz diagonal? A resposta à esta questão é positiva, devido a matriz quadrada A ser simétrica. Este fato será visto no curso de Álgebra

Linear. Vejamos aqui como encontrar (calcular) os vetores U'_j. Consideremos o caso do plano (no espaço é análogo). Em primeiro lugar, notemos que

$$\begin{aligned} & Q^t A Q = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow \quad & AQ = Q \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow \quad & A \begin{bmatrix} U'_1 & U'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U'_1 & U'_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow \quad & \begin{bmatrix} AU'_1 & AU'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 U'_1 & \lambda_2 U'_2 \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow \quad & AU'_1 = \lambda_1 U'_1 \ \text{ e } \ AU'_2 = \lambda_2 U'_2 . \end{aligned}$$

Logo, cada elemento λ_j da diagonal principal da matriz diagonal $Q^t AQ$ é uma solução (uma raiz) da equação

$$(A - \lambda)U = 0$$

para algum vetor U não nulo. Esta equação pode ser vista como um sistema de equações lineares, logo, para ela ter uma solução não nula (não trivial) devemos ter

$$\det(A - \lambda) = 0.$$

Cada solução λ desta equação é chamada um *autovalor* da matriz A. Ela é uma equação polinomial em relação a λ (as soluções são as raízes de um polinômio). Um vez determinadas as soluções λ desta equação (os *autovalores* de A) voltamos ao sistema de equações lineares

$$(A - \lambda)U = 0$$

e resolvemos o mesmo para obter os vetores ortonormais U'_j. (Cada solução U não nula deste sistema é chamado de um *autovetor* da matriz A associado ao *autovalor* λ. Assim, a matriz Q que torna $Q^t AQ$ uma matriz diagonal é aquela cujas colunas são autovetores de A, dois a dois ortogonais e unitários.)

Identificação das Cônicas

No novo sistema de coordenadas $(x', y') \equiv X'$, a equação (C) se escreve como

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + d'x' + e'y' + f' = 0,$$

sem o termo cruzado $x'y'$ (v. Teorema 7.1 do livro [1]). Então, pelo que vimos no caso da ausência de termo cruzado, podemos concluir o seguinte Teorema (Teorema 7.2 do livro [1]):

- *se* $\lambda_1\lambda_2 > 0$ *(i.e. os autovalores da matriz A, λ_1 e λ_2, são ambos não nulos e têm o mesmo sinal) então a equação (C) descreve uma elipse, um ponto ou o conjunto vazio;*

- *se* $\lambda_1\lambda_2 < 0$ *(i.e. os autovalores da matriz A, λ_1 e λ_2, são ambos não nulos e têm sinais opostos) então a equação (C) descreve uma hipérbole ou um par de retas concorrentes;*

- *se* $\lambda_1\lambda_2 = 0$ *(i.e. pelo menos um dos autovalores da matriz A, λ_1 e λ_2, é não nulo) então a equação (C) descreve uma parábola, um par de retas paralelas, uma reta ou o conjunto vazio.*

Observação : $\lambda_1\lambda_2 = \det(Q^t A Q) = (\det Q^t)(\det A)(\det Q) = \det A = ac - b^2/4$. Logo, o resultado (teorema) acima pode ser enunciado substituindo a condição $\lambda_1\lambda_2 > 0$ por $b^2 - 4ac < 0$, $\lambda_1\lambda_2 < 0$ por $b^2 - 4ac > 0$ e $\lambda_1\lambda_2 = 0$ por $b^2 = 4ac$!

Exemplos: v. exemplos 7.4 e 7.5 do livro [1].

Identificação das Quádricas

A identificação da quádrica descrita pela equação (Q) é dado pelo Teorema 7.4 do livro [1], o qual pode ser concluído de maneira inteiramente análoga ao que foi exposto acima na identificação das cônicas.

Exemplos: v. exemplos 7.6 e 7.7 do livro [1].

Matriz Ortogonal e Rotação no Plano

Um matriz quadrada $Q = \begin{bmatrix} U_1 & \cdots & U_n \end{bmatrix}$ é chamada *ortogonal* se as suas colunas $U_1, \cdots, U_n$ formam um conjuntos de vetores ortonormais no $\mathbb{R}^n$ (no plano se $n = 2$, no espaço se $n = 3$) i.e.

$\|U_j\| = 1$, $U_j \cdot U_k = 0$ se $j \neq k$. No caso $n = 2$ (no plano), escrevendo

$$U_1 = (a_1, b_1) \text{ e } U_2 = (a_2, b_2),$$

temos $a_1^2 + b_1^2 = 1$, $a_2^2 + b_2^2 = 1$ e $U_1 \cdot U_2 = 0$, i.e. $U_1 = (a_1, b_1)$ e $U_2 = (a_2, b_2)$ são pontos do círculo unitário e ortogonais ($U_2 = \pm(-b_1, a_1)$) logo, existe um ângulo $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que $a_1 = \cos\theta$ e $b_1 = \sin\theta$. Se $U_2 = (-b_1, a_1)$, obtemos a matriz

$$Q = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Esta matriz é chamada *matriz de rotação*, pois os vetores $U_1 = (\cos\theta, \sin\theta)$, $U_2 = (-\sin\theta, \cos\theta)$ (o sistema de C.C. determinados pelos mesmos com origem em $(0,0)$) podem (pode) ser obtido dos vetores canônico $(1,0)$, $(0,1)$ (do sistema de C.C. xy) por uma rotação do ângulo θ positivo no sentido anti-horário. (A rotação do ângulo θ positivo no sentido horário, gera os vetores $U_1 = (\cos(-\theta), \sin(-\theta)) = (\cos\theta, -\sin\theta)$, $U_2 = (-\sin(-\theta), \cos(-\theta)) = (\sin\theta, \cos\theta)$.)

Referências

1. Santos, R. J. Matrizes, Vetores e Geometria Analítica. Disponível em www.mat.ufmg.br/ regi/gaalt/gaalt1.pdf. 2017 26

2. Santos, N. M. Vetores e Matrizes. 4a edição Tomson Learning. São Paulo, 2007.

J Jornal Eletrônico de Ensino e Pesquisa de Matemática
(1s.) **v. 1**, 1 (2017): 28–35. ©Jeepema – ISSN 2594-6323
www.dma.uem.br/kit/jeepema

O Teorema do Valor Médio

Angela Mognon – UTFPR
E-mail: amognon@utfpr.edu.br

Resumo: O Teorema do Valor Médio é um dos importantes resultados do Cálculo. Ele nos permite mostrar que podemos obter informações relevantes sobre uma determinada função por meio da sua derivada. Nestas notas apresentamos a demonstração do Teorema e dois exemplos que ilustram o resultado fazendo uso dos softwares Geogebra e Maple.

Palavras-chave: Teorema do Valor Médio. Maple. Geogebra. *

Sumário

1. Introducão

Um dos teoremas importantes no estudo introdutório do Cálculo Diferencial e Integral é o Teorema do Valor Médio (TVM), formulado pela primeira vez por Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), ele nos diz que se uma função f é contínua em um intervalo fechado $[a, b]$ e derivável em (a, b), então existirá um número $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Geometricamente isso signfica que se uma função f for contínua num intervalo fechado $[a, b]$ e derivável no intervalo aberto (a, b), então

* Publicado em 14-08-2017.

existe $c \in (a,b)$ tal que a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(c, f(c))$ é paralela à reta secante que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

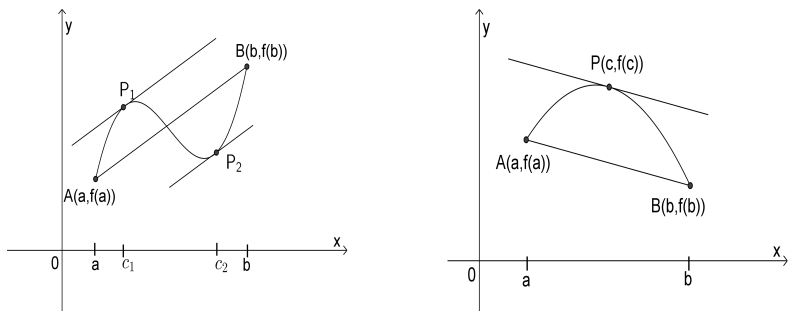


Figura 1: Ilustração do Teorema do Valor Médio.

Uma aplicação prática do TVM é a seguinte: se percorremos uma distância de 100km em 2 horas, em algum instante desse intervalo de tempo a nossa velocidade será de $50km/h$. Em outras palavras, se $s(t)$ representa a posição de um objeto em cada instante $t \in [a,b]$ então, em algum instante $t \in (a,b)$ teremos que

$$v_m = \frac{s(b) - s(a)}{b - a} = v(t) = s'(t).$$

O Teorema do Valor Médio permite obter propriedades da função por meio de sua derivada. Ele é utilizado para mostrar que uma função f é crescente sobre um intervalo aberto I se, e somente se, $f'(x) > 0, \forall x \in I$. Analogamente, a função f é decrescente sobre um intervalo aberto se, e somente se, $f'(x) < 0, \forall x \in I$.

Outra consequência é que se $f'(x) = g'(x)$, então $f(x) = g(x) + k$, para alguma constante k.

2. Enunciado e Demonstração

Antes da demonstração do Teorema do Valor Médio vamos demonstrar o Teorema de Rolle, este resultado garante, sob algumas condições, a existência de valores extremos de uma função no interior de um intervalo fechado.

Teorema 2.1. [Teorema de Rolle] Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e derivável no intervalo aberto (a, b). Se $f(a) = f(b)$ então, existe um número c em (a, b) tal que $f'(c) = 0$.

Demonstração: Se $f(x) = k$ é a função constante então, $f'(x) = 0$, logo o número c pode ser tomado com qualquer número em (a, b).

Se $f(x) > f(a)$ para algum $x \in (a, b)$, como f é contínua em $[a, b]$, pelo Teorema do Valor Extremo, f tem um valor máximo em algum ponto de $[a, b]$. Uma vez que $f(a) = f(b)$, ela deve assumir esse valor máximo em algum número c no intervalo aberto (a, b). Como f é derivável em (a, b), pelo Teorema de Fermat $f'(c) = 0$.

Analogamente, se $f(x) < f(a)$ para algum $x \in (a, b)$, pelo Teorema do Valor Extremo, f tem um valor mínino em $[a, b]$ e como $f(a) = f(b)$, ela deve assumir esse valor mínimo em algum número c no intervalo aberto (a, b), logo $f'(c) = 0$. $\square$

Teorema 2.2. [Teorema do Valor Médio] Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e derivável em (a, b). Então, existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{1}$$

Demonstração: Consideremos $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e derivável em (a, b) vamos mostrar que existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Para isso, vamos aplicar o Teorema de Rolle à função $H(x)$ definida como a diferença entre f e a reta secante que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$. Isto é,

$$H(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Temos que $H(x)$ é contínua em $[a, b]$, pois é a diferença de duas funções contínuas, e $H(x)$ é diferenciável em (a, b), pois é diferença de duas funções diferenciáveis. Além disso, $H(a) = H(b) = 0$. Portanto, $H(x)$ satisfaz as hipótese do Teorema de Rolle, logo existe $c \in (a, b)$ tal que $H'(c) = 0$. Assim,

$$0 = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Longrightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Isso conclui a demonstração do teorema. □

O Teorema do Valor Médio garante a existência de um valor $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

no entanto, não diz como encontrar esse valor.

A seguir apresentamos um exemplo ilustrando como encontrar tais valores, calculando numericamente o conjunto solução da equação.

3. Exemplo

Consideremos a função $f(x) = x^3 - x$. Uma vez que f é um polinômio, então ela é contínua e derivável para todo x; logo, é contínua em $[0, 2]$ e derivável em $(0, 2)$. Portanto, pelo Teorema do Valor Médio, existe um número c em $(0, 2)$ tal que

$$f(2) - f(0) = f'(c)(2 - 0) \Rightarrow 6 = (3c^2 - 1).2 = 6c^2 - 2,$$

o que nos dá $c^2 = \dfrac{4}{3}$, isto é, $c = \pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}$. Como c deve estar em $(0, 2)$, então $c = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Em geral, nas aulas de Cálculo o professor não se preocupa em resolver a equação 1 e elabora questões em que a resolução dessa equação não oferece dificuldades. Mas podemos usar algum software de matemática simbólica para antecipar e motivar os alunos nesse tópico e ao mesmo tempo explorar o cálculo de reta tangente ao gráfico de uma função.

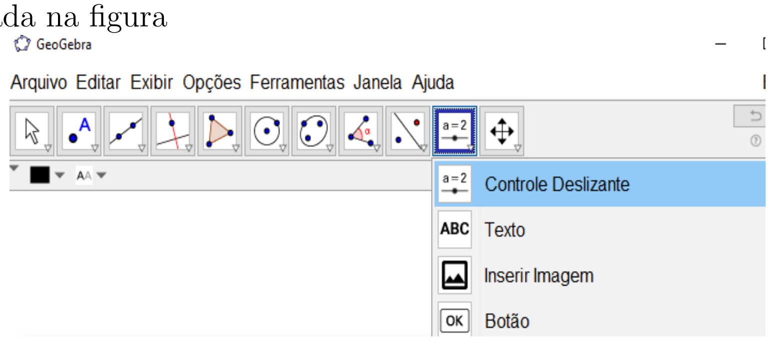
Uma alternativa para a resolução da equação 1 é utilizar algum método numérico, por exemplo, o método da Bissecção, que permite obter uma aproximação para a solução de uma equação não-linear $f(x) = 0$. Esse método está disponível on-line em http://www.dma.uem.br/kit/paginas/proced_numericos.

4. Usando Softwares

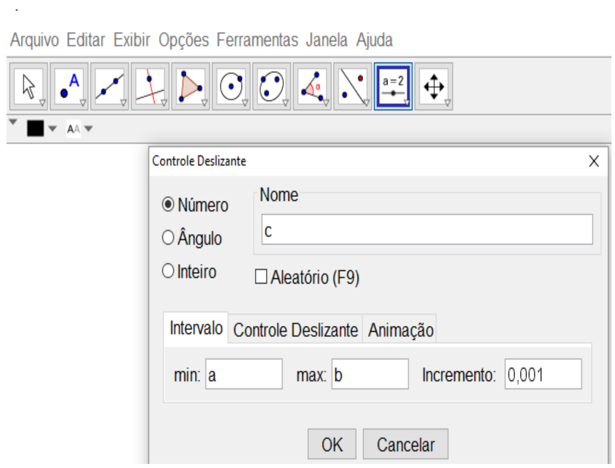
Nesta seção apresentamos duas atividades, a primeira elaborada no software Geogebra e a segunda usando Maple, que ilustram o Teorema do Valor Médio.

Atividade 1: Para a ilustração no Geogebra siga os seguintes passos:

1. Abra um arquivo novo no GeoGebra;
2. No campo de entrada digite os números $a = -2$ e $b = 2$;
3. Digite a função $g(x) = x^3 - x$;
4. No campo de entrada crie a função f escrevendo Função[g,a,b] no campo de entrada;
5. Na Janela de Álgebra clique no ponto ao lado da função g para esconder seu gráfico. Você pode mudar a cor e estilo da função f, clicando sobre ela com o botão direito e em seguida em propriedades;
6. Crie os pontos $A(a, f(a))$ e $B(b, f(b))$;
7. Trace a reta secante que passa pelos pontos A e B, escrevendo Reta[A,B] no campo de entrada. Renomeie por r_s, para isso clique com o botão direito sobre a reta e escolha a opção renomear e escreva r_s;
8. Determine a derivada de f, escrevendo Derivada[f] no campo de entrada. Esconda seu gráfico;
9. Crie um controle deslizante. Para isso utilize a ferramenta ilustrada na figura



escolha a opção *Controle Deslizante*. Clique na janela de visualização. Aparecerá a seguinte janela:



Nomeie de c, escreva a como valor mínimo e b como valor máximo e em Incremento escreva 0,001;

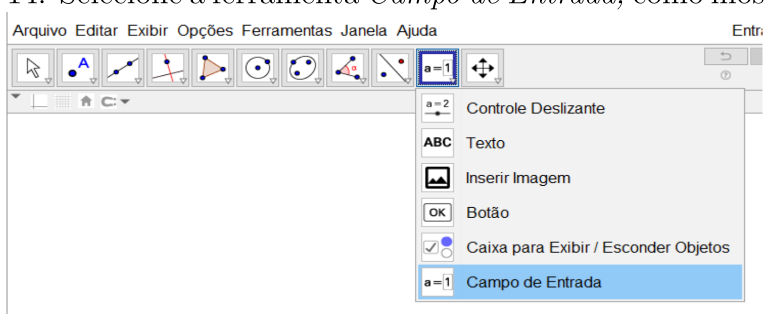
10. Crie o ponto $C(c, f(c))$;

11. Determine a reta tangente ao gráfico de f no ponto C, escrevendo $y - f(c) = f'(c)(x - c)$ no campo de entrada;

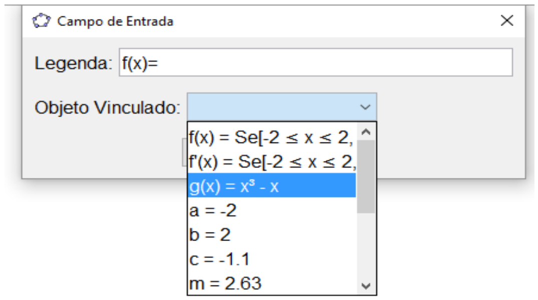
12. Determine a inclinação da reta secante r_s. Para isso, escreva Inclinação $[r\_s]$ no campo de entrada. Renomeie por m_s;

13. Analogamente ao passo 12, determine a inclinação da reta tangente e renomeie por m. Movimente o seletor c e observe o que acontece com a inclinação da reta tangente;

14. Selecione a ferramenta *Campo de Entrada,* como mostra a figura



Clique na janela de visualização e aparecerá a seguinte janela



Em legenda escreva $f(x) =$. Em objeto vinculado escolha a opção $g(x)$. Com esse passo podemos mudar a função mais facilmente. Podemos diminuir o tamanho do campo, clicando com o botão direito, escolhendo propriedades em seguida estilo;

15. Da mesma forma que no passo anterior podemos criar os campos de entrada para os extremos do intervalo a e b. Dessa forma podemos mudar mais facilmente os extremos do intervalo.

Podemos animar esta ilustração do TVM no Geogebra, para isso clique com o botão direito do mouse sobre o controle deslizante c e clique em *animar*.

Veja essa atividade pelo Geogebra `TVM.ggb`.

Atividade 2: Ilustração fazendo uso do Maple:

Para animar a ilustração no Maple use os seguintes comandos:

```
> restart;
>f := proc (x) options operator, arrow; x^4-2*x end proc;
> L := [[-2, f(-2)], [2, f(2)]];
> g := proc (x) options operator, arrow; 4*x^3-2 end proc;
> a := (f(2)-f(-2))/(2+2);
>fsolve(g(x) = a, x);
> t := proc (x) options operator, arrow; -2*x
end proc;
>plots[animate](plot, [[f(x), L, t(x)+k], x = -3 .. 3],
k = 0..16, thickness = 4);
```

Para ativar a animação, clique sobre a figura com o botão direito e selecione animation e, em seguida, play.

O Maple apresenta um aplicativo que ilustra o Teorema do Valor Médio, nele entramos com a função e o intervalo e ele nos fornece o valor de c, mas não apresenta opções para o cálculo de c. Para acessar o aplicativo clique em ferramentas, em seguida em tutoriais e escolha a opção Cálculo-uma variável e clique em Teorema do Valor Médio.

5. Agradecimentos

Parabenizo o professor Doherty Andrade pela iniciativa desse projeto e agradeço pela oportunidade de poder contribuir com seu trabalho.

Referências

1. Andrade, D. Cálculo Diferencial e Integral: um KIT de sobrevivência. Disponível em http://www.dma.uem.br/kit. 2017.
2. ANTON, H. Bivens, I. Dsvis, S. **Cálculo.**, 8ª Ed.. Porto Alegre: Bookman, 2007.
3. LEITHOLD, L. **O Cálculo com Geometria Analítica.**. V. Vol.1, 3ª Edição. São Paulo: Harbra, 1994.
4. STEWART, J. **Cálculo**. V.1, 7ª Edição. São Paulo: CENGAGE Learning, 2013.

Jornal Eletrônico de Ensino e Pesquisa de Matemática
(1s.) **v. 1**, 1 (2017): 36–43. ©Jeepema – ISSN 2594-6323
www.dma.uem.br/kit/jeepema

Aproximação de funções: polinômios de Bernstein

Medeiros, Heloisa B. (medeiros@mat.uff.br) & Menezes, M. Lucia (menezes@mat.uff.br)

Resumo: Esse artigo foi originalmente publicado como um artigo do Projeto Klein. Dentro desse contexto, se propõe a apresentar de forma leve e resumida os famosos Polinômios de Bernstein, muito usados para aproximar funções. O texto se insere no panorama da análise numérica fazendo algumas considerações sobre os aspectos positivos e negativos dessa aproximação. Também apresenta um esboço da demonstração de convergência desses polinômios, apresentada pelo próprio Bernstein, comentando sobre a possibilidade de sua utilização em uma demonstração construtiva do Teorema de Weirstrass.

Palavras-chave: Polinômios de Bersntein. Aproximação de funções. Convergência uniforme. *

Sumário

1. Introdução

Quando usamos alguma máquina para esboçar um gráfico ou determinar um valor como $e^{\sqrt{2}}$, não nos ocorre perguntar como são feitos os cálculos ou quão exatos são. Todavia, um sem número de pesquisas vem sendo desenvolvido para que estas informações sejam mais precisas e obtidas com maior rapidez.

* Publicado em 14-08-2017.

O surgimento dos processadores (em meados do século XX) colocou para a Matemática uma série de questões sobre como representar e calcular valores e funções. Em linhas gerais, sabemos que um processador só é capaz de fazer somas algébricas de modo que todos os cálculos, em última análise, devem se remeter a este tipo de operação. Produtos podem ser efetuados utilizando somas e, consequentemente, operações como elevar um valor a um número inteiro podem ser executadas. A possibilidade de calcular x^n torna o uso de polinômios uma ferramenta importantíssima em cálculos realizados por máquinas. Por exemplo, para calcular $\sqrt{3}$ pode ser conveniente usar um procedimento padrão (como método de Newton ou bisseção) para resolver $x^2 - 3 = 0$. Nem sempre se pode reduzir o problema ao cálculo da raiz de um polinômio, mas são muitos os usos dos polinômios nos compiladores, máquinas de calcular e softwares em geral. Um recurso utilizado em ampla escala é a aproximação de funções por polinômios. Eleger o método específico a ser usado depende muito das circunstâncias. A aproximação deve ser feita em um único ponto, ou em um intervalo? Qual o erro máximo que queremos? Qual o processador disponível? Que valor ou função deve ser aproximado ? A aproximação deve ter sensibilidade suficiente para captar singularidades isoladas?

