J Jornal Eletrônico de Ensino e Pesquisa de Matemática
(1s.) **v. 2** 2 (2018): 25–51. ©Jeepema–ISSN-2594-6323.
www.dma.uem.br/kit/jeepema

Introdução à teoria dos Jogos

Doherty Andrade (FEITEP) & Thiago Zanko (UEM)

Resumo: O presente texto tem por objetivo apresentar de forma sucinta os fundamentos elementares da teoria dos jogos e demonstrar o teorema de equilíbrio de Nash cuja demonstração utiliza o teorema do ponto fixo de Brouwer.

Sumário

1. Introdução

A teoria dos jogos é a teoria matemática que procura modelar fenômenos em que se pode observar conflito, isto é, quando dois ou mais agentes interagem com objetivos contrários. Assim, a teoria dos jogos pode ser definida como a teoria dos modelos matemáticos que estuda a escolha de decisões ótimas sob condições de conflito.

A origem da teoria do jogos pode ser situada no século XVIII, até onde se tem conhecimento, por meio de correspondências entre Nicolas Bernoulli e James Waldegrave, este último analisa um jogo e fornece uma solução no sentido que veremos mais adiante. No século XIX, Zermello e Borel, separadamente, publicaram diversos trabalhos sobre jogos. Borel achava que a guerra e a economia podiam ser estudadas por meio de jogos estratégicos.

Em 1928 o matemático John von Neumann demonstrou importantes resultados, em 1944, junto com o economista Oscar Morgenstern, publicou o livro "The theory of games and economic behaviour". O grande salto ocorreu em 1950 com John Forbes Nash Junior, em 1994, juntamente com outros receberam o prêmio Nobel por suas contribuições à teoria dos jogos.

Os primeiros registros de estudos de um jogo por estratégia mista datam de 1713 no estudo do jogo Le her (jogo de baralho com um deck de 52 cartas) realizado por James Waldegrave e descrito por ele em uma carta destinada a Pierre Rémond de Montmort. Em 1838, Augustin Cournot analisou um caso específico de duopólio e ele definiu conceito de equilíbrio de mercado como a situação em que ambas as empresas agem de forma ótima à decisão da empresa concorrente.

A Teoria dos Jogos só vai chamar a atenção das ciências sociais em 1944 (em plena Segunda Guerra Mundial) com o livro *Teoria dos Jogos e Comportamento econômico* de John Von Neumann e Oscar Morgenstern. Nessa obra, eles detalharam e especificaram a formulação de problemas econômicos e a aplicação da teoria dos jogos à economia

Para prosseguirmos com nossa explanação, voltemos a meados do século XVIII quando Adam Smith publica a obra *A Riqueza das Nações*. Considerado o pai do liberalismo e um marco na economia, com uma burguesia emergente e à beira da revolução industrial, Adam Smith insere conceitos com *A Mão Invisível*, no qual ele afirma que existiria uma "mão invisível"que regula os mercados e seus agentes e estabelece uma determinada ordem originada da interação dos indivíduos. Independentemente de uma entidade coordenadora em comum. Ele afirmava ainda que se cada um fizesse o bem para si próprio, o estaria fazendo também para o coletivo. Em meados da década de 50, século XX, John Forbes Nash, prova a existência de um jogo cooperativo, ou seja, não há necessidade de sorte para jogá-lo, e afirma que você tem que fazer o bem para si próprio e para o coletivo simultaneamente. Por exemplo, o sonegador de impostos está se beneficiando com o valor que pagou a menos em tributos, mas prejudicou a construção de estradas, hospitais, ferrovias, ou seja, o seu coletivo. Ele prova então, que todo jogo possui um equilíbrio e ele é único, o que lhe renderia o Prêmio Nobel de economia de 1994. O trabalho de Nash foi um marco para a economia e para os conceitos matemáticos da Teoria dos Jogos da época, principalmente, porque era o período da Guerra Fria e buscava-se muito a compreensão da Teoria dos Jogos e como aplicá-la. Ele ainda formulou o problema da barganha e fez uma ampla contribuição para os jogos cooperativos e não cooperativos.

O tema de modelagem matemática em finanças é fascinante e possui aspectos interdisciplinares que relacionam algumas das principais contribuições científicas do século XX. Dentre elas, citamos como exemplo:

- A metodologia de Arrow-Debreu que está associada ao prêmio Nobel em Economia de Kenneth Arrow (1972) e o de Gerard Debreu (1983).

- A teoria de precificação por princípios de não-arbitragem e de cobertura de carteiras e que leva a equação de Black-Scholes. Esta última contribuição está associada ao prêmio Nobel de 1997 para Robert Merton e Myron Scholes também na área de Economia.