Dentre os métodos possíveis, para funções contínuas, os polinômios de Bernstein se destacam por oferecerem uma aproximação uniforme. Como sempre, existe um preço a ser pago: a convergência não é muito rápida, quando comparada a outros métodos de aproximação polinomial. Mesmo assim, são de grande utilidade nos casos em que se necessita aproximar uma função em todo um intervalo como, por exemplo, no esboço de um gráfico. Vale, ainda, notar que os polinômios de Bernstein fornecem uma belíssima demonstração construtiva do Teorema de aproximação de Weierstrass.

Em todo este texto, $f(x)$ será uma função contínua no intervalo $[0,1]$.

2. Os Polinômios de Bernstein

Para definir os polinômios de Bernstein, lembramos da fórmula binomial:

$$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j b^{n-j} \tag{1}$$

Escolhemos agora $a = x$, $b = 1 - x$ e definimos $\beta_{nj}(x) := \binom{n}{j} x^j (1-x)^{n-j}$, $j = 0, 1, \cdots, n$. Dividimos o intervalo $[0,1]$ em n subintervalos, de igual tamanho, $[x_j, x_{j+1}]$, $j = 0, \cdots, n-1$, de modo que $x_j = \dfrac{j}{n}$. Avaliamos $f(x_j)$ em cada ponto e, com estas constantes, definimos o polinômio de Bernstein de grau n da função $f(x)$ como:

$$B_n(f;x) := \sum_{j=0}^{n} f(x_j)\beta_{nj}(x) \tag{2}$$

Observamos que o conjunto $\{B_{nj}(x)\}$, $j = 0, \cdots, n$, forma uma base para o espaço vetorial de polinômios de grau menor ou igual à n, e o polinômio de Bernstein é uma combinação linear dos elementos desta base. Para verificar isso, não é difícil ver que cada um dos elementos da base canônica $\{1, x, x^2, \cdots, x^n\}$ pode ser escrito como combinação linear dos $B_{nj}(x)$.

As *curvas de Bézier*, bem familiares aos que usam softwares gráficos, também são formadas como combinação linear de elementos desta base, embora Bézier e Bernstein tenham chegado aos seus resultados de forma independente.

A figura 1 ilustra algumas características da aproximação obtida pelos polinômios de Bernstein. Nos dois casos, o desenho apresenta o gráfico da função e os gráficos dos polinômios de Bernstein de graus 4, 8, 12 e 16. Primeiro, observamos que, diferentemente de outras aproximações polinomiais, o polinômio de Bernstein de grau n, em geral, não coincide com a função em um número n de pontos; ademais, mesmo quando a função é um polinômio de grau n, o n -ésimo polinômio de Bernstein não é a própria função (como seria, por exemplo, no caso do polinômio de Taylor). Não é difícil verificar que $f(1) = B_n(f;1)$ e $f(0) = B_n(f;0)$, o que está ilustrado nos gráficos. Todavia, a propriedade que queremos ressaltar aqui é que a velocidade de convergência será maior, se a variação da função for mais suave. Em ambos os casos, a imagem da função, como conjunto, é essencialmente a mesma e as propriedades gerais da curva também (isto é: é contínua, assume um único ponto de máximo, possui um ponto de inflexão, etc). Mas, no gráfico da esquerda, a variação na vizinhança do ponto de máximo é bem mais brusca. Não é difícil ver que o erro obtido nas aproximações (de mesmo grau) pelos polinômios, na vizinhança do ponto de máximo, é maior no primeiro caso. Este comportamento pode ser entendido observando propriedades das duas funções. Como a teoria está sendo desenvolvida para funções contínuas (classe C^0), grau de diferenciabilidade não é uma hipótese que se queira utilizar, a princípio, para medir "suavidade"de variação.

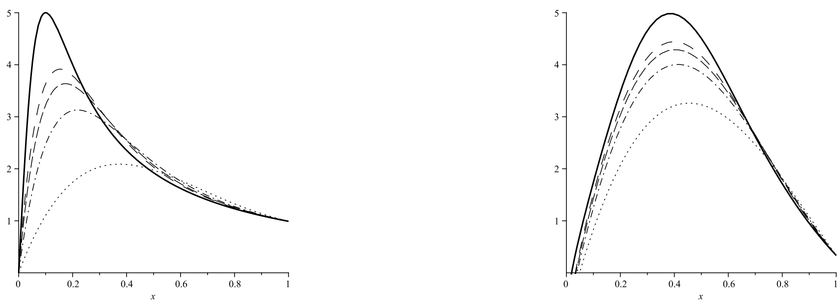


Figura 1: O gráfico da função é a curva sólida e as outras curvas são os polinômios de Bernstein de grau 4, 8, 12 e 16.

O conceito mais importante, por ora, é o de *módulo de continuidade* de uma função. Trata-se, grosso modo, de uma medida do "quão contínua"uma função é. Para fazer esta medida, subdividimos o intervalo [0, 1] em subintervalos de tamanho δ. Em cada um deles, medimos o maior salto de f e escolhemos o maior destes valores. Formalmente: O módulo de continuidade, em relação à δ, de uma função $f(x)$ no intervalo $[0,1]$, aqui denotado por $w(f;\delta)$ é definido como sendo:

$$w(f;\delta) = \sup_{|x-x'|\leq\delta} |f(x) - f(x')| \quad x, x' \in [0,1]$$

O Teorema 2.1 a seguir fornece uma estimativa da velocidade de convergência da aproximação obtida pelos polinômios de Bernstein, quando n aumenta. A demonstração do Teorema é bastante técnica e pode ser vista em [5].

Teorema 2.1. *Se $f(x)$ é uma função contínua em $[0,1]$, para todo $x \in [0,1]$, tem -se*

$$|f(x) - B_n(f;x)| \leq \frac{9}{4} w(f; \frac{1}{\sqrt{n}}).$$

Pelo gráfico, não é difícil ver que, para um mesmo δ, o módulo de continuidade da função é maior no gráfico da esquerda. A estimativa dada no teorema 2.1 pode ser melhorada, dependendo das propriedades da função, especialmente se houver algum grau de diferenciabilidade, em que pese não se conseguir estimativas excelentes.

A partir do Teorema 2.1 podemos construir polinômios que aproximam qualquer função contínua uniformemente. A existência de tais polinômios foi mostrada por Weierstrass no final do século XIX, que não os construiu, todavia. Usando o teorema anterior e tomando n suficientemente grande para termos $\frac{9}{4}w(f;\frac{1}{\sqrt{n}}) < \frac{4\epsilon}{\delta}$, obtém-se uma demonstração construtiva dos resultados de Weierstrass.

Como estamos falando de aproximações polinomiais que não envolvem interpolações, julgamos conveniente uma rápida comparação com a mais famosa delas (para funções de classe C^k): os polinômios de Taylor. Nas figuras 2, está o gráfico da função $f(x) = \text{ sen}^2(2\pi(x-1/2))$, de seu polinômio de Taylor de grau 4 em torno de $0,5$ e de seu polinômio de Bernstein de grau 4. Do lado esquerdo colocamos o detalhe da figura, restringindo os valores de x; do lado direito, aparecem os gráficos em todo o intervalo $[0,1]$. Chama atenção o fato de que a aproximação do polinômio de Taylor, muito boa na vizinhança em torno do qual é calculado $(0,5)$, tem um erro muito maior, quando nos afastamos deste ponto. Em geral, pode-se esperar este comportamento, embora existam exceções.

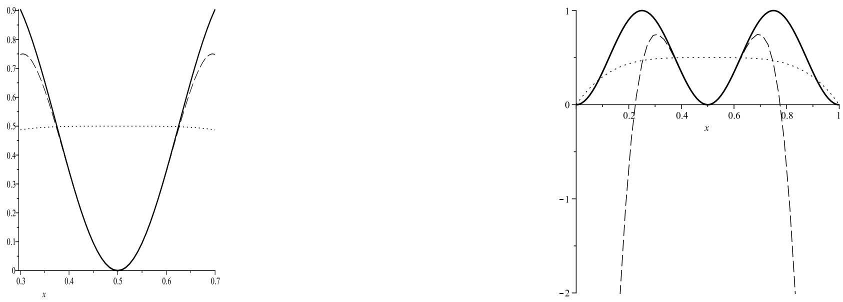


Figura 2: Polinômio de Bernstein (pontilhado) $\times$ polinômio de Taylor (tracejado).

A construção dos polinômios de Bernstein pode se tornar mais natural quando pensamos em teoria das probabilidades, como em [7]. Vamos imaginar que existe um experimento cujo resultado pode ter apenas as possibilidades A ou B e que A ocorre com probabilidade x, de modo que a probabilidade da ocorrência de B será $(1-x)$. Em n experimentos, a probabilidade do resultado ser A, j vezes (e B, $(n-j)$ vezes), será $x^j(1-x)^{(n-j)}$. j ocorrências de A podem vir em $\binom{n}{j}$ ordens diferentes e, assim, a probabilidade de termos j A's e $(n-j)$ B's, em qualquer ordem, será: $\binom{n}{j}x^j(1-x)^{(n-j)}$. Uma conta permite verificar que :

$$\beta_{nj}(x) = \left(\frac{n-j+1}{j}\right)\frac{x}{1-x}\beta_{n,j-1}(x) \tag{3}$$

Para cada x, olhamos $\beta_{nj}(x)$ como função de j e, da equação 3, verificamos que : $\beta_{nj}(x) > \beta_{n.j-1}(x)$ sse $j < (n+1)x$. Refraseando, Para x e n fixos, $\beta nj(x)$ terá um máximo quando $j = j_x = [(n+1)x]$, onde $[(n+1)x]$ é o maior inteiro menor ou igual a $(n+1)x$, e estimamos $j_x \approx nx$. Assim, $\beta_{nj}(x)$ cresce se $j < j_x$ e decresce se $j > j_x$. Logo, no somatório da definição de $B_n(f;x)$, os termos referentes aos valores de j longe de j_x são muito pequenos enquanto a contribuição dos outros termos é relevante. Vamos definir $J := \{j \text{ tais que } j \text{ está próximo de } j_x\}$. Dividimos o somatório em duas partes:

$$B_n(f;x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j)\beta_{nj}(x) = \mathcal{S}_1(x) + \mathcal{S}_2(x)$$

onde

$$\mathcal{S}_1(x) = \sum_{j\in J}\cdots \quad \mathcal{S}_2(x) = \sum_{j\notin J}\cdots$$

Desprezamos o segundo somatório porque seus termos são pequenos. Quanto ao primeiro, observamos que $x_j = \frac{j}{n}$ e que, em $\mathcal{S}_1$, j está próximo de $j_x \approx nx$. Se n for suficientemente grande, j próximo de j_x implicará $x_j = \dfrac{j}{n}$ próximo de $\dfrac{j_x}{n} = x_{j_x}$. Como f é contínua, x_j perto de x_{j_x} implicará $f(x_j)$ próximo de $f(x_{j_x})$. Mas, $f(x_{j_x}) = f(\frac{j_x}{n}) \approx f(\frac{nx}{n}) \approx f(x)$. Assim, escrevemos $\mathcal{S}_1 \approx \sum_{j\in J} f(x)\beta_{nj}(x)$. Mas $((x + (1-x))^n = \sum_{j=0}^{n}\beta_{nj}(x) = 1$ e, como estamos desprezando os termos β_{nj} em S_2, somos tentados a considerar $\mathcal{S}_1 \approx \sum_{j\in J} f(x)\beta_{nj}(x) = f(x)\sum_{j\in J}\beta_{nj}(x) \approx f(x)$ e teremos, então, $\lim_{n\mapsto\infty} B_n(f;x) = f(x)$. Tornar este argumento preciso (isto é,formalizar o argumento para demonstrar a convergência) exige um pouco mais de suor e contas e pode ser visto em [7].

3. Conclusão

Aproximações numéricas de funções são um tópico fascinante e são muitos os estudos em desenvolvimento sobre o tema. Os polinômios de Bernstein, tratados aqui, são mais usados no esboço de gráficos. Foram propostos por um matemático ucraniano, Sergei Natanovich Bernstein (falecido em 1968), que contribuiu com diversos resultados importantes para o desenvolvimento da matemática. Intimamente relacionadas aos polinômios de Bernstein são as curvas de Bézier, definidas por um grau n

e $(n+1)$ "pontos de controle "$P_0, P_1, \ldots, P_n$, dada por $B_n(t) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} t^j (1-t)^{n-j} P_j$. Essas curvas foram estudadas por Paul de Casteljau (físico e matemático da Citroen) que desenvolveu um algoritmo para obtê-las e por Pierre Bézier (um engenheiro e matemático da Renault) que as patenteou e as utilizou para desenhar automóveis, veja [3].

Os gráficos esboçados aqui foram feitos com o software Maple. São inúmeros os trabalhos sobre polinômios de Bernstein e aqui selecionamos alguns dando preferência à facilidade de acesso. Um resumo, em português, pode ser visto em [8]. No sítio de buscas virtuais de e-books [1] é possível encontrar diversos textos em formato pdf sobre os polinômios de Berstein. Citamos em particular [6] e [7], onde definições e propriedades dos polinômios são bastante explorados. A demonstração do Teorema 2.1 pode ser vista em [5] onde também se encontra um tratamento clássico e muito bem feito sobre aproximação numérica de funções. A demonstração do Teorema de Weierstrass, usando os polinômios de Bernstein pode ser encontrada em [4] ou em [2].

Referências

1. http://khup.com. 42

2. Sergei Bernstein. *Démonstration du théorème du Weierstrass fondé sur le calcul des probabilités* . Reprodução da demonstração original de Bernstein (em francês). Disponível em http://www.math.technion.ac.il/hat/fpapers/P03.PDF. 42

3. Bill Casseman. *From Bézier to Bernstein*. Web em 11/2008. Disponível em http://www.ams.org/samplings/feature-column/fcarc-bezier. 42

4. Alex Alves Dentamaro e Daniela Mariz Silva Vieira. *Teorema de Aproximação de Weierstrass*. Web em 15/11/2010. Disponível em http://www.prp.unicamp.br/pibic/congressos/xvicongresso/paineis/041705.pdf. 42

5. Eugene Isaacson and Herbert B. Keller. *Analysis Of Numerical Methods*. John Wiley & Sons, 1994. 39, 42

6. Kenneth I. Joy. *Bernstein Polynomials*. Web em 10/12/2010. Disponível em http://khup.com/view/1_keyword-bernstein-polynomial/bernstein-polynomials.html. On-Line Geometric Modeling Notes. Visualization and Graphics Research Group, Department of Computer Science. University of California, Davis. 42

7. George M. Phillips. *Interpolation and Approximation by Polynomials*. Springer, 1st edition, 2003. Capítulo sobre polinômios de Bernstein. Disponível em

http://khup.com/view/4_keyword-bernstein-polynomial/bernstein-polynomials.html em dez 2010. 40, 41, 42

8. Wikipedia. Polinômios de bernstein. Web em 15/11/2010. Disponível em http://pt.wikipedia.org/wiki/Polinômios_de_Bernstein,. 42

Endereço:

Medeiros, Heloisa B. (medeiros@mat.uff.br) & Menezes, M. Lucia (menezes@mat.uff.br)

UFF - IME – GMA

Rua Mário Santos Braga s/n –Valonguinho – 24020-140 Niteroi Rio de Janeiro -RJ.

Jornal Eletrônico de Ensino e Pesquisa de Matemática
(1s.) **v. 1**, 1 (2017): 44–98. ©Jeepema – ISSN 2594-6323
www.dma.uem.br/kit/jeepema

Funções elementares no conjunto dos quatérnios: Abordagem por série de potências

Sandro Marcos Guzzo –Email: smguzzo@gmail.com & Naísa Camila Garcia Tosti (Unioste-Pr)

Resumo: Os números quatérnios possuem muitas aplicações, em particular, na computação gráfica para descrever movimentos tridimensionais. Neste trabalho estamos interessados na construção deste conjunto e em suas propriedades. Vamos apresentar o conjunto dos quatérnios, provar as principais propriedades das operações de adição e multiplicação, e apresentar uma construção para algumas funções elementares a valores quatérnios.

Palavras-chave: Quatérnios. Números Complexos. [*]

Sumário

[*] Publicado em 14-08-2017.

1. Introdução

Os números complexos, surgiram da necessidade de se determinar raízes de equações do segundo grau do tipo $x^2 + 1 = 0$, pois, não existe número real x que satisfaça esta igualdade. Depois de construído o conjunto dos números complexos, eles se tornaram um excelente método para resolver problemas em diversas áreas. Estes números se tornaram muito úteis nas rotações e reflexões no plano. Então, uma pergunta natural surge: É possível construir um novo conjunto numérico que ofereça propriedades similares às dos complexos no plano, para o espaço?

Hamilton, aceitou o desafio, e inicialmente buscou desenvolver uma álgebra para tripletos (x, y, z).

Hamilton buscou definir a soma e o produto desses números triplos obedecendo as mesmas regras da soma e da multiplicação dos pares numéricos e esperava que isso levasse a translações e a rotações no espaço, da mesma forma que acontecia com os pares numéricos no plano. Ele observou que i é um segmento perpendicular a 1, então é normal que haja outra unidade imaginária perpendicular às duas anteriores, e definiu j assumindo que esta também satisfaz $j^2 = -1$, pois isso levaria, quando do produto de 1 por j^2, a uma rotação de 180° obtendo -1, porém essa rotação aconteceria no plano xOz, enquanto que o produto de 1 por i^2 numa rotação de 180° no plano xOy e desse modo o tripleto tomou a forma $x + yi + zj$ [2].

Definir a soma de tripletos não foi difícil, já que procedendo de modo análogo aos complexos temos

$$(a + bi + cj) + (x + yi + zj) = (a + x) + (b + y)i + (c + z)j.$$

Porém, se definirmos a multiplicação similar à dos complexos, e assumindo a comutatividade da multiplicação entre as componentes i e j, temos

$$(a + bi + cj) \cdot (x + yi + zj) = (ax - by - cz) + (ay + bx)i + (az + cx)j + (bz + cy)ij,$$

que em princípio não é um tripleto pois aparece o fator ij. Hamilton tentou defini-lo de várias formas para que a multiplicação de tripletos fosse fechada, no entanto, não obteve êxito.

Hamilton continuou com sua pesquisa e percebeu que era necessária a existência de outro termo, k, definido da mesma maneira que j, isto é, $k^2 = -1$ e k deveria ser perpendicular simultaneamente a i e a j. E definiu os números da forma $x + yi + zj + wk$ como quatérnios. Neste caso, a multiplicação e a soma são fechados, porém a multiplicação não é comutativa.

Os números quatérnios possuem muitas aplicações práticas. Em particular são usados em computação gráfica para descrever movimentos tridimensionais. Neste trabalho estamos mais preocupados com a construção deste conjunto e com as propriedades destes números. Desta forma, nosso objetivo principal é apresentar o conjunto dos quatérnios, provar as principais propriedades das operações de adição e multiplicação destes números, e apresentar uma construção para algumas funções elementares a valores quatérnios.

2. O conjunto dos quatérnios

Nesta seção apresentaremos a definição de um número quatérnio e as principais notações envolvendo o conjunto dos quatérnios e os números quatérnios.

Definição 1. O conjunto dos números quatérnios, denotado por $\mathbb{H}$, é formado por todos os números da forma $q = a + bi + cj + dk$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e i, j e k satisfazendo as relações $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = k$ e $ji = -k$.

Desta definição, temos que

$$ijk = (ij)k = kk = k^2 = -1,$$

e com isto,

$$\begin{aligned} ik &= i(ij) = i^2 j = -j, \\ ki &= -j^2(ki) = -j(jk)i = -jii = -j(-1) = j, \\ jk &= -i^2(jk) = -iijk = -i(ijk) = -i(-1) = i, \\ kj &= (ij)j = i(j^2) = -i. \end{aligned}$$

Observe que para definir os produtos ik, ki, jk e kj, é assumida a associatividade da multiplicação das componentes i, j e k.

De maneira prática, segundo [1], podemos realizar a multiplicação das unidades com base no diagrama abaixo. Neste diagrama, a multiplicação de quaisquer duas unidades no sentido anti-horário é a terceira unidade, e a multiplicação de quaisquer duas unidades no sentido horário é o oposto da terceira unidade.

$$\begin{tikzcd} & i \arrow[dl] & \\ j \arrow[rr] & & k \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

Identificando $bi + cj + dk$ com o vetor $\vec{u} = (b, c, d) \in \mathbb{R}^3$, podemos representar qualquer $q \in \mathbb{H}$ por uma das seguintes formas,

$$q = a + bi + cj + dk = a + (b, c, d) = a + \vec{u} = (a, \vec{u}).$$

A expressão $q = a + bi + cj + dk$ é dita forma algébrica de um quatérnio e a expressão $q = a + \vec{u}$ é dita forma vetorial de um quatérnio.

Definição 2. Dado um quatérnio $q = a + bi + cj + dk = a + \vec{u}$, definimos a parte real de q como sendo o número real a, e denotamos por $Re(q) = a$. Também definimos a parte imaginária ou parte vetorial de q por $Im(q) = bi + cj + dk = (b, c, d) = \vec{u}$.

Definição 3. Dois números quatérnios $q = a + bi + cj + dk$ e $r = x + yi + zj + wk$ são ditos iguais, e escrevemos $q = r$, se e somente se, $a = x$, $b = y$, $c = z$ e $d = w$. De outra forma, $q = r$, se e somente se, $Re(q) = Re(r)$ e $Im(q) = Im(r)$.

Fica claro da definição anterior que, considerando a forma vetorial de um quatérnio, se $q = a + \vec{u}$ e $r = x + \vec{v}$ então $q = r$ se e somente se $a = x$ e $\vec{u} = \vec{v}$.

3. Álgebra dos quatérnios

Definição 4. Definimos a adição entre quatérnios como sendo a aplicação

$$+ : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \quad \to \quad \mathbb{H}$$

que a cada par de quatérios $q = a + bi + cj + dk = a + \vec{u}$ e $r = x + yi + zj + wk = x + \vec{v}$, associa o quatérnio denotado por $q + r$, denominado resultado da adição de q com r, e dado por

$$\begin{aligned} q + r &= (a + bi + cj + dk) + (x + yi + zj + wk) \\ &= (a + x) + (b + y)i + (c + z)j + (d + w)k, \end{aligned}$$

ou equivalentemente na forma vetorial,

$$q + r = (a + \vec{u}) + (x + \vec{v}) = (a + x) + (\vec{u} + \vec{v}).$$

Fica claro da definição anterior que consideramos a adição de dois vetores $\vec{u} = bi + cj + dk = (b, c, d)$ e $\vec{v} = yi + zj + wk = (y, z, w)$ como sendo a adição convencional da geometria analítica $(\vec{u} + \vec{v}) = (b + y)i + (c + z)j + (d + w)k = (b + y, c + z, d + w)$.

A seguir provaremos algumas propriedades da adição de quatérnios. É conveniente, por uma questão de simplicidade da notação, utilizar a forma vetorial para as demonstrações que se seguirão. Desta forma usaremos então propriedades envolvendo a adição de vetores no espaço $\mathbb{R}^3$. Em particular, lembremos que a adição de vetores é associativa e comutativa, isto é, $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$ e $(\vec{u}+\vec{v})=(\vec{v}+\vec{u})$ respectivamente, para quaisquer que sejam $\vec{u},\vec{v},\vec{w}\in\mathbb{R}^3$.

Proposição 5. *A adição de quatérnios é associativa, isto é,*

$$(q+r)+s=q+(r+s),$$

para quaisquer que sejam $q,r,s\in\mathbb{H}$.

Demonstração. Dados $q=a+\vec{u}$, $r=b+\vec{v}$ e $s=c+\vec{w}$, quatérnios arbitrários, temos

$$\begin{aligned}(q+r)+s &= ((a+\vec{u})+(b+\vec{v}))+(c+\vec{w})\\ &= ((a+b)+(\vec{u}+\vec{v}))+(c+\vec{w})\\ &= ((a+b)+c)+((\vec{u}+\vec{v})+\vec{w})\\ &= (a+(b+c))+(\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w}))\\ &= (a+\vec{u})+((b+c)+(\vec{v}+\vec{w}))\\ &= (a+\vec{u})+((b+\vec{v})+(c+\vec{w}))=q+(r+s).\end{aligned}$$

□

Proposição 6. *A adição de quatérnios é comutativa, isto é,*

$$q+r=r+q,$$

para quaisquer que sejam $q,r\in\mathbb{H}$.

Demonstração. Dados $q=a+\vec{u}$ e $r=b+\vec{v}$, quatérnios arbitrários, temos

$$\begin{aligned}q+r &= (a+\vec{u})+(b+\vec{v})\\ &= (a+b)+(\vec{u}+\vec{v})\\ &= (b+a)+(\vec{v}+\vec{u})\\ &= (b+\vec{v})+(a+\vec{u})=r+q.\end{aligned}$$

□

Proposição 7. *Existe $r \in \mathbb{H}$ de forma que $q + r = r + q = q$, para todos $q \in \mathbb{H}$.*

Demonstração. Dado $q = a + \vec{u} \in \mathbb{H}$ arbitrário, queremos encontrar $r = x + \vec{w}$ de forma que $q + r = q$. A igualdade $r + q = q$ ficará automaticamente satisfeita em virtude da comutatividade da adição.

Para que a igualdade $q + r = q$ seja satisfeita devemos ter

$$(a + \vec{u}) + (x + \vec{w}) = (a + \vec{u}),$$

ou ainda

$$(a + x) + (\vec{u} + \vec{w}) = (a + \vec{u}),$$

e da igualdade de quatérnios, devemos ter

$$a + x = a, \qquad \text{e} \qquad \vec{u} + \vec{w} = \vec{u}.$$

Como estas últimas igualdades são igualdades entre números reais, e entre vetores de $\mathbb{R}^3$, existem $x \in \mathbb{R}$, e $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$ a saber $x = 0$ e $\vec{w} = \vec{0}$, que cumprem estas duas igualdades simultaneamente para todos $a \in \mathbb{R}$ e $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$.

Segue que existe $r = 0 + 0i + 0j + 0k = 0 + \vec{0} \in \mathbb{H}$ de forma que $q + r = r + q = q$ para todos $q \in \mathbb{H}$. □

O elemento $(0 + \vec{0}) \in \mathbb{H}$ a que se refere a proposição anterior é chamado de elemento neutro da adição no conjunto $\mathbb{H}$. É comum chamar também o elemento neutro de elemento nulo, ou zero do conjunto. Sendo assim, deste ponto em diante, o elemento $(0 + \vec{0}) \in \mathbb{H}$ será chamado de zero e representado por $0_{\mathbb{H}}$ ou simplesmente 0 quando não houver dúvida que $0 \in \mathbb{H}$. Então, $0 = 0_{\mathbb{H}} = 0 + \vec{0} = 0 + 0i + 0j + 0k \in \mathbb{H}$ é o (único) elemento que cumpre $0 + q = q + 0 = q$ para qualquer que seja $q \in \mathbb{H}$.

Definição 8. Definimos $\mathbb{H}^*$ como sendo o conjunto formado por todos os quatérnios não nulos, ou seja, $\mathbb{H}^* = \mathbb{H} - \{0_{\mathbb{H}}\} = \mathbb{H} - \{0\}$.

Proposição 9. *Todo número quatérnio admite simétrico para a adição, isto é, dado qualquer $q \in \mathbb{H}$, existe $r \in \mathbb{H}$, de forma que $q + r = r + q = 0$.*

Demonstração. Dado $q = a + \vec{u} \in \mathbb{H}$ arbitrário, queremos obter $r = x + \vec{w} \in \mathbb{H}$ de forma que $q + r = 0$. A igualdade $r + q = 0$ ficará garantida pela comutatividade da adição.

Para que $q + r = 0$ seja satisfeita, queremos então que

$$(a + \vec{u}) + (x + \vec{w}) = 0 = 0 + \vec{0},$$

ou ainda

$$(a + x) + (\vec{u} + \vec{w}) = 0 + \vec{0}.$$

Segue da igualdade de quatérnios que, desejamos encontrar $x \in \mathbb{R}$ e $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$ de forma que

$$x + a = 0, \qquad \text{e} \qquad \vec{u} + \vec{w} = \vec{0},$$

para $a \in \mathbb{R}$ e $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$. Da igualdade de números reais, existe $x \in \mathbb{R}$, a saber, $x = -a$, que cumpre a igualdade desejada. Também da igualdade de vetores de $\mathbb{R}^3$, segue que existe $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$, que é precisamente $\vec{w} = -\vec{u}$, e que cumpre a igualdade desejada.

Assim, dado qualquer $q = a + \vec{u} \in \mathbb{H}$, existe $r = (-a) + (-\vec{u}) \in \mathbb{H}$ de forma que $q + r = r + q = 0$. □

O elemento $r \in \mathbb{H}$ a que se refere a última proposição é chamado de elemento simétrico de $q \in \mathbb{H}$ para a adição no conjunto $\mathbb{H}$. Deste ponto em diante, o elemento $(-a) + (-\vec{u}) = (-a) + (-b)i + (-c)j + (-d)k \in \mathbb{H}$ será chamado de simétrico de $q = (a + \vec{u}) = (a + bi + cj + dk) \in \mathbb{H}$, denotado simplesmente por $(-q)$ e representado comumente por $-q = -(a + \vec{u}) = -a - \vec{u} = -a - bi - cj - dk$. De qualquer forma, $-q \in \mathbb{H}$ é o (único) elemento que cumpre $(-q) + q = q + (-q) = 0$.

Sob o ponto de vista da álgebra, do que temos até agora, o par ordenado $(\mathbb{H}, +)$ é um grupo abeliano.

Definição 10. Dados $q, r \in \mathbb{H}$ com $q = a + bi + cj + dk = a + \vec{u}$ e $r = x + yi + zj + wk = x + \vec{v}$, definimos a diferença de q com r, como sendo o quatérnio denotado por $(q - r)$, e dado por

$$\begin{aligned} q - r = q + (-r) &= (a + bi + cj + dk) + ((-x) + (-y)i + (-z)j + (-d)k) \\ &= (a - x) + (b - y)i + (c - z)j + (d - w)k, \end{aligned}$$

ou equivalentemente,

$$q - r = (a + \vec{u}) + ((-x) + (-\vec{v})) = (a - x) + (\vec{u} - \vec{v}).$$

Definição 11. Definimos a multiplicação de um quatérnio por um escalar real como sendo a aplicação

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{H} \quad \to \quad \mathbb{H},$$

que a cada escalar (real) α e cada quatérnio $q = a + bi + cj + dk = a + \vec{u}$, associa o quatérnio representado por (αq), dado por

$$\alpha q = \alpha(a + bi + cj + dk) = (\alpha a) + (\alpha b)i + (\alpha c)j + (\alpha d)k,$$

ou equivalentemente na forma vetorial,

$$\alpha q = \alpha(a + \vec{u}) = \alpha a + \alpha \vec{u}.$$

Fica claro da definição anterior que estamos admitindo que a multiplicação de um vetor $\vec{u} = bi + cj + dk = (b, c, d) \in \mathbb{R}^3$ por um escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ é a multiplicação usual da geometria analítica $\alpha\vec{u} = (\alpha b)i + (\alpha c)j + (\alpha d)k = (\alpha b, \alpha c, \alpha d)$.

Definição 12. A multiplicação entre quatérnios é a aplicação

$$\cdot : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \quad \to \quad \mathbb{H},$$

que a cada par de números quatérnios $q = a + bi + cj + dk = a + \vec{u}$ e $r = x + yi + zj + wk = x + \vec{v}$, associa o quatérnio denotado por $q \cdot r$ ou por qr, denominado resultado da multiplicação, ou produto de q com r, e dado por

$$\begin{aligned} qr &= (a + bi + cj + dk) \cdot (x + yi + zj + wk) \\ &= (ax - by - cz - dw) + (ay + bx + cw - dz)i \\ &\qquad + (az - bw + cx + dy)j + (aw + bz - cy + dx)k, \end{aligned}$$

ou equivalentemente na forma vetorial,

$$qr = (a + \vec{u}) \cdot (x + \vec{v}) = (ax - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle) + (a\vec{v} + x\vec{u} + \vec{u} \times \vec{v}),$$

sendo que $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ representa o produto escalar (ou produto interno), e $(\vec{u} \times \vec{v})$ representa o produto vetorial, entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ em $\mathbb{R}^3$.

Embora a multiplicação entre dois quatérnios possa parecer complicada, basta observar que esta multiplicação segue da ideia da distributividade da multiplicação em relação à adição e considerando que $ii = jj = kk = -1$, $ij = k$, $ji = -k$, $jk = i$,

$kj = -i$, $ki = j$ e $ik = -j$. A expressão vetorial para a multiplicação é conseguida diretamente da expressão algébrica levando em conta as igualdades $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = (by + cz + dw)$ e $(\vec{u} \times \vec{v}) = (cw - dz, dy - bw, bz - cy)$ para $\vec{u} = (b, c, d)$ e $\vec{v} = (y, z, w)$ em $\mathbb{R}^3$.

Proposição 13. *A multiplicação de quatérnios não é comutativa, isto é, existem q e r tais que, $qr \neq rq$.*

Demonstração. Basta ver que $ij = k$ e $ji = -k$. □

No que se segue provaremos algumas propriedades da multiplicação de quatérnios. Propriedades estas que tornarão este conjunto um "quase" corpo. É conveniente, também para a multiplicação, utilizar a forma vetorial para as demonstrações, em virtude da expressão mais curta. Em contrapartida, precisaremos utilizar propriedades envolvendo os produtos vetorial e escalar entre vetores de $\mathbb{R}^3$. A próxima proposição reúne alguns destes resultados. Não demonstraremos estes resultados aqui mas o leitor interessado na demonstração pode consultar algum texto de geometria analítica ou de álgebra linear. Recomendamos [3].

Proposição 14. *Se $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ são vetores arbitrários e $\alpha \in \mathbb{R}$, então*

i) $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$;

ii) $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u}) = (-\vec{v}) \times \vec{u} = \vec{v} \times (-\vec{u})$;

iii) $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) + (\vec{u} \times \vec{w})$;

iv) $\langle \vec{u}, \vec{v} + \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle$;

v) $\vec{u} \times (\alpha \vec{v}) = \alpha(\vec{u} \times \vec{v}) = (\alpha \vec{u}) \times \vec{v}$;

vi) $\langle \vec{u}, \vec{v} \times \vec{w} \rangle = \langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle$;

vii) $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle \vec{v} - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \vec{w}$.

Aparentemente a associatividade da multiplicação de quatérnios seria consequência, entre outras propriedades, da associatividade do produto vetorial. Fato este que não ocorre. Entretanto é possível conseguir algum tipo de associatividade do produto vetorial, com termos compensadores. Este resultado é enunciado no próximo lema e será necessário para a prova da associatividade da multiplicação de quatérnios.

Lema 15. *Se $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ são vetores arbitrários, então*

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \vec{w} = \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) - \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \vec{u}.$$

Demonstração. Dados quaisquer $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned}
(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \vec{w} &= -(\vec{w} \times (\vec{u} \times \vec{v})) - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \vec{w} \\
&= -\left(\langle \vec{w}, \vec{v} \rangle \vec{u} - \langle \vec{w}, \vec{u} \rangle \vec{v} \right) - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \vec{w} \\
&= \langle \vec{w}, \vec{u} \rangle \vec{v} - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \vec{w} - \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle \vec{u} \\
&= \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle \vec{v} - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \vec{w} - \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \vec{u} = \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) - \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \vec{u}.
\end{aligned}$$

□

Proposição 16. *A multiplicação de quatérnios é associativa, isto é, para quaisquer $q, r, s \in \mathbb{H}$, tem-se $q(rs) = (qr)s$.*

Demonstração. Suponha que $q = (a + \vec{u})$, $r = (b + \vec{v})$ e $s = (c + \vec{w})$ são quatérnios arbitrários. Então

$$\begin{aligned}
(qr)s &= \left[(a + \vec{u})(b + \vec{v}) \right] (c + \vec{w}) \\
&= \left[(ab - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle) + (a\vec{v} + b\vec{u} + (\vec{u} \times \vec{v})) \right] (c + \vec{w}) \\
&= (ab - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle c - \langle a\vec{v} + b\vec{u} + \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle \\
&\qquad + (ab - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \vec{w} + c(a\vec{v} + b\vec{u} + (\vec{u} \times \vec{v})) + ((a\vec{v} + b\vec{u} + (\vec{u} \times \vec{v})) \times \vec{w}) \\
&= abc - c\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle - a\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle - b\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle - \langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle \\
&\qquad + ab\vec{w} - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \vec{w} + ca\vec{v} + cb\vec{u} + c(\vec{u} \times \vec{v}) + a(\vec{v} \times \vec{w}) + b(\vec{u} \times \vec{w}) + ((\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}) \\
&= abc - a\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle - b\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle - c\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle - \langle \vec{u}, \vec{v} \times \vec{w} \rangle \\
&\qquad + ab\vec{w} + ac\vec{v} + a(\vec{v} \times \vec{w}) + bc\vec{u} - \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \vec{u} + b(\vec{u} \times \vec{w}) + c(\vec{u} \times \vec{v}) + (\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})) \\
&= a(bc - \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle) - \langle \vec{u}, b\vec{w} + c\vec{v} + (\vec{v} \times \vec{w}) \rangle \\
&\qquad + a(b\vec{w} + c\vec{v} + (\vec{v} \times \vec{w})) + (bc - \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle)\vec{u} + (\vec{u} \times (b\vec{w} + c\vec{v} + (\vec{v} \times \vec{w}))) \\
&= (a + \vec{u}) \left[(bc - \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle) + (b\vec{w} + c\vec{v} + (\vec{v} \times \vec{w})) \right] \\
&= (a + \vec{u}) \left[(b + \vec{v})(c + \vec{w}) \right] = q(rs).
\end{aligned}$$

□

Proposição 17. *A multiplicação de quatérnios é distributiva em relação à adição. De outra forma, se $q, r, s \in \mathbb{H}$ então*

$$s(q + r) = sq + sr,$$

e também

$$(q+r)s = qs + rs.$$

Demonstração. Sejam $q = a + \vec{u}$, $r = b + \vec{v}$ e $s = c + \vec{w}$ arbitrários. Então

$$\begin{aligned}
s(q+r) &= (c+\vec{w})\left[(a+\vec{u}) + (b+\vec{v})\right] \\
&= (c+\vec{w})\left[(a+b) + (\vec{u}+\vec{v})\right] \\
&= (c(a+b) - \langle \vec{w}, \vec{u}+\vec{v}\rangle) + c(\vec{u}+\vec{v}) + (a+b)\vec{w} + \vec{w}\times(\vec{u}+\vec{v}) \\
&= ca + cb - \langle \vec{w}, \vec{u}\rangle - \langle \vec{w}, \vec{v}\rangle + c\vec{u} + c\vec{v} + a\vec{w} + b\vec{w} + \vec{w}\times\vec{u} + \vec{w}\times\vec{v} \\
&= (ca - \langle \vec{w}, \vec{u}\rangle) + (c\vec{u} + a\vec{w} + \vec{w}\times\vec{u}) + (cb - \langle \vec{w}, \vec{v}\rangle) + (c\vec{v} + b\vec{w} + \vec{w}\times\vec{v}) \\
&= [(c+\vec{w})(a+\vec{u})] + [(c+\vec{w})(b+\vec{v})] \\
&= sq + sr,
\end{aligned}$$

e também,

$$\begin{aligned}
(q+r)s &= \left[(a+\vec{u}) + (b+\vec{v})\right](c+\vec{w}) \\
&= \left[(a+b) + (\vec{u}+\vec{v})\right](c+\vec{w}) \\
&= ((a+b)c - \langle \vec{u}+\vec{v}, \vec{w}\rangle) + (a+b)\vec{w} + c(\vec{u}+\vec{v}) + (\vec{u}+\vec{v})\times\vec{w} \\
&= (ac + bc - \langle \vec{u}, \vec{w}\rangle - \langle \vec{v}, \vec{w}\rangle) + a\vec{w} + b\vec{w} + c\vec{u} + c\vec{v} + \vec{u}\times\vec{w} + \vec{v}\times\vec{w} \\
&= (ac - \langle \vec{u}, \vec{w}\rangle) + (a\vec{w} + c\vec{u} + \vec{u}\times\vec{w}) + (bc - \langle \vec{v}, \vec{w}\rangle) + (b\vec{w} + c\vec{v} + \vec{v}\times\vec{w}) \\
&= [(a+\vec{u})(c+\vec{w})] + [(b+\vec{v})(c+\vec{w})] \\
&= qs + rs.
\end{aligned}$$

□

Do ponto de vista da álgebra, a terna ordenada $(\mathbb{H}, +, \cdot)$ é um anel, isto é, a adição é associativa, comutativa, admite elemento neutro, e todo elemento admite simétrico, e a multiplicação é associativa e distributiva em relação à adição. É também claro que $(\mathbb{H}, +, \cdot)$ não poderá ser corpo já que a multiplicação não é comutativa. Entretanto, provaremos ainda que $\mathbb{H}$ possui unidade, e que todo elemento não nulo é invertível.

Para os próximos resultados, vamos utilizar também propriedades de módulo (ou norma), de um vetor de $\mathbb{R}^3$. Lembremos que se $\vec{u} = (b, c, d) \in \mathbb{R}^3$, então $|\vec{u}| = \sqrt{b^2 + c^2 + d^2}$. A próxima proposição reúne alguns resultados envolvendo o módulo de um vetor em $\mathbb{R}^3$. A demonstração destas igualdades pode ser encontrada em [3].

Proposição 18. *Se $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ são vetores arbitrários e $\alpha \in \mathbb{R}$, então*

i) $|\vec{u}| \geq 0$, *e além disso,* $|\vec{u}| = 0$ *se e somente se* $\vec{u} = 0$;

ii) $|\alpha\vec{u}| = |\alpha||\vec{u}|$;

iii) $|\vec{u}|^2 = \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle$;

iv) (Desigualdade de Cauchy-Schwarz) $|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| \leq |\vec{u}||\vec{v}|$;

v) (Desigualdade triangular) $|\vec{u} + \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|$;

vi) $|\vec{u} + \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + |\vec{v}|^2$;

vii) $|\vec{u} + \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2$, *se e somente se,* $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$ *são ortogonais;*

viii) $|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^2$.

A definição de vetores ortogonais, a que nos referimos nesta última proposição, é determinada pela condição $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$, isto é, dois vetores são ortogonais se e somente se o produto escalar entre eles é igual a zero. Mas notemos que $\langle \vec{0}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{0} \rangle = 0$ para quaisquer $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ e portanto entenderemos que ao dizer que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais pode ocorrer que pelo menos um deles seja o vetor nulo.

Proposição 19. *A operação de multiplicação no conjunto dos quatérnios admite elemento neutro. De outra forma, existe $r \in \mathbb{H}$ tal que $qr = rq = q$ para todos $q \in \mathbb{H}$.*

Demonstração. Queremos encontrar $r = x + \vec{w} \in \mathbb{H}$ de tal forma que

$$qr = rq = q,$$

para todos $q = a + \vec{u} \in \mathbb{H}$.

Da igualdade $qr = q$, temos que

$$(a + \vec{u})(x + \vec{w}) = (ax - \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle) + (a\vec{w} + x\vec{u} + (\vec{u} \times \vec{w})) = a + \vec{u},$$

e da igualdade de quatérnios queremos obter x e $\vec{w}$ de forma que

$$\begin{cases} ax - \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle = a \\ a\vec{w} + x\vec{u} + (\vec{u} \times \vec{w}) = \vec{u}. \end{cases} \tag{1}$$

Da segunda equação em (1), temos que

$$a\vec{w} + (x-1)\vec{u} + (\vec{u} \times \vec{w}) = \vec{0},$$

e desta forma existem escalares, não todos nulos, tais que a combinação linear dos vetores $\vec{w}$, $\vec{u}$ e $(\vec{u} \times \vec{w})$, resulta no vetor nulo. Segue que os três vetores envolvidos são linearmente dependentes. Como o vetor $(\vec{u} \times \vec{w})$ é simultaneamente ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{w}$ então para que os três vetores sejam linearmente dependentes deve ocorrer que $\vec{u}$ e $\vec{w}$ sejam linearmente dependentes. O vetor procurado $\vec{w}$, deve então satisfazer $\vec{w} = \alpha\vec{u}$, para algum escalar $\alpha \in \mathbb{R}$.

Substituindo isto na segunda equação de (1), e levando em conta que $(\vec{u} \times (\alpha\vec{u})) = \vec{0}$, obtemos

$$(\alpha a + x - 1)\vec{u} = \vec{0}.$$

Mas sendo $\vec{u}$ um vetor arbitrário em $\mathbb{R}^3$, não podemos esperar que $\vec{u} = \vec{0}$ sempre, e assim segue que o escalar deve ser nulo, isto é, $(\alpha a + x - 1) = 0$, ou ainda $(x-1) = -\alpha a$. Voltando agora na primeira equação em (1), temos que

$$a = ax - \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle = ax - \langle \vec{u}, \alpha\vec{u} \rangle = ax - \alpha|\vec{u}|^2,$$

ou ainda

$$\alpha|\vec{u}|^2 = ax - a = a(x-1),$$

e substituindo $(x-1) = -\alpha a$, temos

$$\alpha|\vec{u}|^2 = a(x-1) = -\alpha a^2.$$

Ora, como $|\vec{u}|^2$ e a^2 são ambos não negativos, os dois membros desta última igualdade possuem sinais contrários e assim, a igualdade somente será satisfeita se $\alpha = 0$ e portanto $\vec{w} = \alpha\vec{u} = \vec{0}$. Com $\vec{w} = \vec{0}$ de volta em qualquer uma das duas equações em (1) segue que $x = 1$.

Desta forma, $r = x + \vec{w} = 1 + \vec{0} = 1 + 0i + 0j + 0k$ é o (único) elemento que cumpre $qr = q$ para todo $q \in \mathbb{H}$. É fácil ver que também $rq = q$ para todo $q \in \mathbb{H}$. Segue que a operação de multiplicação admite elemento neutro, a saber $r = 1 + \vec{0} = 1 + 0i + 0j + 0k$. □

O elemento neutro da operação de multiplicação a que se refere a proposição anterior, $1+\vec{0}=1+0i+0j+0k$ será deste ponto em diante chamado de unidade de $\mathbb{H}$, e representado por $1_{\mathbb{H}}$ ou simplesmente por 1, quando ficar claro que $1 \in \mathbb{H}$.

Definição 20. Um quatérnio q é dito invertível se admitir simétrico pela operação de multiplicação. Isto é, se existir $r \in \mathbb{H}$ tal que

$$qr = rq = 1,$$

e neste caso, o quatérnio r será chamado de inverso de q e representado por q^{-1}.

Proposição 21. *Todo elemento não nulo de $\mathbb{H}$ é invertível. Isto é, dado $q=(a+\vec{u}) \in \mathbb{H}^*$, existe $r \in \mathbb{H}$, de forma que*

$$qr = rq = 1.$$

Demonstração. Primeiro observemos que $q = a+\vec{u} = 0$, se e somente se $a=0$ e $\vec{u}=\vec{0}$, se e somente se $a=0$ e $|\vec{u}|=0$, se e somente se $(a^2+|\vec{u}|^2)=0$.

Seja então $q = a+\vec{u} \in \mathbb{H}^*$, e portanto $(a^2+|\vec{u}|^2) \neq 0$. Queremos obter $r = x+\vec{w} \in \mathbb{H}$, de forma que $qr=rq=1$. Da igualdade $qr=1$, temos que

$$(a+\vec{u})(x+\vec{w}) = (ax - \langle \vec{u},\vec{w}\rangle) + (a\vec{w} + x\vec{u} + \vec{u}\times\vec{w}) = 1 = 1+\vec{0},$$

donde segue da igualdade de quatérnios que

$$\begin{cases} ax - \langle \vec{u},\vec{w}\rangle = 1 \\ a\vec{w} + x\vec{u} + \vec{u}\times\vec{w} = \vec{0}. \end{cases} \tag{2}$$

Da primeira equação em (2), temos $ax = 1 + \langle \vec{u},\vec{w}\rangle$, e multiplicando ambos os membros por a, segue

$$\begin{aligned} a^2x &= a + a\langle \vec{u},\vec{w}\rangle \\ &= a + \langle \vec{u},a\vec{w}\rangle \\ &= a + \langle \vec{u},-x\vec{u}-\vec{u}\times\vec{w}\rangle \\ &= a - x\langle \vec{u},\vec{u}\rangle - \langle \vec{u},\vec{u}\times\vec{w}\rangle. \end{aligned}$$

Mas notemos que na igualdade acima, $\langle \vec{u},\vec{u}\times\vec{w}\rangle = \vec{0}$, pois, $\vec{u}\times\vec{w}$ é um vetor ortogonal a $\vec{u}$ e desta forma o produto escalar entre eles é igual a zero. Segue que

$$a^2x = a - x\langle \vec{u},\vec{u}\rangle - \langle \vec{u},\vec{u}\times\vec{w}\rangle = a - x|\vec{u}|^2,$$

donde

$$x(a^2 + |\vec{u}|^2) = a,$$

e como $(a^2 + |\vec{u}|^2) \neq 0$, segue que

$$x = \frac{a}{a^2 + |\vec{u}|^2}.$$

Notemos agora que da segunda igualdade em (2) segue que os três vetores envolvidos na soma são linearmente dependentes. Isto porque existem três escalares não nulos tais que a soma entre estes três vetores resulta no vetor nulo. Mas o vetor $\vec{u} \times \vec{w}$ é ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{w}$ simultaneamente, então para que os três vetores sejam linearmente dependentes deve ocorrer que $\vec{u}$ e $\vec{w}$ sejam linearmente dependentes. Segue que $\vec{w} = \alpha\vec{u}$ para algum escalar $\alpha \in \mathbb{R}$.

Voltando com $\vec{w} = \alpha\vec{u}$ na primeira equação em (2), obtemos

$$ax - 1 = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \alpha\vec{u} \rangle = \alpha|\vec{u}|^2,$$

e com $x = \frac{a}{a^2+|\vec{u}|^2}$, segue que

$$\alpha|\vec{u}|^2 = ax - 1 = \frac{a^2}{a^2 + |\vec{u}|^2} - 1 = \frac{-|\vec{u}|^2}{a^2 + |\vec{u}|^2}.$$

Esta última igualdade é sempre satisfeita colocando $\alpha = \frac{-1}{a^2+|\vec{u}|^2}$ (mesmo quando $\vec{u} = \vec{0}$). Desta forma $\vec{w} = \alpha\vec{u} = \left(\frac{-1}{a^2+|\vec{u}|^2}\right)\vec{u}$, e portanto

$$r = x + \vec{w} = \left(\frac{a}{a^2 + |\vec{u}|^2}\right) + \left(\frac{-1}{a^2 + |\vec{u}|^2}\right)\vec{u} = \left(\frac{1}{a^2 + |\vec{u}|^2}\right)(a - \vec{u})$$

é o (único) quatérnio que cumpre $qr = 1$. Podemos verificar que também $rq = 1$ e desta forma, dado qualquer $q \in \mathbb{H}^*$, existe $r \in \mathbb{H}$ que cumpre $qr = rq = 1$, chamado de inverso multiplicativo de q. $\square$

De acordo com esta última proposição, se $q = (a + \vec{u}) \neq 0$ então q é invertível, e além disso,

$$q^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + |\vec{u}|^2}\right) + \left(\frac{-1}{a^2 + |\vec{u}|^2}\right)\vec{u} = \left(\frac{1}{a^2 + |\vec{u}|^2}\right)(a - \vec{u})$$

é o único quatérnio que cumpre $q(q^{-1}) = (q^{-1})q = 1$. Observe ainda que, sendo q não nulo, q^{-1} é também não nulo, e portanto também invertível. A própria igualdade $q(q^{-1}) = (q^{-1})q = 1$ nos diz que q é o inverso de q^{-1}, isto é, $q = (q^{-1})^{-1}$.

Observemos que em virtude da igualdade $0 \cdot q = q \cdot 0 = 0$, para qualquer $q \in \mathbb{H}$, então 0 não pode jamais ser um elemento invertível. A proposição anterior pode portanto ser entendida também no sentido recíproco, isto é, q é invertível se e somente se $q \neq 0$.

Com o que provamos até agora, a terna ordenada $(\mathbb{H}, +, \cdot)$ é um anel, **não** comutativo, com unidade, no qual todo elemento não nulo admite inverso multiplicativo.

Definição 22. Dados dois quatérnios q e r, com $r \neq 0$, definimos o quociente de q por r como sendo o quatérnio representado por $\frac{q}{r}$, chamado de resultado da divisão de q por r e dado por

$$\frac{q}{r} = q(r^{-1}) = qr^{-1}.$$

Em virtude desta última definição, no caso em que $q \in \mathbb{H}^*$, é comum escrever que $q^{-1} = \frac{1}{q}$. Além disso, outras propriedades advindas da teoria dos anéis podem ser aplicadas a esta notação. É importante tomar algum cuidado pois não podemos fazer uso da propriedade comutativa da multiplicação. Como consequência disto, podemos ver que $q\left(\frac{r}{s}\right) = \frac{qr}{s}$, mas $\left(\frac{q}{s}\right) r \neq \frac{qr}{s}$.

Por este motivo vamos evitar a notação $\frac{q}{r}$, de divisão entre quatérnios. Usaremos esta notação apenas quando estivermos tratando com números reais. A notação $\frac{q}{\alpha}$ com $\alpha \in \mathbb{R}^*$ e $q = (a + \vec{u}) \in \mathbb{H}$ significará $(\frac{1}{\alpha})q = (\frac{1}{\alpha})(a + \vec{u}) = \frac{a}{\alpha} + \frac{1}{\alpha}\vec{u}$.

Provaremos agora que o conjunto dos quatérnios não possui divisores próprios de zero. Esta propriedade faria do conjunto dos quatérnios um anel de integridade se este conjunto fosse um anel comutativo.

Proposição 23. *Se q e r são dois quatérnios tais que $qr = 0$, então $q = 0$ ou $r = 0$.*

Demonstração. Sejam $q = (a + \vec{u})$ e $r = (b + \vec{v})$ e suponha ainda que

$$(a + \vec{u})(b + \vec{v}) = 0. \tag{3}$$

Para provar que $q = 0$ ou $r = 0$, vamos supor que um deles não seja zero e, neste caso, provar que obrigatoriamente o outro será. Suponha então que também $q = (a + \vec{u}) \neq 0$, e equivalentemente que $(a^2 + |\vec{u}|^2) \neq 0$.

Da igualdade (3) temos que

$$(ab - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle) + (a\vec{v} + b\vec{u} + \vec{u} \times \vec{v}) = 0 + \vec{0},$$

e portanto

$$\begin{cases} ab - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0 \\ a\vec{v} + b\vec{u} + \vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}. \end{cases} \tag{4}$$

Multiplicando a primeira equação em (4) por $a \in \mathbb{R}$, temos que

$$a^2 b - \langle \vec{u}, a\vec{v} \rangle = 0,$$

e substituindo $(a\vec{v})$ da segunda equação obtemos

$$0 = a^2 b - \langle \vec{u}, a\vec{v} \rangle = a^2 b - \langle \vec{u}, -b\vec{u} - \vec{u} \times \vec{v} \rangle = a^2 b + b|\vec{u}|^2 + \langle \vec{u}, \vec{u} \times \vec{v} \rangle.$$

Mas $\langle \vec{u}, \vec{u} \times \vec{v} \rangle = 0$ pois $\vec{u} \times \vec{v}$ é um vetor ortogonal a $\vec{u}$ e desta forma o produto escalar é igual a zero. Segue que esta última igualdade fica reescrita como

$$0 = a^2 b + b|\vec{u}|^2 = b(a^2 + |\vec{u}|^2),$$

e como $(a^2 + |\vec{u}|^2) \neq 0$ então segue que $b = 0$. Voltando ao sistema (4) com $b = 0$ temos

$$\begin{cases} \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0 \\ a\vec{v} + \vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}. \end{cases} \tag{5}$$

Tomando o módulo ao quadrado da segunda equação de (5), temos que

$$|a\vec{v} + (\vec{u} \times \vec{v})|^2 = |\vec{0}|^2 = 0,$$

e como o vetor $(\vec{u} \times \vec{v})$ é ortogonal ao vetor $a\vec{v}$ segue dos itens (iv) e (v) da proposição 18 que

$$0 = |a\vec{v} + (\vec{u} \times \vec{v})|^2 = |a\vec{v}|^2 + |\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |a|^2|\vec{v}|^2 + |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^2,$$

e levando em conta a primeira igualdade de (5) temos que

$$0 = |a|^2|\vec{v}|^2 + |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 = (|a|^2 + |\vec{u}|^2)|\vec{v}|^2,$$

e como $(|a|^2 + |\vec{u}|^2) \neq 0$, segue que $|\vec{v}|^2 = 0$, donde $\vec{v} = 0$, e portanto $r = (b + \vec{v}) = 0$. Isto termina esta demonstração. $\square$

O próximo corolário é a contrapositiva equivalente da proposição anterior.

Corolário 24. *Se q e r são dois quatérnios ambos não nulos, então qr é também não nulo.*

Corolário 25. *Se q e r são dois quatérnios invertíveis, então qr é invertível e além disso,*

$$(qr)^{-1} = r^{-1}q^{-1}.$$

Demonstração. Supondo que q e r são dois quatérnios invertíveis, então são dois quatérnios não nulos. Do corolário anterior, qr também é não nulo e portanto invertível. Além disso, como

$$(qr)(r^{-1}q^{-1}) = q(rr^{-1})q^{-1} = qq^{-1} = 1,$$

e também

$$(r^{-1}q^{-1})(qr) = r^{-1}(q^{-1}q)r = r^{-1}r = 1,$$

então segue da definição de inverso que o inverso de (qr) é precisamente $r^{-1}q^{-1}$, isto é, $(qr)^{-1} = r^{-1}q^{-1}$. □

4. Conjugado e módulo de um quatérnio

Nesta seção estudaremos os conceitos de módulo e de conjugado de um quatérnio. A noção de módulo é fundamental para outros estudos com estes números. As definições de convergência de sequências e de séries de quatérnios bem como de limite de funções a valores quatérnios, se fundamentam principalmente na ideia de distância entre dois quatérnios. Esta distância é tradicionalmente representada pela expressão $|q - r|$. Nestes termos é fundamental o conceito de módulo de um quatérnio e o estudo de propriedades a respeito deste módulo.

A noção de conjugado por sua vez está ligada com a de módulo, principalmente em virtude da expressão $(q \cdot \overline{q}) = |q|^2$, que é verdadeira se q for um número complexo e se $\overline{q}$ representa o conjugado de q. Estabeleceremos esta ideia também no conjunto dos quatérnios.

Definição 26. Seja $q = a + \vec{u} = a + bi + cj + dk$ um quatérnio arbitrário. O módulo de q é o número real, representado por $|q|$, e dado por

$$|q| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} = \sqrt{a^2 + |\vec{u}|^2}.$$

Fica claro que na definição acima $|\vec{u}| = \sqrt{b^2 + c^2 + d^2}$ representa a norma Euclidiana ou o módulo de $\vec{u} = (b, c, d) \in \mathbb{R}^3$. Para facilitar a notação, é comum utilizar a expressão $|q|^2 = a^2 + |\vec{u}|^2$, que evita o uso da raiz quadrada. Uma vez definido o módulo de um quaténio, vamos verificar a validade de algumas propriedades envolvendo esta definição. Algumas destas propriedades são similares às propriedades de módulo de números reais ou de números complexos.

Proposição 27. *Para quaisquer $q \in \mathbb{H}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos*

i) $|q| \geq 0$ *e além disso,* $q = 0$ *se e somente se* $|q| = 0$.

ii) $|q| = |-q|$;

iii) $|\alpha q| = |\alpha||q|$;

iv) $Re(q) \leq |Re(q)| \leq |q|$;

v) $|Im(q)| \leq |q|$;

Demonstração. Em toda esta demonstração, suponha que $q = a + \vec{u} \in \mathbb{H}$. Para o primeiro item, temos $|q| = \sqrt{a^2 + |\vec{u}|^2} \geq 0$. Além disso, $q = (a + \vec{u}) = 0 = 0 + \vec{0}$, se e somente se $a = 0$ e $\vec{u} = \vec{0}$, se e somente se $a = 0$ e $|\vec{u}| = 0$, se e somente se $(a^2 + |\vec{u}|^2) = 0$, se e somente se $|q|^2 = 0$, se e somente se $|q| = 0$.

Para o segundo item,

$$|q|^2 = a^2 + |\vec{u}|^2 = (-a)^2 + |-\vec{u}|^2 = |-q|^2,$$

e extraindo a raiz quadrada em ambos os membros vem $|q| = |-q|$.

Para provar (iii),

$$\begin{aligned}
|\alpha q|^2 &= |\alpha(a + \vec{u})|^2 = |\alpha a + \alpha\vec{u}|^2 \\
&= (\alpha a)^2 + |\alpha\vec{u}|^2 \\
&= \alpha^2 a^2 + \alpha^2|\vec{u}|^2 = \alpha^2(a^2 + |\vec{u}|^2) = \alpha^2|q|^2,
\end{aligned}$$

e extraindo raiz quadrada em ambos os membros, segue que $|\alpha q| = |\alpha||q|$.

Para provar o item (iv), se $q = a + \vec{u} \in \mathbb{H}$, então $a \in \mathbb{R}$ e usando propriedades do módulo de números reais temos que

$$a \leq |a| = \sqrt{a^2} \leq \sqrt{a^2 + |\vec{u}|^2} = |q|,$$

e como $a = Re(q)$, temos $Re(q) \leq |Re(q)| \leq |q|$.

Finalmente, para (v), como $Im(q) = \vec{u}$, temos que,

$$|Im(q)|^2 = |\vec{u}|^2 \leq a^2 + |\vec{u}|^2 = |q|^2,$$

e tomando a raiz quadrada em ambos os membros, $|Im(q)| \leq |q|$. $\square$

Dentre as propriedades principais do módulo de um número real ou complexo está o fato de que o módulo do produto é o produto dos módulos. Provaremos agora esta propriedade.

Proposição 28. *Para quaisquer $q, r \in \mathbb{H}$ temos que $|qr| = |q||r|$.*

Demonstração. Para esta proposição usaremos as propriedades (vi), (vii) e $(viii)$ da proposição 18. Se $q = a + \vec{u}$ e $r = x + \vec{w}$ são quatérnios arbitrários, então

$$\begin{aligned}|qr|^2 &= |(a+\vec{u})(x+\vec{w})|^2 \\ &= |(ax - \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle) + (a\vec{w} + x\vec{u} + \vec{u} \times \vec{w})|^2 \\ &= (ax - \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle)^2 + |a\vec{w} + x\vec{u} + \vec{u} \times \vec{w}|^2.\end{aligned}$$

Agora como $\vec{u} \times \vec{w}$ é um vetor ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{w}$ simultaneamente, então $\vec{u} \times \vec{w}$ é um vetor ortogonal à qualquer combinação linear entre $\vec{u}$ e $\vec{w}$, em particular à $(a\vec{w} + x\vec{u})$. Desta forma,

$$\begin{aligned}|qr|^2 &= (ax - \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle)^2 + |a\vec{w} + x\vec{u} + \vec{u} \times \vec{w}|^2 \\ &= a^2x^2 - 2ax\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle^2 + |a\vec{w} + x\vec{u}|^2 + |\vec{u} \times \vec{w}|^2 \\ &= a^2x^2 - 2ax\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + |a\vec{w} + x\vec{u}|^2 + |\vec{u}|^2|\vec{w}|^2 \\ &= a^2x^2 + a^2|\vec{w}|^2 + x^2|\vec{u}|^2 + |\vec{u}|^2|\vec{w}|^2 \\ &= (a^2 + |\vec{u}|^2)(x^2 + |\vec{w}|^2) = |q|^2|r|^2\end{aligned}$$

e a igualdade desejada segue extraindo a raiz quadrada em ambos os membros. $\square$

Corolário 29. *Se $q \in \mathbb{H}^*$ então $|q^{-1}| = \frac{1}{|q|} = |q|^{-1}$.*

Demonstração. Se $q \neq 0$ então q é invertível, e portanto existe q^{-1} de forma que

$$q(q^{-1}) = (q^{-1})q = 1.$$

Tomando o módulo em ambos os membros e levando em conta a proposição anterior, temos que

$$|q||q^{-1}| = |q(q^{-1})| = |1| = 1.$$

Como q é não nulo, então $|q| \neq 0$, e portanto dividindo esta última igualdade por $|q|$ segue que

$$|q^{-1}| = \frac{1}{|q|}.$$

□

Proposição 30. *Se* $q, r \in \mathbb{H}$ *então*

$$|q + r| \leq |q| + |r|.$$

Demonstração. Se $q = a + \vec{u}$ e $r = x + \vec{w}$ então

$$\begin{aligned}
|q + r|^2 &= |(a + \vec{u}) + (x + \vec{w})|^2 \\
&= |(a + x) + (\vec{u} + \vec{w})|^2 \\
&= (a + x)^2 + |\vec{u} + \vec{w}|^2 \\
&\leq (a + x)^2 + (|\vec{u}| + |\vec{w}|)^2 \\
&= a^2 + 2ax + x^2 + |\vec{u}|^2 + 2|\vec{u}||\vec{w}| + |\vec{w}|^2 \\
&= a^2 + |\vec{u}|^2 + 2(ax + |\vec{u}||\vec{w}|) + x^2 + |\vec{w}|^2 \\
&\leq |q|^2 + 2(|ax| + |\vec{u}||\vec{w}|) + |r|^2.
\end{aligned}$$

Também notemos que

$$(|ax| + |\vec{u}||\vec{w}|)^2 = a^2x^2 + 2|ax||\vec{u}||\vec{w}| + |\vec{u}|^2|\vec{w}|^2,$$

e usando o fato de que $2\alpha\beta \leq \alpha^2 + \beta^2$ quaisquer que sejam α e β reais, então

$$\begin{aligned}
(|ax| + |\vec{u}||\vec{w}|)^2 &= a^2x^2 + 2|ax||\vec{u}||\vec{w}| + |\vec{u}|^2|\vec{w}|^2 \\
&\leq a^2x^2 + x^2|\vec{u}|^2 + a^2|\vec{w}|^2 + |\vec{u}|^2|\vec{w}|^2 \\
&= (a^2 + |\vec{u}|^2)(x^2 + |\vec{w}|^2) = |q|^2|r|^2,
\end{aligned}$$

donde

$$|ax| + |\vec{u}||\vec{w}| \leq |q||r|.$$

Segue que

$$\begin{aligned}|q+r|^2 &\leq |q|^2 + 2(|ax| + |\vec{u}||\vec{w}|) + |r|^2 \\ &\leq |q|^2 + 2|q||r| + |r|^2 = (|q| + |r|)^2\end{aligned}$$

e a desigualdade desejada é obtida extraindo raiz quadrada em ambos os membros. □

Corolário 31. *Se $q, r \in \mathbb{H}$ então $||q| - |r|| \leq |q - r|$.*

Demonstração. Dados quaisquer $q, r \in \mathbb{H}$, usando a proposição anterior, temos que

$$|q| = |q - r + r| \leq |q - r| + |r|,$$

e assim,

$$|q| - |r| \leq |q - r|.$$

Também,

$$|r| = |r - q + q| \leq |r - q| + |q|,$$

e assim,

$$-|q - r| = -|r - q| \leq |q| - |r|.$$

Segue portanto que,

$$-|q - r| \leq |q| - |r| \leq |q - r|,$$

e das propridades do módulo de números reais,

$$||q| - |r|| \leq |q - r|.$$

□

Como mencionado anteriormente a ideia de conjugado é baseada na ideia de que, dado $q \in \mathbb{H}$, encontremos um quatérnio denotado por $\overline{q}$ e que satisfaz $q\overline{q} = \overline{q}q = |q|^2$. Nestes termos se $q = a + \vec{u}$ queremos definir $\overline{q} = x + \vec{w}$ de forma que seja válida a igualdade

$$(a + \vec{u})(x + \vec{w}) = |q|^2,$$

ou ainda

$$\begin{cases} (ax - \vec{u} \cdot \vec{w}) = |q|^2 \\ a\vec{w} + x\vec{u} + \vec{u} \times \vec{w} = \vec{0}. \end{cases} \tag{6}$$

Naturalmente a segunda igualdade nos diz que os vetores $\vec{u}$, $\vec{w}$ e $\vec{u} \times \vec{w}$ deverão ser linearmente dependentes e como $\vec{u} \times \vec{w}$ é ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{w}$, então $\vec{u}$ e $\vec{w}$ é que devem ser linearmente dependentes. Portanto $\vec{w} = \alpha\vec{u}$ para algum $\alpha \in \mathbb{R}$.

Substituindo isto na segunda igualdade em (6), e levando em conta que $\alpha(\vec{u} \times \vec{u}) = \vec{0}$, obtemos

$$(a\alpha + x)\vec{u} = \vec{0}.$$

Mas como $\vec{u}$ é arbitrário, não podemos esperar nesta última igualdade, que $\vec{u} = \vec{0}$ sempre. Devemos então pedir que $(a\alpha + x) = 0$, ou que $x = -a\alpha$. Substituindo este x e $\vec{w} = \alpha\vec{u}$, na primeira igualdade em (6), vem

$$|q|^2 = -a^2\alpha - \alpha|\vec{u}|^2 = -\alpha(a^2 + |\vec{u}|^2) = -\alpha|q|^2,$$

e esta igualdade fica cumprida colocando $\alpha = -1$, inclusive quando $q = 0$. Segue que $x = -\alpha a = a$ e $\vec{w} = \alpha\vec{u} = -\vec{u}$, e a igualdade $(q\overline{q}) = |q|^2$ fica então satisfeita se colocarmos $\overline{q} = x + \vec{w} = a - \vec{u}$. Esta ideia motiva a próxima definição.

Definição 32. Seja $q \in \mathbb{H}$ dado por $q = a + \vec{u} = a + bi + cj + dk$. Então o conjugado de q é o quatérnio, denotado por $\overline{q}$, e definido por

$$\overline{q} = a - \vec{u} = a - bi - cj - dk.$$

Vamos verificar a validade de algumas propriedades envolvendo a definição de conjugado de um quatérnio. Tais propriedades são semelhantes às propriedades envolvendo o conjugado de números complexos.

Proposição 33. *Sejam $q, r \in \mathbb{H}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então,*

i) $\overline{\overline{q}} = q$;

ii) $\overline{q + r} = \overline{q} + \overline{r}$;

iii) $\overline{qr} = \overline{r}\ \overline{q}$;

iv) $\overline{\alpha q} = \alpha\overline{q}$;

v) $q\overline{q} = \overline{q}q = |q|^2$;

vi) $|q| = |\overline{q}|$;

vii) $q + \overline{q} = 2Re(q) \quad e \quad q - \overline{q} = 2Im(q)$;

Demonstração. Para provar o item (i), se $q = a + \vec{u}$ então $\overline{\overline{q}} = \overline{(\overline{q})} = \overline{(a - \vec{u})} = (a + \vec{u}) = q$.

Para os itens (ii) e (iii), sejam $q = a + \vec{u}$ e $r = b + \vec{v}$. Então

$$\begin{aligned} \overline{q + r} &= \overline{(a + \vec{u}) + (b + \vec{v})} \\ &= \overline{(a + b) + (\vec{u} + \vec{v})} \\ &= (a + b) - (\vec{u} + \vec{v}) = (a - \vec{u}) + (b - \vec{v}) = \overline{q} + \overline{r}, \end{aligned}$$

e também

$$\begin{aligned} \overline{qr} &= \overline{(a + \vec{u})(b + \vec{v})} \\ &= \overline{(ab - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle) + (a\vec{v} + b\vec{u} + \vec{u} \times \vec{v})} \\ &= (ab - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle) - (a\vec{v} + b\vec{u} + \vec{u} \times \vec{v}) \\ &= (ab - \langle -\vec{u}, -\vec{v} \rangle) + (a(-\vec{v}) + b(-\vec{u}) + (-\vec{u}) \times \vec{v}) \\ &= (ba - \langle -\vec{v}, -\vec{u} \rangle) + a(-\vec{v}) + b(-\vec{u}) - \vec{v} \times (-\vec{u}) \\ &= (ba - \langle -\vec{v}, -\vec{u} \rangle) + b(-\vec{u}) + a(-\vec{v}) + (-\vec{v}) \times (-\vec{u}) \\ &= (b - \vec{v})(a - \vec{u}) = \overline{(b + \vec{v})}\,\overline{(a + \vec{u})} = \overline{r}\,\overline{q}. \end{aligned}$$

Para os itens (iv), (v) e (vi) seja $q = a + \vec{u}$. Então

$$\overline{\alpha q} = \overline{\alpha(a + \vec{u})} = \overline{(\alpha a) + (\alpha \vec{u})} = (\alpha a) - (\alpha \vec{u}) = \alpha(a - \vec{u}) = \alpha \overline{q},$$

e

$$\begin{aligned} q\,\overline{q} &= (a + \vec{u})\,\overline{(a + \vec{u})} = (a + \vec{u})(a - \vec{u}) \\ &= (a^2 - \langle \vec{u}, -\vec{u} \rangle) + a(-\vec{u}) + a\vec{u} + \vec{u} \times (-\vec{u}) \\ &= (a^2 + \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle) = (a^2 + |\vec{u}|^2) = |q|^2, \end{aligned}$$

e a igualdade $\overline{q}\,q = |q|^2$ é análoga. Também

$$|\overline{q}|^2 = a^2 + |-\vec{u}|^2 = a^2 + |\vec{u}|^2 = |q|^2,$$

e portanto $|q| = |\overline{q}|$.

Para finalizar, isto é, para o item (vii), seja $q = a + \vec{u}$. Então,

$$q + \overline{q} = (a + \vec{u}) + (a - \vec{u}) = 2a = 2Re(q),$$

e também

$$q - \overline{q} = (a + \vec{u}) - (a - \vec{u}) = 2\vec{u} = 2Im(q),$$

o que termina esta demonstração. $\square$

O uso do conjugado e do módulo de um quatérnio torna mais fácil a ideia de encontrar q^{-1} no caso em que $q \neq 0$. A próxima proposição estabelece esta ideia.

Proposição 34. *Seja* $q = (a + \vec{u}) \in \mathbb{H}^*$. *Então o inverso de* q, *o quatérnio* $q^{-1} \in \mathbb{H}^*$ *que satisfaz* $qq^{-1} = q^{-1}q = 1$, *é dado por*

$$q^{-1} = \frac{1}{|q|^2}(\overline{q}) = \frac{1}{|q|^2}(a - \vec{u}).$$

Demonstração. Se $q = a + \vec{u} \neq 0$, então da proposição 21, segue imediatamente que

$$q^{-1} = \frac{1}{a^2 + |\vec{u}|^2}(a - \vec{u}) = \frac{1}{|q|^2}(a - \vec{u}) = \frac{1}{|q|^2}(\overline{q}).$$

Outra forma de ver isto sem o uso da proposição 21, apenas usando as propriedades do módulo e do conjugado, é a que se segue. Dado $q = (a + \vec{u}) \neq 0$, então $\overline{q} \neq 0$ também, e assim, $\overline{q}$ é invertível. Desta forma,

$$\begin{aligned} q^{-1} &= q^{-1} \cdot 1 = q^{-1} \cdot (\overline{q}^{-1}\overline{q}) \\ &= (q^{-1}\overline{q}^{-1}) \cdot \overline{q} \\ &= (\overline{q}q)^{-1} \cdot \overline{q} = (|q|^2)^{-1} \cdot \overline{q} = \frac{1}{|q|^2}\overline{q}, \end{aligned}$$

donde, $q^{-1} = \frac{1}{|q|^2}\overline{q}$. $\square$

5. Potências inteiras de um quatérnio

Definição 35. Se $q \in \mathbb{H}^*$ e $m \in \mathbb{Z}$ então definimos a m-ésima potência de q recursivamente por

$$q^m = \begin{cases} 1 \quad \text{se} \quad m = 0, \\ (q^{m-1})q = q(q^{m-1}) \quad \text{se} \quad m > 0, \\ (q^{-1})^{-m} \quad \text{se} \quad m < 0 \end{cases}$$

No caso em que $q = 0$ e $m > 0$ então definimos também $q^m = 0^m = 0$.

Observe que não definimos 0^0, e também 0^{-n} com $n \in \mathbb{N}$, no conjunto dos quatérnios. Isto se deve às mesmas razões que levam 0^0 e 0^{-n} com $n \in \mathbb{N}$, não estarem definidos no conjunto dos números reais ou dos números complexos. Também não temos muito interesse na definição de potências negativas de um quatérnio, uma vez que uma série de potências só abrange as potências positivas. Fizemos esta definição apenas para tornar o texto mais completo.

Vejamos algumas consequências imediatas da definição anterior. A igualdade $q^m = (q^{-1})^{-m}$ usada para o caso em que $m < 0$ é também válida para o caso $m \geq 0$, pois neste caso, $(q^{-1})^{-m} = ((q^{-1})^{-1})^m = (q^m)$. Também é válido que $q^1 = q$ para qualquer $q \in \mathbb{H}$. A igualdade $(q^{m-1})q = q(q^{m-1})$ usada para $m > 0$ é garantida pela associatividade da multiplicação de quatérnios.

Proposição 36. *Se $q \in \mathbb{H}$ e $m, n \in \mathbb{Z}$ então*

i) $(q^{-1})^n = (q^n)^{-1}$ *quando* $q \neq 0$*;*

ii) $(q^m)(q^n) = q^{m+n}$*;*

iii) $(q^m)^n = q^{mn}$*;*

iv) $|q^n| = |q|^n$*,*

com as devidas restrições $m > 0$ e $n > 0$ no caso em que $q = 0$.

Demonstração. Observamos primeiro que, com exceção de (i), que obriga $q \neq 0$, as demais igualdades são trivialmente satisfeitas se $q = 0$, e portanto vamos considerar em toda esta demonstração que $q \neq 0$. A ideia desta demonstração, em cada item, é primeiro usar indução finita sobre $n \geq 0$ e qualquer que seja $m \in \mathbb{Z}$ quando for o caso, e depois a prova para $n < 0$.

Para a prova de (i), se $n = 0$ temos claramente que $(q^{-1})^0 = 1 = (1)^{-1} = (q^0)^{-1}$. Suponha agora a igualdade válida para n, isto é, $(q^{-1})^n = (q^n)^{-1}$. Para $n + 1$, temos que

$$(q^{-1})^{n+1} = (q^{-1})^n \cdot q^{-1} = (q^n)^{-1} \cdot q^{-1} = (q \cdot q^n)^{-1} = (q^{n+1})^{-1}.$$

Agora se $n < 0$ então, usando a definição de potência negativa e a validade da igualdade para potências positivas, temos

$$(q^{-1})^n = ((q^{-1})^{-1})^{-n} = q^{-n} = ((q^{-n})^{-1})^{-1} = ((q^{-1})^{-n})^{-1} = (q^n)^{-1}.$$

Para (ii), se $n = 0$ então trivialmente $(q^m)(q^0) = q^m = q^{m+0}$ para qualquer $m \in \mathbb{Z}$. Suponha agora a igualdade válida para $n \in \mathbb{N}$, isto é, $(q^m) \cdot (q^n) = q^{m+n}$ qualquer que seja $m \in \mathbb{Z}$. Para $n + 1$ temos

$$(q^m)(q^{n+1}) = (q^m)((q^n)q) = ((q^m)(q^n))q = (q^{m+n})q = (q^{m+n+1}).$$

Se $n < 0$ então, usando a definição de potência negativa e as igualdades já provadas, temos

$$(q^m)(q^n) = (q^m)(q^{-1})^{-n} = ((q^{-1})^{-m})(q^{-1})^{-n}) = (q^{-1})^{-m-n} = (q^{-1})^{-(m+n)} = (q^{m+n}).$$

Para (iii), o caso $n = 0$ é trivialmente satisfeito pois $(q^m)^0 = 1 = q^0 = q^{m0}$ para qualquer $m \in \mathbb{Z}$. Suponha agora a igualdade válida para $n \in \mathbb{N}$, isto é, $(q^m)^n = q^{mn}$ qualquer que seja $m \in \mathbb{Z}$. Para $n + 1$ temos

$$(q^m)^{n+1} = (q^m)^n(q^m) = (q^{mn})(q^m) = q^{mn+m} = q^{m(n+1)}.$$

E para $n < 0$, usando a definição de potência negativa e as igualdades já provadas, temos

$$(q^m)^n = ((q^m)^{-1})^{-n} = ((q^{-1})^m)^{-n} = (q^{-1})^{-mn} = q^{mn}.$$

Para (iv), se $n = 0$ então trivialmente $|q^0| = |1| = 1 = |q|^0$. Suponha agora a igualdade válida para $n \in \mathbb{N}$, isto é, $|q^n| = |q|^n$. Para $n + 1$, usando o item (i) da Proposição 28, temos

$$|q^{n+1}| = |q^n q| = |q^n||q| = |q|^n|q| = |q|^{n+1}.$$

E para $n < 0$, usando a definição de potência negativa, as igualdades já provadas e o item (ii) da Proposição 28, temos

$$|q^n| = |(q^{-1})^{-n}| = |q^{-1}|^{-n} = (\tfrac{1}{|q|})^{-n} = |q|^n.$$

$\square$

O leitor poderá perceber que nesta última proposição faltam propriedades conhecidas sobre potências. Ressaltamos que em virtude da não comutatividade da multiplicação dos quatérnios, algumas propriedades sobre potência, válidas para números reais ou complexos, perdem a validade no conjunto dos quatérnios. Como exemplo citamos que não é sempre válida a igualdade $(q_1q_2)^n = (q_1)^n(q_2)^n$. De fato, basta colocar $q_1 = i$, $q_2 = j$, $n = 2$, e temos

$$(ij)^2 = k^2 = -1 \neq 1 = (-1)(-1) = (i^2)(j^2).$$

6. Sequências e séries de quatérnios

O estudo das séries convergentes de quatérnios tem um papel fundamental para este texto. Isto porque a abordagem que escolhemos para definir as funções elementares a valores quatérnios, assunto principal deste texto, é a abordagem por séries de potência. Para o estudo das séries de potência é necessário o estudo também das sequências convergentes.

6.1. SEQUÊNCIAS DE QUATÉRNIOS.

Definição 37. Uma sequência infinita, ou simplesmente uma sequência, de quatérnios é uma sucessão infinita de números quatérnios,

$$q_1, q_2, q_3, ..., q_n, ...,$$

sendo esta sequência representada, da mesma forma que as sequências de números reais ou de números complexos, por $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ ou $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ou ainda de forma mais simplificada, $\{q_n\}$ ou (q_n).

Definição 38. Uma sequência de quatérnios (q_n) é dita ser convergente, se existir algum $q \in \mathbb{H}$ tal que, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$|q_n - q| < \varepsilon$$

para todo $n > n_0$. Neste caso, dizemos que (q_n) converge para q e escrevemos $q_n \to q$, ou ainda que q é o limite de (q_n) e escrevemos $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = q$ ou mais simplesmente $\lim q_n = q$.

No caso de não existir o quatérnio q a que se refere a definição anterior, então a sequência (q_n) é dita não convergente, ou divergente.

Teorema 39. *Suponha que (q_n) é uma sequência de quatérnios. Para cada $n \in \mathbb{N}^*$ suponha que $q_n = a_n + b_n i + c_n j + d_n k$. Então (q_n) converge, se e somente se, (a_n), (b_n), (c_n) e (d_n) convergem. Além disso,*

$$\lim q_n = (\lim a_n) + (\lim b_n)\, i + (\lim c_n)\, j + (\lim d_n)\, k.$$

Demonstração. Suponha primeiro que (q_n) é uma sequência convengente e também que $q_n = a_n + b_n i + c_n j + d_n k$ para cada $n \in \mathbb{N}^*$. Seja $q = a + bi + cj + dk$ o limite da sequência (q_n). Mostraremos que $a_n \to a$, $b_n \to b$, $c_n \to c$ e $d_n \to d$.

Dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, como $q_n \to q$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$|q_n - q| < \varepsilon$$

para todo $n > n_0$. Desta forma, para todo $n > n_0$, temos

$$\begin{aligned}|a_n - a|^2 &\leq |a_n - a|^2 + |b_n - b|^2 + |c_n - c|^2 + |d_n - d|^2 \\ &= |(a_n - a) + (b_n - b)i + (c_n - c)j + (d_n - d)k|^2 = |q_n - q|^2 < \varepsilon^2,\end{aligned}$$

donde $|a_n - a| < \varepsilon$, e então, $a_n \to a$. Analogamente obteremos que $b_n \to b$, $c_n \to c$ e $d_n \to d$.

Reciprocamente suponha que $a_n \to a$, $b_n \to b$, $c_n \to c$ e $d_n \to d$. Mostraremos que $q_n \to a + bi + cj + dk$. Seja $\varepsilon > 0$ arbitrário. Para o número real $\frac{\varepsilon}{4} > 0$, existem $n_1, n_2, n_3, n_4 \in \mathbb{N}$, tais que

$$\begin{aligned}|a_n - a| &< \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{sempre que} \quad n > n_1, \\ |b_n - b| &< \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{sempre que} \quad n > n_2, \\ |c_n - c| &< \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{sempre que} \quad n > n_3, \\ |d_n - d| &< \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{sempre que} \quad n > n_4.\end{aligned}$$

Tomando $n_0 = \max\{n_1, n_2, n_3, n_4\}$ temos que quando $n > n_0$ então $n > n_1$, $n > n_2$, $n > n_3$ e $n > n_4$ simultaneamente. Portanto, para todo $n > n_0$ temos que,

$$\begin{aligned}|q_n - (a + bi + cj + dk)| &= |(a_n + b_n i + c_n j + d_n k) - (a + bi + cj + dk)| \\ &= |(a_n - a) + (b_n - b)i + (c_n - c)j + (d_n - d)k| \\ &\leq |(a_n - a)| + |(b_n - b)| + |(c_n - c)| + |(d_n - d)| \\ &< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon,\end{aligned}$$

donde $q_n \to (a + bi + cj + dk)$. Para finalizar, basta ver que se $q_n = a_n + b_n i + c_n j + d_n k$ converge para $q = a + bi + cj + dk$, então

$$\lim q_n = q = a + bi + cj + dk = (\lim a_n) + (\lim b_n)\, i + (\lim c_n)\, j + (\lim d_n)\, k,$$

como desejado. $\square$

Corolário 40. *Uma sequência (q_n) converge para $q \in \mathbb{H}$, se e somente se, $(Re(q_n))$ e $(Im(q_n))$ convergem respectivamente para $Re(q)$ e $Im(q)$. De outra forma, se $q_n = a_n + \vec{u}_n$ e $q = a + \vec{u}$, então $q_n \to q$, se e somente se $a_n \to a$ e $\vec{u}_n \to \vec{u}$.*

O próximo lema não será demonstrado pois é uma consequência do Teorema 39 e da validade do próprio lema para sequências de números reais.

Lema 41. *Se uma sequência (q_n) de quatérnios converge, então toda subsequência de (q_n) converge para o mesmo limite da sequência (q_n).*

Proposição 42. *Sejam (q_n) e (r_n) sequências de quatérnios convergentes, para q e r respectivamente. Então,*

i) $(\alpha q_n) \to (\alpha q)$, *para qualquer* $\alpha \in \mathbb{R}$;

ii) $(q_n + r_n) \to (q + r)$;

iii) $(q_n r_n) \to (qr)$;

iv) $\overline{q_n} \to \overline{q}$;

v) $|q_n| \to |q|$.

Demonstração. Para todos os itens a prova seguirá os mesmos passos do caso de sequências de números reais ou de números complexos.

Seja $\varepsilon > 0$ arbitrário. Como por hipótese (q_n) converge para q, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $|q_n - q| < \frac{\varepsilon}{|\alpha|+1}$ sempre que $n > n_0$. Desta forma, para todo $n > n_0$, temos

$$|(\alpha q_n) - (\alpha q)| = |\alpha||q_n - q| < |\alpha|\frac{\varepsilon}{|\alpha| + 1} = \varepsilon\frac{|\alpha|}{|\alpha| + 1} < \varepsilon,$$

donde segue que $(\alpha q_n) \to (\alpha q)$.

Seja $\varepsilon > 0$ arbitrário. Como por hipótese (q_n) converge para q, então existe $n_1 \in \mathbb{N}$, tal que $|q_n - q| < \frac{\varepsilon}{2}$ sempre que $n > n_1$. Também como (r_n) converge para r, então existe $n_2 \in \mathbb{N}$, tal que $|r_n - r| < \frac{\varepsilon}{2}$ sempre que $n > n_2$. Escolhemos $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, e desta forma, para todo $n > n_0$ temos

$$|(q_n + r_n) - (q + r)| = |q_n - q + r_n - r| \leq |q_n - q| + |r_n - r| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

donde segue que $(q_n + r_n) \to (q + r)$.

Seja $\varepsilon > 0$ arbitrário. Como (q_n) converge para q, então existe $n_1 \in \mathbb{N}$, tal que $|q_n - q| < \frac{\varepsilon}{2(|r|+1)}$ sempre que $n > n_1$. Além disso, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que, $|q_n - q| < 1$, sempre que $n > n_2$. Então para $n > n_2$ temos,

$$|q_n| = |q_n - q + q| \leq |q_n - q| + |q| < 1 + |q|.$$

Também como (r_n) converge para r, então existe $n_3 \in \mathbb{N}$, tal que $|r_n - r| < \frac{\varepsilon}{2(|q|+1)}$ sempre que $n > n_3$. Escolhemos $n_0 = \max\{n_1, n_2, n_3\}$, e então para todo $n > n_0$ temos simultaneamente $n > n_1$, $n > n_2$ e $n > n_3$ e assim,

$$\begin{aligned}
|(q_n r_n) - (qr)| &= |q_n r_n - q_n r + q_n r - qr| \\
&\leq |q_n(r_n - r)| + |(q_n - q)r| \\
&= |q_n||r_n - r| + |q_n - q||r| \\
&< (1 + |q|)\frac{\varepsilon}{2(|q|+1)} + |r|\frac{\varepsilon}{2(|r|+1)} \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\frac{|r|}{|r|+1} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

donde segue que $(q_n r_n) \to (qr)$.

Dado $\varepsilon > 0$, da hipótese $q_n \to q$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n > n_0$ cumpre-se $|q_n - q| < \varepsilon$. Logo para todo $n > n_0$ temos,

$$|\overline{q_n} - \overline{q}| = |\overline{q_n - q}| = |q_n - q| < \varepsilon,$$

donde, $\overline{q_n} \to \overline{q}$.

Seja $\varepsilon > 0$. Da hipótese $q_n \to q$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0$ cumpre-se $|q_n - q| < \varepsilon$. Logo, usando o Corolário 31, para todo $n > n_0$ temos,

$$||q_n| - |q|| \leq |q_n - q| < \varepsilon,$$

o que garante que $|q_n| \to |q|$. Isto termina esta demonstração. □

6.2. Séries de quatérnios.

Definição 43. Dada uma sequência (q_n) de quatérnios, a soma dos infinitos termos q_n é denominada uma série (de quatérnios) e é expressa por

$$\sum_{n=1}^{\infty} q_n = q_1 + q_2 + q_3 + \cdots + q_n + \cdots .$$

Também representaremos uma série de quatérnios simplificadamente por $\sum q_n$, e entendemos que a soma é em $n \in \mathbb{N}^*$.

Definição 44. Dizemos que uma série $\sum q_n$ converge ou é convergente, se existir o limite da sequência (S_m), chamada de sequência das somas parciais, e dada por

$$S_m = \sum_{n=1}^{m} q_n = q_1 + q_2 + \cdots + q_m.$$

No caso da sequência (S_m), e consequentemente a série $\sum q_n$, convergir então a série é dita ser convergente para o limite da sequência, e escrevemos

$$\sum q_n = \sum_{n=1}^{\infty} q_n = S = \lim_{m \to \infty} S_m = \lim S_m.$$

No caso de não existir o limite da sequência das somas parciais (S_m), então a série $\sum q_n$ é dita divergente ou não convergente.

Teorema 45. *Suponha que (q_n) é uma sequência de quatérnios, e para cada $n \in \mathbb{N}^*$ suponha que $q_n = a_n + b_n i + c_n j + d_n k$. Então $\sum q_n$ converge, se e somente se, $\sum a_n$, $\sum b_n$, $\sum c_n$ e $\sum d_n$ convergem. Além disso,*

$$\sum q_n = \left(\sum a_n\right) + \left(\sum b_n\right) i + \left(\sum c_n\right) j + \left(\sum d_n\right) k.$$

Demonstração. Para cada $m \in \mathbb{N}^*$, seja

$$\begin{aligned} S_m &= \sum_{n=1}^{m} q_n = \sum_{n=1}^{m} (a_n + b_n i + c_n j + d_n k) \\ &= \left(\sum_{n=1}^{m} a_n\right) + \left(\sum_{n=1}^{m} b_n\right) i + \left(\sum_{n=1}^{m} c_n\right) j + \left(\sum_{n=1}^{m} d_n\right) k \\ &= A_m + B_m i + C_m j + D_m k, \end{aligned}$$

sendo que (A_m), (B_m), (C_m) e (D_m) são as sequências (de números reais) das somas parciais das séries $\sum a_n$, $\sum b_n$, $\sum c_n$ e $\sum d_n$ respecivamente.

Agora temos então da definição de série convergente que $\sum q_n$ converge se e somente se (S_m) converge. Do Teorema 39, (S_m) converge se e somente se (A_m), (B_m), (C_m) e (D_m) convergem. Dos resultados de sequências e séries de números reais, (A_m), (B_m), (C_m) e (D_m) convergem se e somente se $\sum a_n$, $\sum b_n$, $\sum c_n$ e $\sum d_n$ convergem.

Segue que $\sum q_n$ converge se e somente se $\sum a_n$, $\sum b_n$, $\sum c_n$ e $\sum d_n$ convergem. Além disso,

$$\begin{aligned} \sum q_n = \lim S_m &= (\lim A_m) + (\lim B_m)\, i + (\lim C_m)\, j + (\lim D_m)\, k \\ &= \left(\sum a_n\right) + \left(\sum b_n\right) i + \left(\sum c_n\right) j + \left(\sum d_n\right) k. \end{aligned}$$

□

Corolário 46. *Uma série* $\sum q_n$ *converge se, e somente se, convergem as séries* $\sum Re(q_n)$ *e* $\sum Im(q_n)$*. Além disso,*

$$\sum q_n = \sum Re(q_n) + \sum Im(q_n).$$

Teorema 47. *Se* $\sum q_n$ *converge, então* $q_n \to 0$*.*

Demonstração. Sejam

$$S_m = \sum_{n=1}^{m} q_n, \qquad \text{e} \qquad S = \lim S_m.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}^*$, temos que $q_n = S_n - S_{n-1}$. Sendo (S_{n-1}) uma subsequência da sequência (S_n), o lema 41 garante que (S_{n-1}) converge para o mesmo limite de (S_n). Segue que

$$\lim q_n = \lim(S_n - S_{n-1}) = \lim S_n - \lim S_{n-1} = S - S = 0,$$

donde $q_n \to 0$. □

O próximo corolário não será provado pois é a contrapositiva equivalente do teorema anterior.

Corolário 48. *Dada uma sequência de quatérnios* (q_n)*, se* q_n *não converge para zero então* $\sum q_n$ *é divergente.*

Definição 49. Uma série $\sum q_n$ é dita absolutamente convergente se, e somente se, $\sum |q_n|$ for convergente.

Observe que na definição anterior, embora $\sum q_n$ seja uma série de quatérnios, a série $\sum |q_n|$ é uma série de números reais positivos.

Teorema 50. *Se* $\sum q_n$ *é absolutamente convergente, então* $\sum q_n$ *é convergente.*

Demonstração. Suponha que $\sum q_n$ é absolutamente convergente. Da definição de série absolutamente convergente segue então que $\sum |q_n|$ é uma série (de números reais) convergente.

Para cada $n \in \mathbb{N}^*$, seja $q_n = a_n + b_n i + c_n j + d_n k$. Como

$$|a_n| \leq |q_n|,$$

para cada $n \in \mathbb{N}^*$, então do teste da comparação para séries de números reais temos que $\sum |a_n|$ é convergente. Então $\sum a_n$ é uma série de números reais absolutamente convergente, e portanto convergente. Pela mesma razão, $\sum b_n$, $\sum c_n$ e $\sum d_n$ são séries convergentes. Segue do Teorema 45 que $\sum q_n$ converge. □

O teorema que acabamos de provar tem grande importância. Ele permite que usemos conhecimentos sobre a série de números reais $\sum |q_n|$ para decidir a convergência da série de números quatérnios $\sum q_n$. Dentre outras vantagens podemos fazer uso de dois importantes testes de convergência de séries de números reais, a saber, os testes da razão e da raiz.

Teorema 51 (Teste da Razão). *Seja $\sum q_n$ uma série de quatérnios e suponha que*

$$\lim \left| \frac{q_{n+1}}{q_n} \right| = L.$$

Então, se $L < 1$, a série $\sum q_n$ é (absolutamente) convergente.

Demonstração. Supondo $\lim \frac{|q_{n+1}|}{|q_n|} = L < 1$, então pelo teste da razão para séries de números reais, a série $\sum |q_n|$ é uma série convergente. Seque que $\sum q_n$ é absolutamente convergente e então do Teorema 50, é uma série convergente. □

Teorema 52 (Teste da Raiz). *Seja $\sum q_n$ uma série de quatérnios e suponha que*

$$\lim \sqrt[n]{|q_n|} = L.$$

Se $L < 1$, a série $\sum q_n$ é (absolutamente) convergente.

Demonstração. Como $\lim \sqrt[n]{|q_n|} = L < 1$, então pelo teste da raiz para séries de números reais, a série $\sum |q_n|$ é uma série convergente. Seque que $\sum q_n$ é absolutamente convergente e portanto convergente. □

Podemos também provar, nos dois últimos teoremas que se $L > 1$ então em qualquer um dos testes a série $\sum q_n$ é divergente. Não enunciamos nem demonstramos esta afirmação porque ela não nos interessa diretamente neste texto. Também, lembremos que ambos os testes são inconclusivos se $L = 1$. É possível obter séries divergentes e convergentes que cumprem $L = 1$ em ambos os testes. Neste caso, isto é, quando $L = 1$, outro teste deve ser aplicado.

7. Funções elementares no conjunto dos quatérnios

Vamos agora definir algumas das funções elementares a valores quatérnios. Estamos particularmente interessados nas funções exponencial, trigonométricas e trigonométricas hiperbólicas de um quatérnio. O método que usaremos é a abordagem por séries de potência.

Durante toda esta etapa, dado um quatérnio $q = a + \vec{u}$, estaremos supondo que $\vec{u} \neq \vec{0}$ e consequentemente que $|\vec{u}| \neq 0$. Isto se deve ao fato de que se $\vec{u} = \vec{0}$ então podemos considerar que $q = a + \vec{0} \in \mathbb{R}$, e está fora dos nossos interesses (re)estudar as funções elementares no conjunto dos números reais.

7.1. A função exponencial. Sabemos que se $x \in \mathbb{R}$, então é válida a igualdade

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots .$$

A série de potências do lado direito faz sentido se $x \in \mathbb{H}$, desde que a série seja convergente. Verificaremos então quais os valores de $x \in \mathbb{H}$ tais que a série converge.

Dado $q \in \mathbb{H}$ arbitrário, considerando a série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{n!}$, e aplicando o teste da razão, temos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{q^{n+1}}{(n+1)!}\right|}{\left|\frac{q^n}{n!}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|q|^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{|q|^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|q|}{(n+1)} = 0 < 1,$$

donde segue que a série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{n!}$ é absolutamente convergente, e portanto convergente, qualquer que seja $q \in \mathbb{H}$. Usamos então a igualdade em série de potências da função exponencial de variável real para definir a função exponencial de um quatérnio.

Definição 53. Dado $q \in \mathbb{H}$, definimos a exponencial de q, como sendo o quatérnio representado por e^q, e dado por

$$e^q = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{n!} = 1 + q + \frac{q^2}{2!} + \frac{q^3}{3!} + \frac{q^4}{4!} + \cdots . \tag{7}$$

Observe que assumimos nesta igualdade que $q^0 = 1$ independente do quatérnio $q \in \mathbb{H}$. Esta convenção é por pura simplicidade para não sermos obrigados a escrever $e^q = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n!}$. Apesar desta definição ser importante, queremos obter uma expressão mais simples que nos permita mais facilmente calcular e^q para um dado $q \in \mathbb{H}$.

Lembremos primeiro que, dados $x, y \in \mathbb{R}$ então é válida a expansão binomial

$$(x+y)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^{n-r} y^r,$$

e esta igualdade não é verdadeira para todos $x, y \in \mathbb{H}$, em virtude da não comutatividade do produto entre quatérnios. Entretanto se $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{H}$ então $xy = yx$ e neste caso a expansão binomial fica válida para o termo $(a + \vec{u})^n$. Segue então que

$$(a+\vec{u})^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{n-r} \vec{u}^r = \sum_{r=0}^{n} \frac{n!}{r!(n-r)!} a^{n-r} \vec{u}^r. \tag{8}$$

Aplicando a expansão binomial podemos reescrever a igualdade (7) na forma

$$\begin{aligned} e^q &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (a+\vec{u})^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{r=0}^{n} \frac{n!}{r!(n-r)!} a^{n-r} \vec{u}^r = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{n} \frac{1}{r!(n-r)!} a^{n-r} \vec{u}^r. \end{aligned}$$

O lema a seguir nos ajudará a trabalhar com o somatório duplo do segundo membro desta última igualdade.

Lema 54. *Para qualquer $m \in \mathbb{N}$,*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{n} \frac{1}{(r+m)!(n-r)!} a^{n-r} \vec{u}^{r+m} = e^a \frac{1}{m!} \vec{u}^m + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{n} \frac{1}{(r+m+1)!(n-r)!} a^{n-r} \vec{u}^{r+m+1}.$$

Demonstração. Dado qualquer $m \in \mathbb{N}$ e começando com

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{n} \frac{1}{(r+m)!(n-r)!} a^{n-r} \vec{u}^{r+m},$$

vamos separar o caso $n = 0$ do somatório externo, e depois os casos $r = 0$ do somatório interno. Desta forma, para qualquer que seja $m \in \mathbb{N}$, obtemos

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{n} \frac{1}{(r+m)!(n-r)!} a^{n-r} \vec{u}^{r+m} \\ &\quad = \frac{1}{m!} a^0 \vec{u}^m + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=0}^{n} \frac{1}{(r+m)!(n-r)!} a^{n-r} \vec{u}^{r+m} \\ &\quad = \frac{1}{m!} \vec{u}^m + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{m!n!} a^n \vec{u}^m + \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{(r+m)!(n-r)!} a^{n-r} \vec{u}^{r+m} \right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{m!}\vec{u}^m + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m!n!} a^n \vec{u}^m + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{(r+m)!(n-r)!} a^{n-r}\vec{u}^{r+m} \\
&= \frac{1}{m!}\vec{u}^m \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} a^n\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{(r+m)!(n-r)!} a^{n-r}\vec{u}^{r+m} \\
&= \frac{1}{m!}\vec{u}^m e^a + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=1}^{n+1} \frac{1}{(r+m)!(n+1-r)!} a^{n+1-r}\vec{u}^{r+m} \\
&= \frac{1}{m!}\vec{u}^m e^a + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{n} \frac{1}{(r+m+1)!(n-r)!} a^{n-r}\vec{u}^{r+m+1}.
\end{aligned}
$$

□

Usando agora repetidamente este lema temos que

$$
\begin{aligned}
e^q &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{n} \frac{1}{r!(n-r)!} a^{n-r}\vec{u}^r \\
&= e^a + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{n} \frac{1}{(r+1)!(n-r)!} a^{n-r}\vec{u}^{r+1} \\
&= e^a + e^a\vec{u} + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{n} \frac{1}{(r+2)!(n-r)!} a^{n-r}\vec{u}^{r+2} \\
&= e^a + e^a\vec{u} + e^a\frac{1}{2!}\vec{u}^2 + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{n} \frac{1}{(r+3)!(n-r)!} a^{n-r}\vec{u}^{r+3} \\
&= e^a + e^a\vec{u} + e^a\frac{1}{2!}\vec{u}^2 + e^a\frac{1}{3!}\vec{u}^3 + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{n} \frac{1}{(r+4)!(n-r)!} a^{n-r}\vec{u}^{r+4} \\
&= e^a + e^a\vec{u} + e^a\frac{1}{2!}\vec{u}^2 + e^a\frac{1}{3!}\vec{u}^3 + e^a\frac{1}{4!}\vec{u}^4 + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{n} \frac{1}{(r+5)!(n-r)!} a^{n-r}\vec{u}^{r+5},
\end{aligned}
$$

e assim sucessivamente. Desta forma, obtemos

$$
e^q = \sum_{n=0}^{\infty} e^a \frac{1}{n!}\vec{u}^n = e^a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\vec{u}^n. \tag{9}
$$

De acordo com a definição de multiplicação de quatérnios, podemos ver que,

$$
\vec{u}^2 = (0+\vec{u})(0+\vec{u}) = (0 - \langle \vec{u}, \vec{u}\rangle) + (0\vec{u} + 0\vec{u} + \vec{u}\times\vec{u}) = -\langle \vec{u}, \vec{u}\rangle = -|\vec{u}|^2,
$$

e então quando $n = 2r$ é par, temos que

$$
\vec{u}^n = \vec{u}^{2r} = (\vec{u}^2)^r = (-|\vec{u}|^2)^r = (-1)^r|\vec{u}|^{2r},
$$

e quando $n = 2r+1$ é impar,

$$
\vec{u}^n = \vec{u}^{2r+1} = \vec{u}^{2r}\vec{u} = (-1)^r|\vec{u}|^{2r}\vec{u}.
$$

Separando o somatório em (9), nas suas parcelas com n par e com n ímpar, temos

$$\begin{aligned}
e^q &= e^a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \vec{u}^n \\
&= e^a \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \vec{u}^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \vec{u}^{2n+1} \right) \\
&= e^a \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} (-1)^n |\vec{u}|^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} (-1)^n |\vec{u}|^{2n} \vec{u} \right) \\
&= e^a \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} (-1)^n |\vec{u}|^{2n} + \vec{u} \frac{1}{|\vec{u}|} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} (-1)^n |\vec{u}|^{2n+1} \right) \\
&= e^a \left(\cos(|\vec{u}|) + \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} \operatorname{sen}(|\vec{u}|) \right),
\end{aligned}$$

sendo que a penúltima igualdade se justifica pois $|\vec{u}| \neq 0$.

Segue finalmente que para $q = a + \vec{u} \in \mathbb{H}$ a exponencial de q é dada por

$$e^q = e^a \left(\cos(|\vec{u}|) + \frac{\operatorname{sen}(|\vec{u}|)}{|\vec{u}|} \vec{u} \right).$$

Formalmente temos então uma definição alternativa para a exponencial de um quatérnio sem o uso explícito das séries de potência.

Definição 55. Dado $q = (a + \vec{u}) \in \mathbb{H}$, definimos a exponencial de q, como sendo o quatérnio representado por e^q, e dado por

$$e^q = e^a \left(\cos|\vec{u}| + \frac{\operatorname{sen}|\vec{u}|}{|\vec{u}|} \vec{u} \right) = e^a \left(\cos|\vec{u}| + \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} \operatorname{sen}|\vec{u}| \right), \tag{10}$$

quando $|\vec{u}| \neq 0$ e por $e^q = e^a$ quando $|\vec{u}| = 0$.

A seguir apresentamos algumas igualdades da função exponencial de variável quaterniônica. São propriedades válidas para variáveis reais ou complexas. A demonstração não apresenta dificuldades técnicas.

Proposição 56. *Para qualquer quatérnio $q = a + \vec{u}$, tem-se*

i) $e^q = e^a e^{\vec{u}}$,

ii) $|e^q| = e^a$,

iii) $e^q \neq 0$,

iv) $|e^{\vec{u}}| = 1$,

v) $e^{-q} = (e^q)^{-1}$.

Demonstração. Todas as igualdades são triviais se $\vec{u} = \vec{0}$, pois recaem ao caso real. Vamos então considerar agora $q = a + \vec{u}$ um quatérnio arbitrário com $\vec{u} \neq \vec{0}$.

Para estabelecer o item (i) basta ver que

$$e^{\vec{u}} = e^{0+\vec{u}} = \left(\cos|\vec{u}| + \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\operatorname{sen}|\vec{u}|\right),$$

e sendo e^a um número real,

$$e^a e^{\vec{u}} = e^a\left(\cos|\vec{u}| + \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\operatorname{sen}|\vec{u}|\right) = e^q.$$

Para o item (ii), temos que

$$\begin{aligned}
|e^q|^2 &= \left|e^a\left(\cos|\vec{u}| + \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\operatorname{sen}|\vec{u}|\right)\right|^2 \\
&= \left|e^a\cos|\vec{u}| + \frac{e^a\vec{u}}{|\vec{u}|}\operatorname{sen}|\vec{u}|\right|^2 \\
&= (e^a\cos|\vec{u}|)^2 + \left|\frac{e^a\vec{u}}{|\vec{u}|}\operatorname{sen}|\vec{u}|\right|^2 \\
&= e^{2a}\cos^2|\vec{u}| + \frac{e^{2a}|\vec{u}|^2}{|\vec{u}|^2}\operatorname{sen}^2|\vec{u}| \\
&= e^{2a}\left(\cos^2|\vec{u}| + \operatorname{sen}^2|\vec{u}|\right) = e^{2a},
\end{aligned}$$

e a igualdade desejada segue agora extraindo raiz quadrada em ambos os membros.

O item (iii) é uma consequência imediata do item (ii). Já que $|e^q| = e^a \neq 0$ qualquer que seja $q = a + \vec{u}$, e o módulo de um quatérnio é nulo se e somente se o quatérnio é nulo, então segue que $e^q \neq 0$ qualquer que seja q.

O item (iv) é também consequência imediata dos itens anteriores, pois

$$e^a|e^{\vec{u}}| = |e^a e^{\vec{u}}| = |e^q| = e^a,$$

e a igualdade desejada segue dividindo ambos os membros por e^a.

Finalmente para o item (v) temos que como $e^q \neq 0$ então e^q é invertível. Além disso, de acordo com a proposição 34, é válida a igualdade

$$(e^q)^{-1} = \left(\frac{1}{|e^q|^2}\right)\overline{e^q}.$$

Então

$$(e^q)^{-1} = \left(\frac{1}{|e^q|^2}\right)\overline{e^q} = \left(\frac{1}{e^{2a}}\right)\overline{e^a\left(\cos|\vec{u}| + \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\operatorname{sen}|\vec{u}|\right)}$$
$$= \frac{1}{e^{2a}}e^a\left(\cos|\vec{u}| - \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\operatorname{sen}|\vec{u}|\right)$$
$$= e^{-a}\left(\cos|-\vec{u}| + \frac{-\vec{u}}{|-\vec{u}|}\operatorname{sen}|-\vec{u}|\right) = e^{-q},$$

e isto termina esta demonstração. □

É preciso tomar cuidado ao admitir a validade de expressões para o caso quatérnio, que são clássicas para a exponencial de variável real ou de variável complexa. É fácil ver que $e^{q+r} = e^q e^r$ não é válida para quaisquer que sejam $q, r \in \mathbb{H}$. De fato, basta ver que

$$e^{i+j} = \cos\sqrt{2} + (i+j)\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}\sqrt{2},$$

e no entanto

$$e^i e^j = (\cos 1 + i \operatorname{sen} 1)(\cos 1 + j \operatorname{sen} 1) = \cos^2 1 + (i+j)(\operatorname{sen} 1)(\cos 1) + k \operatorname{sen}^2 1.$$

7.2. As funções trigonométricas. Sabemos que para todo $x \in \mathbb{R}$, é válida a expressão,

$$\operatorname{sen}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

A série de potências do lado direito faz sentido se $x \in \mathbb{H}$, desde que a série seja convergente. Verificaremos para quais valores de $q \in \mathbb{H}$ isso acontece. Dado $q \in \mathbb{H}$ arbitrário, temos

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|q_{n+1}|}{|q_n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left|(-1)^{n+1}\frac{q^{2n+3}}{(2n+3)!}\right|}{\left|(-1)^n\frac{q^{2n+1}}{(2n+1)!}\right|}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{|q|^{2n+3}}{(2n+3)!}\frac{(2n+1)!}{|q|^{2n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{|q|^2}{(2n+3)(2n+2)} = 0 < 1.$$

Segue, do teste da razão, que a série $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{q^{2n+1}}{(2n+1)!}$ é absolutamente convergente, e portanto convergente, qualquer que seja $q \in \mathbb{H}$. Com isto, podemos então definir a função seno de um quatérnio q pela igualdade em série de potência.

Definição 57. Dado um quatérnio q, o seno de q é o quatérnio representado por $\operatorname{sen} q$, dado pela expressão

$$\operatorname{sen}(q) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{q^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Como no caso da função exponencial, queremos obter uma expressão mais simples que nos permita calcular o valor do seno de um número quatérnio sem a necessidade de determinar a soma da série.

Para isto, considere $q = a + \vec{u} \in \mathbb{H}$. Aplicando a definição anterior temos

$$\operatorname{sen}(q) = (a+\vec{u}) - \frac{(a+\vec{u})^3}{3!} + \frac{(a+\vec{u})^5}{5!} - \frac{(a+\vec{u})^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{(a+\vec{u})^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \tag{11}$$

Usando novamente a expansão binomial (8), podemos reescrever (11) como

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(q) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} q^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (a+\vec{u})^{2n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \sum_{r=0}^{2n+1} \frac{(2n+1)!}{r!(2n-r+1)!} a^{2n-r+1} \vec{u}^r \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{2n+1} \frac{(-1)^n}{r!(2n-r+1)!} a^{2n-r+1} \vec{u}^r.
\end{aligned}$$

O próximo lema será útil para trabalhar com o somatório duplo do segundo membro desta última igualdade.

Lema 58. *Para qualquer $m \in \mathbb{N}$,*

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{2n+1} \frac{(-1)^n}{(r+m)!(2n-r+1)!} a^{2n-r+1} \vec{u}^{r+m} \\
&\qquad = \frac{1}{m!} \vec{u}^m \operatorname{sen}(a) + \frac{1}{(m+1)!} \vec{u}^{m+1} \cos(a) \\
&\qquad\qquad - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{2n+1} \frac{(-1)^n}{(r+m+2)!(2n-r+1)!} a^{2n-r+1} \vec{u}^{r+m+2}.
\end{aligned}$$

Demonstração. Tomando

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{2n+1} \frac{(-1)^n}{(r+m)!(2n-r+1)!} a^{2n-r+1} \vec{u}^{r+m},$$

vamos separar o caso $n = 0$ do somatório externo, e depois os casos $r = 0$ do somatório interno. Desta forma, para qualquer que seja $m \in \mathbb{N}$, obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{2n+1} \frac{(-1)^n}{(r+m)!(2n-r+1)!} a^{2n-r+1} \vec{u}^{r+m}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{m!}a\vec{u}^m + \frac{1}{(m+1)!}\vec{u}^{m+1} + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{r=0}^{2n+1}\frac{(-1)^n}{(r+m)!(2n-r+1)!}a^{2n-r+1}\vec{u}^{r+m} \\
&= \frac{1}{m!}a\vec{u}^m + \frac{1}{(m+1)!}\vec{u}^{m+1} \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{m!(2n+1)!}a^{2n+1}\vec{u}^m + \sum_{r=1}^{2n+1}\frac{(-1)^n}{(r+m)!(2n-r+1)!}a^{2n-r+1}\vec{u}^{r+m}\right) \\
&= \frac{1}{m!}a\vec{u}^m + \frac{1}{(m+1)!}\vec{u}^{m+1} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{m!(2n+1)!}a^{2n+1}\vec{u}^m \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{2n+1}\frac{(-1)^n}{(r+m)!(2n-r+1)!}a^{2n-r+1}\vec{u}^{r+m} \\
&= \frac{1}{m!}\vec{u}^m\left(a + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}a^{2n+1}\right) + \frac{1}{(m+1)!}\vec{u}^{m+1} \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{2n+1}\frac{(-1)^n}{(r+m)!(2n-r+1)!}a^{2n-r+1}\vec{u}^{r+m} \\
&= \frac{1}{m!}\vec{u}^m\operatorname{sen}(a) + \frac{1}{(m+1)!}\vec{u}^{m+1} + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{2n+1}\frac{(-1)^n}{(r+m)!(2n-r+1)!}a^{2n-r+1}\vec{u}^{r+m}.
\end{aligned}
$$

Separando novamente os temos em $r = 1$ do somatório interno, temos

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{2n+1}\frac{(-1)^n}{(r+m)!(2n-r+1)!}a^{2n-r+1}\vec{u}^{r+m} \\
&= \frac{1}{m!}\vec{u}^m\operatorname{sen}(a) + \frac{1}{(m+1)!}\vec{u}^{m+1} + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{2n+1}\frac{(-1)^n}{(r+m)!(2n-r+1)!}a^{2n-r+1}\vec{u}^{r+m} \\
&= \frac{1}{m!}\vec{u}^m\operatorname{sen}(a) + \frac{1}{(m+1)!}\vec{u}^{m+1} \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{(m+1)!(2n)!}a^{2n}\vec{u}^{m+1} + \sum_{r=2}^{2n+1}\frac{(-1)^n}{(r+m)!(2n-r+1)!}a^{2n-r+1}\vec{u}^{r+m}\right) \\
&= \frac{1}{m!}\vec{u}^m\operatorname{sen}(a) + \frac{1}{(m+1)!}\vec{u}^{m+1} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(m+1)!(2n)!}a^{2n}\vec{u}^{m+1} \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{r=2}^{2n+1}\frac{(-1)^n}{(r+m)!(2n-r+1)!}a^{2n-r+1}\vec{u}^{r+m} \\
&= \frac{1}{m!}\vec{u}^m\operatorname{sen}(a) + \frac{1}{(m+1)!}\vec{u}^{m+1}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}a^{2n}\right) \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{r=2}^{2n+1}\frac{(-1)^n}{(r+m)!(2n-r+1)!}a^{2n-r+1}\vec{u}^{r+m} \\
&= \frac{1}{m!}\vec{u}^m\operatorname{sen}(a) + \frac{1}{(m+1)!}\vec{u}^{m+1}\cos(a) \\
&\quad - \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=2}^{2n+3}\frac{(-1)^n}{(r+m)!(2n-r+3)!}a^{2n-r+3}\vec{u}^{r+m}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{m!}\vec{u}^m \operatorname{sen}(a) + \frac{1}{(m+1)!}\vec{u}^{m+1}\cos(a)$$
$$- \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{2n+1} \frac{(-1)^n}{(r+m+2)!(2n-r+1)!} a^{2n-r+1}\vec{u}^{r+m+2}.$$

□

Usando agora repetidamente este lema temos que

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(q) &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{2n+1} \frac{(-1)^n}{r!(2n-r+1)!} a^{2n-r+1}\vec{u}^{r} \\
&= \operatorname{sen}(a) + \vec{u}\cos(a) - \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{2n+1} \frac{(-1)^n}{(r+2)!(2n-r+1)!} a^{2n-r+1}\vec{u}^{r+2} \\
&= \operatorname{sen}(a) + \vec{u}\cos(a) - \frac{1}{2!}\vec{u}^2\operatorname{sen}(a) - \frac{1}{3!}\vec{u}^3\cos(a) \\
&\quad + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{2n+1} \frac{(-1)^n}{(r+4)!(2n-r+1)!} a^{2n-r+1}\vec{u}^{r+4} \\
&= \operatorname{sen}(a) + \vec{u}\cos(a) - \frac{1}{2!}\vec{u}^2\operatorname{sen}(a) - \frac{1}{3!}\vec{u}^3\cos(a) + \frac{1}{4!}\vec{u}^4\operatorname{sen}(a) + \frac{1}{5!}\vec{u}^5\cos(a) \\
&\quad + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{2n+1} \frac{(-1)^n}{(r+6)!(2n-r+1)!} a^{2n-r+1}\vec{u}^{r+6} \\
&= \operatorname{sen}(a) + \vec{u}\cos(a) - \frac{1}{2!}\vec{u}^2\operatorname{sen}(a) - \frac{1}{3!}\vec{u}^3\cos(a) + \frac{1}{4!}\vec{u}^4\operatorname{sen}(a) + \frac{1}{5!}\vec{u}^5\cos(a) \\
&\quad - \frac{1}{6!}\vec{u}^6\operatorname{sen}(a) - \frac{1}{7!}\vec{u}^7\cos(a) + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{2n+1} \frac{(-1)^n}{(r+8)!(2n-r+1)!} a^{2n-r+1}\vec{u}^{r+8},
\end{aligned}$$

e assim sucessivamente. Desta forma, obtemos

$$\operatorname{sen}(q) = \operatorname{sen}(a)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\vec{u}^{2n} + \cos(a)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\vec{u}^{2n+1},$$

e usando novamente que $\vec{u}^{2n} = (-1)^n|\vec{u}|^{2n}$, e que $\vec{u}^{2n+1} = (-1)^n|\vec{u}|^{2n}\vec{u}$, então temos que

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(q) &= \operatorname{sen}(a)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(-1)^n|\vec{u}|^{2n} + \cos(a)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(-1)^n|\vec{u}|^{2n}\vec{u} \\
&= \operatorname{sen}(a)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}|\vec{u}|^{2n} + \vec{u}\frac{1}{|\vec{u}|}\cos(a)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}|\vec{u}|^{2n+1} \\
&= \operatorname{sen}(a)\cosh(|\vec{u}|) + \vec{u}\frac{1}{|\vec{u}|}\cos(a)\operatorname{senh}(|\vec{u}|),
\end{aligned}$$

sendo que nas duas últimas expressões usamos o fato de que $|\vec{u}| \neq 0$. Temos portanto a definição que se segue.

Definição 59. Dado $q = a + \vec{u} \in \mathbb{H}$, o seno de q é o quatérnio denotado por $\operatorname{sen}(q)$, ou $\operatorname{sen} q$, e dado por,

$$\operatorname{sen} q = \operatorname{sen}(a) \cosh |\vec{u}| + \vec{u} \frac{1}{|\vec{u}|} \cos(a) \operatorname{senh} |\vec{u}|, \tag{12}$$

se $\vec{u} \neq \vec{0}$ e por $\operatorname{sen} q = \operatorname{sen} a$ no caso em que $Im(q) = \vec{u} = \vec{0}$.

Repetiremos o processo anterior para a função cosseno. Sabemos que para todo $x \in \mathbb{R}$, é válida a espansão em série de potência

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

A série de potências do lado direito faz sentido se $x \in \mathbb{H}$, desde que a série seja convergente. Vamos verificar para quais quatérnios esta convergência é satisfeita. Dado $q \in \mathbb{H}$ arbitrário, temos

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{|q_{n+1}|}{|q_n|} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\left|(-1)^{n+1} \frac{q^{2n+2}}{(2n+2)!}\right|}{\left|(-1)^n \frac{q^{2n}}{(2n)!}\right|} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{|q|^{2n+2}}{(2n+2)!} \frac{(2n)!}{|q|^{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|q|^2}{(2n+2)(2n+1)} = 0 < 1.
\end{aligned}$$

Segue, do teste da razão, que a série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{q^{2n}}{(2n)!}$ é absolutamente convergente, e consequentemente convergente qualquer que seja $q \in \mathbb{H}$. Podemos então definir, pela série de potência, o cosseno de um quatérnio.

Definição 60. Dado um quatérnio arbitrário q, definimos o cosseno de q como sendo o quatérnio representado por $\cos(q)$, e determinado por

$$\cos q = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{q^{2n}}{(2n)!}.$$

Novamente esta definição é importante, mas queremos obter uma expressão mais simples que nos permita calcular o valor do cosseno de um quatérnio sem determinar a soma da série. Usando a expressão binomial (8), podemos escrever

$$\begin{aligned}
\cos q &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} q^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (a + \vec{u})^{2n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \sum_{r=0}^{2n} \frac{(2n)!}{r!(2n-r)!} a^{2n-r} \vec{u}^r = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{2n} \frac{(-1)^n}{r!(2n-r)!} a^{2n-r} \vec{u}^r.
\end{aligned}$$

O lema a seguir servirá para tratar o somatório duplo do segundo membro desta última igualdade.

Lema 61. *Para qualquer $m \in \mathbb{N}$,*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{2n}\frac{(-1)^n}{(r+m)!(2n-r)!}a^{2n-r}\vec{u}^{r+m}$$
$$= \frac{1}{m!}\vec{u}^m\cos(a) - \frac{1}{(m+1)!}\vec{u}^{m+1}\operatorname{sen}(a)$$
$$- \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{2n}\frac{(-1)^n}{(r+m+2)!(2n-r)!}a^{2n-r}\vec{u}^{r+m+2}.$$

Demonstração. Começando com

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{2n}\frac{(-1)^n}{(r+m)!(2n-r)!}a^{2n-r}\vec{u}^{r+m}$$

vamos separar o caso $n = 0$ do somatório externo, e depois os casos $r = 0$ do somatório interno. Desta forma, para qualquer que seja $m \in \mathbb{N}$, obtemos

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{2n}\frac{(-1)^n}{(r+m)!(2n-r)!}a^{2n-r}\vec{u}^{r+m}\\
&= \frac{1}{m!}\vec{u}^m + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{r=0}^{2n}\frac{(-1)^n}{(r+m)!(2n-r)!}a^{2n-r}\vec{u}^{r+m}\\
&= \frac{1}{m!}\vec{u}^m + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{m!(2n)!}a^{2n}\vec{u}^m + \sum_{r=1}^{2n}\frac{(-1)^n}{(r+m)!(2n-r)!}a^{2n-r}\vec{u}^{r+m}\right)\\
&= \frac{1}{m!}\vec{u}^m + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{m!(2n)!}a^{2n}\vec{u}^m + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{2n}\frac{(-1)^n}{(r+m)!(2n-r)!}a^{2n-r}\vec{u}^{r+m}\\
&= \frac{1}{m!}\vec{u}^m\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}a^{2n}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{2n}\frac{(-1)^n}{(r+m)!(2n-r)!}a^{2n-r}\vec{u}^{r+m}\\
&= \frac{1}{m!}\vec{u}^m\cos(a) + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=1}^{2n+2}\frac{(-1)^{n+1}}{(r+m)!(2n-r+2)!}a^{2n-r+2}\vec{u}^{r+m}\\
&= \frac{1}{m!}\vec{u}^m\cos(a) + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{2n+1}\frac{(-1)^{n+1}}{(r+m+1)!(2n-r+1)!}a^{2n-r+1}\vec{u}^{r+m+1}\\
&= \frac{1}{m!}\vec{u}^m\cos(a) - \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{2n+1}\frac{(-1)^{n}}{(r+m+1)!(2n-r+1)!}a^{2n-r+1}\vec{u}^{r+m+1}.
\end{aligned}$$

Separando novamente os temos em $r = 0$ do somatório interno, temos

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{2n}\frac{(-1)^n}{(r+m)!(2n-r)!}a^{2n-r+1}\vec{u}^{r+m}\\
&= \frac{1}{m!}\vec{u}^m\cos(a) - \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{2n+1}\frac{(-1)^{n}}{(r+m+1)!(2n-r+1)!}a^{2n-r+1}\vec{u}^{r+m+1}\\
&= \frac{1}{m!}\vec{u}^m\cos(a) - \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{(m+1)!(2n+1)!}a^{2n+1}\vec{u}^{m+1}\right.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\qquad\qquad + \sum_{r=1}^{2n+1} \frac{(-1)^n}{(r+m+1)!(2n-r+1)!} a^{2n-r+1} \vec{u}^{r+m+1} \Bigg) \\
&= \frac{1}{m!} \vec{u}^m \cos(a) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(m+1)!(2n+1)!} a^{2n+1} \vec{u}^{m+1} \\
&\qquad\qquad - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=1}^{2n+1} \frac{(-1)^n}{(r+m+1)!(2n-r+1)!} a^{2n-r+1} \vec{u}^{r+m+1} \\
&= \frac{1}{m!} \vec{u}^m \cos(a) - \frac{1}{(m+1)!} \vec{u}^{m+1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} a^{2n+1} \\
&\qquad\qquad - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{2n} \frac{(-1)^n}{(r+m+2)!(2n-r)!} a^{2n-r} \vec{u}^{r+m+2}. \\
&= \frac{1}{m!} \vec{u}^m \cos(a) - \frac{1}{(m+1)!} \vec{u}^{m+1} \operatorname{sen}(a) \\
&\qquad\qquad - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{2n} \frac{(-1)^n}{(r+m+2)!(2n-r)!} a^{2n-r} \vec{u}^{r+m+2}.
\end{aligned}
$$

$\square$

Usando agora repetidamente este lema temos que

$$
\begin{aligned}
\cos(q) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{2n} \frac{(-1)^n}{r!(2n-r)!} a^{2n-r} \vec{u}^r \\
&= \cos(a) - \operatorname{sen}(a)\vec{u} - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{2n} \frac{(-1)^{n+1}}{(r+2)!(2n-r)!} a^{2n-r} \vec{u}^{r+2} \\
&= \cos(a) - \operatorname{sen}(a)\vec{u} - \frac{1}{2!}\vec{u}^2 \cos(a) + \frac{1}{3!}\vec{u}^3 \operatorname{sen}(a) \\
&\qquad + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{2n} \frac{(-1)^n}{(r+4)!(2n-r)!} a^{2n-r} \vec{u}^{r+4} \\
&= \cos(a) - \operatorname{sen}(a)\vec{u} - \frac{1}{2!}\vec{u}^2 \cos(a) + \frac{1}{3!}\vec{u}^3 \operatorname{sen}(a) + \frac{1}{4!}\vec{u}^4 \cos(a) - \frac{1}{5!}\vec{u}^5 \operatorname{sen}(a) \\
&\qquad - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{2n} \frac{(-1)^{n+1}}{(r+6)!(2n-r)!} a^{2n-r} \vec{u}^{r+6} \\
&= \cos(a) - \operatorname{sen}(a)\vec{u} - \frac{1}{2!}\vec{u}^2 \cos(a) + \frac{1}{3!}\vec{u}^3 \operatorname{sen}(a) + \frac{1}{4!}\vec{u}^4 \cos(a) - \frac{1}{5!}\vec{u}^5 \operatorname{sen}(a) \\
&\qquad - \frac{1}{6!}\vec{u}^6 \cos(a) + \frac{1}{7!}\vec{u}^7 \operatorname{sen}(a) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{2n} \frac{(-1)^n}{(r+8)!(2n-r)!} a^{2n-r} \vec{u}^{r+8}
\end{aligned}
$$

e assim sucessivamente. Desta forma, obtemos

$$\cos q = \cos(a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \vec{u}^{2n} - \operatorname{sen}(a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \vec{u}^{2n+1},$$

e usando que $\vec{u}^{2n} = (-1)^n |\vec{u}|^{2n}$ e que $\vec{u}^{2n+1} = (-1)^n |\vec{u}|^{2n} \vec{u}$, obtemos

$$\cos q = \cos(a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (-1)^n |\vec{u}|^{2n} - \operatorname{sen}(a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (-1)^n |\vec{u}|^{2n} \vec{u}$$

$$= \cos(a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} |\vec{u}|^{2n} - \vec{u} \frac{1}{|\vec{u}|} \operatorname{sen}(a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} |\vec{u}|^{2n+1}$$
$$= \cos(a) \cosh(|\vec{u}|) - \vec{u} \frac{1}{|\vec{u}|} \operatorname{sen}(a) \operatorname{senh}(|\vec{u}|),$$

sendo que as duas últimas expressões se justificam pois $|\vec{u}| \neq 0$. Desta forma, redefinimos o cosseno de um quatérnio de uma forma mais simples.

Definição 62. Dado $q = a + \vec{u} \in \mathbb{H}$, o cosseno de q é o quatérnio denotado por $\cos q$, ou $\cos(q)$, dado por

$$\cos q = \cos(a) \cosh |\vec{u}| - \vec{u} \frac{1}{|\vec{u}|} \operatorname{sen}(a) \operatorname{senh} |\vec{u}|, \tag{13}$$

se $\vec{u} \neq \vec{0}$, e por $\cos q = \cos a$ no caso em que $Im(q) = \vec{u} = \vec{0}$.

É imediato desta definição que $\cos 0 = 1$ e que $\operatorname{sen} 0 = 0$. Também, no caso em que $\vec{u} = bi + 0j + 0k$ então as expressões (12) e (13) recuperam as clássicas definições de seno e cosseno de números complexos

$$\operatorname{sen}(a + bi) = \operatorname{sen} a \cosh b + i \cos a \operatorname{senh} b,$$
$$\cos(a + bi) = \cos a \cosh b - i \operatorname{sen} a \operatorname{senh} b,$$

em virtude das igualdades

$$\cosh(b) = \cosh(-b) = \cosh(|b|) \qquad \text{e} \qquad \operatorname{senh}(b) = \operatorname{senh}\left(\tfrac{b}{|b|}|b|\right) = \frac{b}{|b|} \operatorname{senh}(|b|),$$

pois $\frac{b}{|b|} = \pm 1$, é apenas o sinal de b. Desta forma temos que as expressões são extensões das definições de seno e cosseno de variável real ou variável complexa ao caso quatérnio.

Algumas propriedades fundamentais da trigonometria podem ser provadas também para o caso quatérnio. Os próximos resultados estabelecem algumas destas propriedades.

Proposição 63. *Seja $q = a + \vec{u} \in \mathbb{H}$. São válidas as identidades*

$i)$ $\operatorname{sen}^2 q + \cos^2 q = 1$,

$ii)$ $\operatorname{sen}(-q) = -(\operatorname{sen} q)$,

$iii)$ $\cos(-q) = \cos q$,

Demonstração. Suponha que $q = a + \vec{u}$ é um quatérnio arbitrário. Se $\vec{u} = \vec{0}$ então não há o que mostrar pois estas identidades são válidas para argumentos reais. Vamos então provar os três itens para $\vec{u} \neq \vec{0}$, usando diretamente as expressões (12) e (13).

Para provar (i), lembremos que $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$ e temos que

$$\begin{aligned}
&\operatorname{sen}^2 q + \cos^2 q \\
&\quad= \left(\operatorname{sen} a \cosh|\vec{u}| + \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\cos a \operatorname{senh}|\vec{u}|\right)^2 + \left(\cos a \cosh|\vec{u}| - \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\operatorname{sen} a \operatorname{senh}|\vec{u}|\right)^2 \\
&\quad= \operatorname{sen}^2 a \cosh^2|\vec{u}| - \frac{\langle\vec{u},\vec{u}\rangle}{|\vec{u}|^2}\cos^2 a \operatorname{senh}^2|\vec{u}| + \frac{2\vec{u}}{|\vec{u}|}\operatorname{sen} a \cosh|\vec{u}| \cos a \operatorname{senh}|\vec{u}| \\
&\qquad + \cos^2 a \cosh^2|\vec{u}| - \frac{\langle\vec{u},\vec{u}\rangle}{|\vec{u}|^2}\operatorname{sen}^2 a \operatorname{senh}^2|\vec{u}| - \frac{2\vec{u}}{|\vec{u}|}\cos a \cosh|\vec{u}| \operatorname{sen} a \operatorname{senh}|\vec{u}| \\
&\quad= \operatorname{sen}^2 a \cosh^2|\vec{u}| - \cos^2 a \operatorname{senh}^2|\vec{u}| + \cos^2 a \cosh^2|\vec{u}| - \operatorname{sen}^2 a \operatorname{senh}^2|\vec{u}| \\
&\quad= (\operatorname{sen}^2 a + \cos^2 a)\cosh^2|\vec{u}| - (\cos^2 a + \operatorname{sen}^2 a)\operatorname{senh}^2|\vec{u}| \\
&\quad= \cosh^2|\vec{u}| - \operatorname{senh}^2|\vec{u}| = 1.
\end{aligned}$$

Os itens (ii) e (iii) seguem imediatamente da validade da mesma expressão para o caso real. De fato,

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(-q) &= \operatorname{sen}(-a)\cosh|-\vec{u}| - \frac{\vec{u}}{|-\vec{u}|}\cos(-a)\operatorname{senh}|-\vec{u}| \\
&= -\operatorname{sen} a \cosh|\vec{u}| - \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\cos a \operatorname{senh}|\vec{u}| = -\operatorname{sen} q,
\end{aligned}$$

e também

$$\begin{aligned}
\cos(-q) &= \cos(-a)\cosh|-\vec{u}| + \frac{\vec{u}}{|-\vec{u}|}\operatorname{sen}(-a)\operatorname{senh}|-\vec{u}| \\
&= \cos a \cosh|\vec{u}| - \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\operatorname{sen} a \operatorname{senh}|\vec{u}| = \cos q.
\end{aligned}$$

□

Proposição 64. *Se $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ é um vetor arbitrário, então são válidas as identidades*

$i)$ $\operatorname{sen}(\vec{u}) = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\operatorname{senh}|\vec{u}|$, *desde que* $\vec{u} \neq \vec{0}$,

$ii)$ $\cos(\vec{u}) = \cosh|\vec{u}|$.

Demonstração. Basta aplicar as expressões (12) e (13) com $a = 0$. □

É conhecido também que, se $x \in \mathbb{R}$, ou se $x \in \mathbb{C}$, então são válidas as identidades

$$\operatorname{sen} x = \frac{(-i)}{2}(e^{ix} - e^{-ix}) \qquad \text{e} \qquad \cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}). \tag{14}$$

Podemos generalizar estas identidades para o caso quatérnio também. Este é o assunto da próxima proposição.

Proposição 65. *Se $q = a + \vec{u} \in \mathbb{H}$ com $\vec{u} \neq \vec{0}$, então temos que*

$$\operatorname{sen} q = \frac{-\vec{u}}{2|\vec{u}|}\left(e^{q\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}} - e^{-q\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}}\right) = \frac{-\vec{u}}{2|\vec{u}|}\left(e^{\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}q} - e^{-\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}q}\right),$$

e também

$$\cos q = \frac{1}{2}\left(e^{q\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}} + e^{-q\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}q} + e^{-\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}q}\right).$$

Demonstração. Consideremos $q = a + \vec{u} \in \mathbb{H}$ com $\vec{u} \neq \vec{0}$, temos que

$$e^{q\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}} = e^{(a+\vec{u})\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}} = e^{-\frac{1}{|\vec{u}|}\langle \vec{u},\vec{u}\rangle + a\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}},$$

e como $\frac{1}{|\vec{u}|}\langle \vec{u},\vec{u}\rangle = \frac{1}{|\vec{u}|}|\vec{u}|^2 = |\vec{u}|$, então

$$e^{q\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}} = e^{-|\vec{u}| + a\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}} = e^{-|\vec{u}|}\left(\cos\left|a\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\right| + \frac{a\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}}{\left|a\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\right|}\operatorname{sen}\left|a\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\right|\right)$$

e levando em conta que $\frac{a}{|a|}\operatorname{sen}|a| = \operatorname{sen}(\frac{a}{|a|}|a|) = \operatorname{sen} a$ pois $\frac{a}{|a|} = \pm 1$ é o sinal de a, e como a função seno é uma função ímpar, este sinal passa ao argumento, então

$$e^{q\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}} = e^{-|\vec{u}|}\left(\cos|a| + \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\frac{a}{|a|}\operatorname{sen}|a|\right) = e^{-|\vec{u}|}\left(\cos a + \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\operatorname{sen} a\right). \tag{15}$$

Procedendo da mesma forma temos que

$$\begin{aligned} e^{-q\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}} &= e^{|\vec{u}| - a\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}} \\ &= e^{|\vec{u}|}\left(\cos\left|-a\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\right| - \frac{a\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}}{\left|-a\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\right|}\operatorname{sen}\left|-a\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\right|\right) \\ &= e^{|\vec{u}|}\left(\cos|a| - \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\frac{a}{|a|}\operatorname{sen}|a|\right) = e^{|\vec{u}|}\left(\cos a - \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\operatorname{sen} a\right). \end{aligned} \tag{16}$$

Usando então as igualdades (15) e (16), temos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left(e^{q\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}} + e^{-q\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}}\right) &= \frac{1}{2}e^{q\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}} + \frac{1}{2}e^{-q\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}} \\ &= \frac{e^{-|\vec{u}|}}{2}\left(\cos a + \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\operatorname{sen} a\right) + \frac{e^{|\vec{u}|}}{2}\left(\cos a - \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\operatorname{sen} a\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{e^{-|\vec{u}|}}{2}\cos a + \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\frac{e^{-|\vec{u}|}}{2}\operatorname{sen} a + \frac{e^{|\vec{u}|}}{2}\cos a - \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\frac{e^{|\vec{u}|}}{2}\operatorname{sen} a \\
&= \frac{1}{2}\left(e^{-|\vec{u}|} + e^{|\vec{u}|}\right)\cos a - \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\frac{1}{2}\left(e^{|\vec{u}|} - e^{-|\vec{u}|}\right)\operatorname{sen} a \\
&= \cos a \cosh|\vec{u}| - \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\operatorname{sen} a \operatorname{senh}|\vec{u}| = \cos q.
\end{aligned}
$$

Também

$$
\begin{aligned}
\frac{-\vec{u}}{2|\vec{u}|}\left(e^{q\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}} - e^{-q\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}}\right) &= \frac{-\vec{u}}{|\vec{u}|}\left(\frac{1}{2}e^{q\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}} - \frac{1}{2}e^{-q\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}}\right) \\
&= \frac{-\vec{u}}{|\vec{u}|}\frac{e^{-|\vec{u}|}}{2}\left(\cos a + \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\operatorname{sen} a\right) + \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\frac{e^{|\vec{u}|}}{2}\left(\cos a - \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\operatorname{sen} a\right),
\end{aligned}
$$

e levando em conta que $\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = -\frac{1}{|\vec{u}|^2}\langle\vec{u},\vec{u}\rangle = -\frac{|\vec{u}|^2}{|\vec{u}|^2} = -1$, temos que

$$
\begin{aligned}
\frac{-\vec{u}}{2|\vec{u}|}\left(e^{q\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}} - e^{-q\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}}\right) &= \frac{-\vec{u}}{|\vec{u}|}\frac{e^{-|\vec{u}|}}{2}\cos a + \frac{e^{-|\vec{u}|}}{2}\operatorname{sen} a + \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\frac{e^{|\vec{u}|}}{2}\cos a + \frac{e^{|\vec{u}|}}{2}\operatorname{sen} a \\
&= \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\frac{1}{2}\left(e^{|\vec{u}|} - e^{-|\vec{u}|}\right)\cos a + \frac{1}{2}\left(e^{-|\vec{u}|} + e^{|\vec{u}|}\right)\operatorname{sen} a \\
&= \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\operatorname{senh}|\vec{u}|\cos a + \cosh|\vec{u}|\operatorname{sen} a = \operatorname{sen} q.
\end{aligned}
$$

Isto prova as identidades desejadas. Note também que

$$
q\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = (a+\vec{u})\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{1}{|\vec{u}|}(a\vec{u} + \vec{u}\vec{u}) = \frac{1}{|\vec{u}|}(\vec{u}a + \vec{u}\vec{u}) = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}(a+\vec{u}) = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}q,
$$

o que justifica a comutatividade de q com $\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$ na exponencial. Isto termina esta demonstração. □

Também **não** são válidas as fórmulas trigonométricas para soma de arcos. Como por exemplo, não é válido

$$
\operatorname{sen}(q+r) = \operatorname{sen} q \cos r + \operatorname{sen} r \cos q
$$

para todos $q, r \in \mathbb{H}$. De fato,

$$
\operatorname{sen}(i+j) = (i+j)\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{senh}\sqrt{2},
$$

e no entanto

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sen} i \cos j + \operatorname{sen} j \cos i &= (i \operatorname{senh} 1)(\cosh 1) + (j \operatorname{senh} 1)(\cosh 1) \\
&= (i+j)(\operatorname{senh} 1)(\cosh 1) = (i+j)\frac{1}{2}\operatorname{senh} 2.
\end{aligned}
$$

Também para o caso do cosseno podemos obter que

$$
\cos(i+j) = \cosh\sqrt{2} \neq \cosh^2 1 - k \operatorname{senh}^2 1 = \cos i \cos j - \operatorname{sen} i \operatorname{sen} j.
$$

7.3. As funções trigonométricas hiperbólicas. Todo o procedimento feito anteriormente para as funções trigonométricas pode ser repetido para as funções trigonométricas hiperbólicas. O procedimento é análogo e então não repetiremos aqui os detalhes, mas apenas apresentaremos as definições formais e as conclusões.

Levando em conta que para todo $x \in \mathbb{R}$, são válidas as igualdades

$$\operatorname{senh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$
$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

e as séries dos membros da direita são convergentes qualquer que seja $x = q \in \mathbb{H}$, então definimos as funções seno e cosseno hiperbólicos de q por

$$\operatorname{senh} q = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{2n+1}}{(2n+1)!},$$
$$\cosh q = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{2n}}{(2n)!}.$$

Após a substituição da expressão (8), a reorganização dos somatórios e o uso das igualdades $\vec{u}^{2n} = (-1)^n |\vec{u}|^{2n}$ e $\vec{u}^{2n+1} = (-1)^n |\vec{u}|^{2n} \vec{u}$, chegaremos às expressões da definição a seguir.

Definição 66. Dado qualquer $q \in \mathbb{H}$, o seno hiperbólico e o cosseno hiperbólico de q são os quatérnios denotados respectivamente por $\operatorname{senh} q$ e por $\cosh q$, ou $\operatorname{senh}(q)$ e $\cosh(q)$, dados por

$$\operatorname{senh} q = \operatorname{senh}(a) \cos |\vec{u}| + \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} \cosh(a) \operatorname{sen} |\vec{u}| \tag{17}$$
$$\cosh q = \cosh(a) \cos |\vec{u}| + \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} \operatorname{senh}(a) \operatorname{sen} |\vec{u}|. \tag{18}$$

se $\vec{u} \neq \vec{0}$, e por $\operatorname{senh} q = \operatorname{senh} a$ e $\cosh q = \cosh a$ no caso em que $Im(q) = \vec{u} = \vec{0}$.

Assim como no caso das funções seno e cosseno, apresentamos algumas propriedades das funções trigonométricas hiperbólicas para o caso quatérnio.

Proposição 67. *Se $q = a + \vec{u} \in \mathbb{H}$, então são válidas as identidades*

i) $\cosh^2 q - \operatorname{senh}^2 q = 1$,

ii) $\operatorname{senh}(-q) = -\operatorname{senh} q$, *iii)* $\cosh(-q) = \cosh q$,

Demonstração. Seja $q = a + \vec{u}$ um quatérnio arbitrário. Se $\vec{u} = \vec{0}$ então nosso trabalho já estará feito pois estas identidades são válidas para argumentos reais. Vamos então provar os três itens para $\vec{u} \neq \vec{0}$, usando diretamente as expressões (17) e (18).

Para o item (i), lembrando que $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$, temos

$$\begin{aligned}
\cosh^2 q - \operatorname{senh}^2 q \\
&= \left(\cosh a \cos|\vec{u}| + \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\operatorname{senh} a \operatorname{sen}|\vec{u}|\right)^2 - \left(\operatorname{senh} a \cos|\vec{u}| + \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\cosh a \operatorname{sen}|\vec{u}|\right)^2 \\
&= \cosh^2 a \cos^2|\vec{u}| - \frac{\langle\vec{u},\vec{u}\rangle}{|\vec{u}|^2}\operatorname{senh}^2 a \operatorname{sen}^2|\vec{u}| + \frac{2\vec{u}}{|\vec{u}|}\cosh a \cos|\vec{u}| \operatorname{senh} a \operatorname{sen}|\vec{u}| \\
&\quad - \left(\operatorname{senh}^2 a \cos^2|\vec{u}| - \frac{\langle\vec{u},\vec{u}\rangle}{|\vec{u}|^2}\cosh^2 a \operatorname{sen}^2|\vec{u}| + \frac{2\vec{u}}{|\vec{u}|}\operatorname{senh} a \cos|\vec{u}| \cosh a \operatorname{sen}|\vec{u}|\right) \\
&= \cosh^2 a \cos^2|\vec{u}| - \operatorname{senh}^2 a \operatorname{sen}^2|\vec{u}| - \operatorname{senh}^2 a \cos^2|\vec{u}| + \cosh^2 a \operatorname{sen}^2|\vec{u}| \\
&= (\cosh^2 a - \operatorname{senh}^2 a)\cos^2|\vec{u}| + (\cosh^2 a - \operatorname{senh}^2 a)\operatorname{sen}^2|\vec{u}| \\
&= \cos^2|\vec{u}| + \operatorname{sen}^2|\vec{u}| = 1.
\end{aligned}$$

Os itens (ii) e (iii) seguem imediatamente da validade das mesmas expressões para o caso real. De fato,

$$\begin{aligned}
\operatorname{senh}(-q) &= \operatorname{senh}(-a)\cos|-\vec{u}| - \frac{\vec{u}}{|-\vec{u}|}\cosh(-a)\operatorname{sen}|-\vec{u}| \\
&= -\operatorname{senh} a \cos|\vec{u}| - \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\cosh a \operatorname{sen}|\vec{u}| = -\operatorname{senh} q,
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\cosh(-q) &= \cosh(-a)\cos|-\vec{u}| - \frac{\vec{u}}{|-\vec{u}|}\operatorname{senh}(-a)\operatorname{sen}|-\vec{u}| \\
&= \cosh a \cos|\vec{u}| + \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\operatorname{senh} a \operatorname{sen}|\vec{u}| = \cos q.
\end{aligned}$$

□

Proposição 68. *Se $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ então são válidas as identidades*

i) $\operatorname{senh}(\vec{u}) = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\operatorname{sen}|\vec{u}|$, *desde que* $\vec{u} \neq \vec{0}$,

ii) $\cosh(\vec{u}) = \cos|\vec{u}|$.

Demonstração. Basta usar as expressões (17) e (18) com $a = 0$. □

Para números reais (ou complexos) são válidas as identidades exponenciais

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \text{e} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Podemos verificar que estas identidades exponenciais também são válidas no conjunto dos quatérnios, isto é,

$$\operatorname{senh} q = \frac{e^q - e^{-q}}{2} \qquad \text{e} \qquad \cosh q = \frac{e^q + e^{-q}}{2}.$$

De fato, se $q = a + \vec{u} \in \mathbb{H}$, com $\vec{u} = \vec{0}$ então não há o que mostrar pois todas as funções recaem ao caso real onde as igualdades são verdadeiras. Agora se $q = a + \vec{u} \in \mathbb{H}$, com $\vec{u} \neq \vec{0}$, então

$$\begin{aligned}
\frac{e^q - e^{-q}}{2} &= \frac{1}{2}e^q - \frac{1}{2}e^{-q} \\
&= \frac{e^a}{2}\left(\cos|\vec{u}| + \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\operatorname{sen}|\vec{u}|\right) - \frac{e^{-a}}{2}\left(\cos|\vec{u}| - \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\operatorname{sen}|\vec{u}|\right) \\
&= \frac{e^a - e^{-a}}{2}\cos|\vec{u}| + \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\frac{e^a + e^{-a}}{2}\operatorname{sen}|\vec{u}| \\
&= \operatorname{senh} a \cos|\vec{u}| + \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\cosh a \operatorname{sen}|\vec{u}| = \operatorname{senh} q,
\end{aligned}$$

e de forma análoga para o cosseno hiperbólico.

Em geral, não são válidas também as fórmulas de soma de arcos para a trigonometria hiperbólica, isto é, não são válidas as identidades

$$\operatorname{senh}(q + r) = \operatorname{senh} q \cosh r + \operatorname{senh} r \cosh q$$
$$\cosh(q + r) = \cosh q \cosh r + \operatorname{senh} r \operatorname{senh} q$$

para quaisquer que sejam $q, r \in \mathbb{H}$. Desta vez, deixamos para o leitor obter contra-exemplos.

8. Considerações finais

Este texto tem a intenção de ser apenas o ponto de início de muitos outros trabalhos. Uma vez conhecido o conjunto dos quatérnios, passamos a questionar: Podemos considerar funções $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$? Como definir limites ou continuidade destas funções? Qual seria o significado da expressão $\sqrt{q}$? É possível definir, $\ln q$, $\operatorname{sen}^{-1} q$ ou $\cos^{-1} q$? Quais seriam as expressões para estas funções? Podemos derivar estas funções? Será válido também que $(e^q)' = e^q$ e que $(\operatorname{sen} q)' = \cos q$? E quanto às aplicações da teoria dos quatérnios?

Algumas destas perguntas podem render muito tempo de estudo e muitas páginas de continhas.

Referências

1. Herstein, I. N. *Topics in Algebra*. Ginn and Company. Waltham, Massachusetts - Toronto - London, 1964. 47

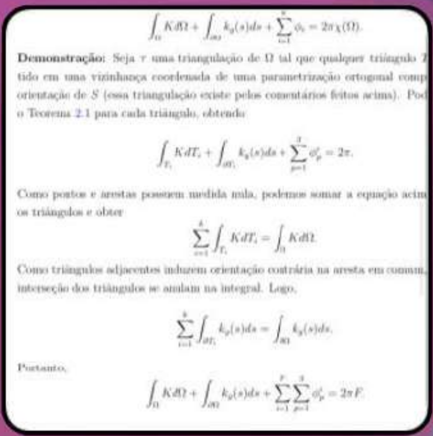
2. Santos, M. A. dos *Dos números complexos aos quatérnions: Desenvolvimento algébrico, interpretação geométrica e aplicações.* 2013. 102 f. Dissertação (Mestrado em Matemática)- Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em rede Nacional - PROFMAT, Curitiba, 2013. 46

3. Poole, David. *Curso de álgebra linear*. 9^a edição. Tomson Learning. São Paulo, 2004. 53, 55

Universidade Estadual de Maringá

Cálculo Diferencial e Integral:

um kit de sobrevivência



$$\int_\Omega K d\Omega + \int_{\partial\Omega} k_g(s)ds + \sum_{i=1}^{n} \phi_i = 2\pi\chi(\Omega).$$

Demonstração: Seja τ uma triangulação de Ω tal que qualquer triângulo T_i tido em uma vizinhança coordenada de uma parametrização ortogonal comp orientação de S (essa triangulação existe pelos comentários feitos acima). Pod o Teorema 2.1 para cada triângulo, obtendo

$$\int_{T_i} K dT_i + \int_{\partial T_i} k_g(s)ds + \sum_{p=1}^{3} \phi_p^i = 2\pi.$$

Como pontos e arestas possuem medida nula, podemos somar a equação acim os triângulos e obter

$$\sum_{i=1}^{k} \int_{T_i} K dT_i = \int_\Omega K d\Omega.$$

Como triângulos adjacentes induzem orientação contrária na aresta em comum, interseção dos triângulos se anulam na integral. Logo,

$$\sum_{i=1}^{k} \int_{\partial T_i} k_g(s)ds = \int_{\partial\Omega} k_g(s)ds.$$

Portanto,

$$\int_\Omega K d\Omega + \int_{\partial\Omega} k_g(s)ds + \sum_{i=1}^{F} \sum_{p=1}^{3} \phi_p^i = 2\pi F.$$

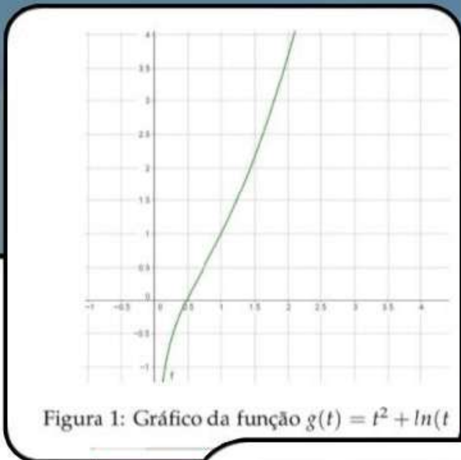
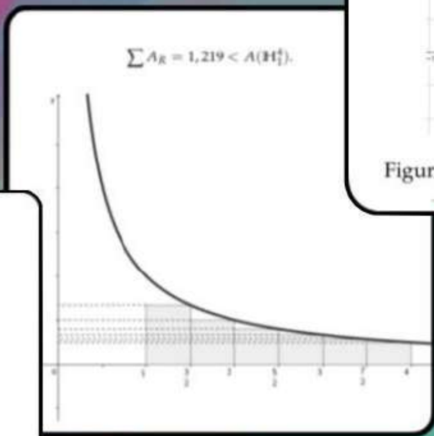


Figura 1: Gráfico da função $g(t) = t^2 + ln(t$



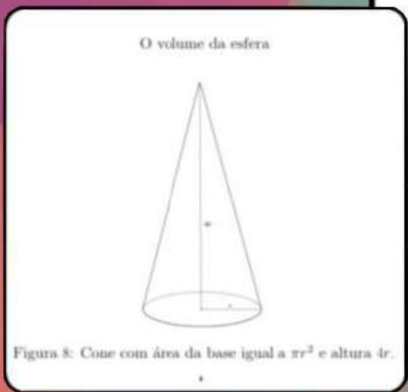
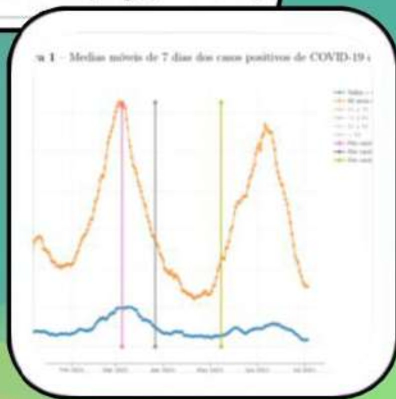


Figura 8: Cone com área da base igual a πr^2 e altura $4r$.



Esta revista é responsável pela formulação de textos autorais desenvolvido pelo projeto de extensão "Kit". Neste projeto, contamos com alunos graduandos e demais interessados em matemática aplicada.
Entre seus textos, podemos encontrar, curiosidades, resoluções, demonstrações , fatos relevantes , ideais para IC, entre outros!