- A fórmula de Feynman-Kac que aqui novamente, temos uma referência ao célebre matemático aplicado Marc Kac em conexão com o físico Richard P. Feynman ganhador do prêmio Nobel de Física de 1965.

Na próxima seção apresentamos a definição matemática de jogo e damos alguns exemplos.

2. Definição de jogo

Um jogo é uma terna (G, S, U), onde $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ denota um conjunto finito de jogadores g_i, S é o conjunto das estratégias de cada jogador $S = \{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ e $S_i = \{s_{i1}, s_{i2}, \ldots, s_{im_i}\}$ são opções de decisões do jogador g_i, denominadas de estratégias puras, e U é o conjunto das funções utilidades de cada jogador $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ em que cada u_i está definida por

$$\begin{aligned} u_i : \mathbf{S} &\rightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{s} &\mapsto u_i(\mathbf{s}) \end{aligned}$$

onde $\mathbf{S} = \prod_{i=1}^{n} S_i$ é o espaço das estratégias puras. Um elemento $\mathbf{s} \in \mathbf{S}$ é denominado um perfil de estratégias puras

$$\mathbf{s} = \{s_{1j_1}, s_{2j_2}, \ldots, s_{nj_n}\}.$$

Note que $u_i(\mathbf{s})$ associa a cada perfil de estratégias puras um ganho (*payoff*) do jogador g_i quando os jogadores utilizaram as suas estretégias puras apresentadas em $\mathbf{s}$.

3. Exemplos de jogos

Apresentamos a seguir alguns exemplos simples que ilustram os problemas tratados na teoria dos jogos.

• Exemplo 3.1 (Dilema do prisioneiro)

Este é um dos exemplos mais conhecidos, foi formulado por Albert W. Tucker em 1950.

Dois ladrões, Al e Bob, são capturados e acusados do mesmo crime. Presos em selas separadas e sem comunição entre si, o delegado faz a eles a seguinte proposta: cada um pode escolher entre confessar e negar o crime. Se nenhum deles confessar, então ambos terão uma pena de um ano de prisão. Se os dois confessarem, então ambos terão pena de cinco anos. Mas se um confessar e o outro negar, então o que confessou será libertado e o outro será condenado a dez anos de prisão.

Neste exemplo, temos:

Jogadores	Estratégias
Al	S1={confessar, negar}
Bob	S2={confessar, negar}

O conjunto das estratégias **S** puras é o produto cartesiano $S1 \times S2$ das estratégias de cada um dos jogadores

$$\mathbf{S} = \{(\text{confessar, confessar}), (\text{confessar, negar}), (\text{negar, confessar}), (\text{negar, negar})\}.$$

As duas funções utilidades são

$$\begin{array}{rccc} u_{Al}: & \mathbf{S} & \to & \mathbb{R}, \\ & (c,c) & \mapsto & -5 \\ & (c,n) & \mapsto & 0 \\ & (n,c) & \mapsto & -10 \\ & (n,n) & \mapsto & -1 \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} u_{Bob}: & \mathbf{S} & \to & \mathbb{R} \\ & (c,c) & \mapsto & -5 \\ & (c,n) & \mapsto & -10 \\ & (n,c) & \mapsto & 0 \\ & (n,n) & \mapsto & -1 \end{array}$$

É usual representar os payoffs em uma tabela

BOB

		confessar	negar
AL	confessar	(-5,-5)	(0,-10)
	negar	(-10,0)	(-1,-1)

Vamos analisar este jogo do ponto de vista do Al. Duas situações podem ocorrer com relação ao Bob: confessa ou não confessa. Se Bob confessa, então é melhor Al confessar também. Se Bob não confessa, então Al ficará livre se confessar. Em qualquer caso, é melhor Al confessar.

Do mesmo modo, vamos alisar o jogo do ponto de vista de Bob. Duas situações podem ocorrer com relação ao Al: confessa ou não confessa. Se Al confessa, então é melhor Bob confessar também. Se Al não confessa, então Bob ficará livre se confessar. Em qualquer caso, é melhor Bob confessar.

Pensando assim, ambos ficarão presos por cinco anos.

• **Exemplo 3.2 (Guerra dos sexos)**

Um casal deseja sair para passear. O homem prefere assitir a um jogo de futebol enquanto a mulher prefere ir ao cinema. Ambos indo ao futebol ou ao cinema, apenas um deles terá maior satisfação; mas se sairem sozinhos então ambos ficarão igualmente insatisfeitos.

Esta situação se adequa ao um jogo estratégico em que o conjunto de jogadores é $G = \{\text{homem}, \text{mulher}\}$, as estratégias do homem $S_H = \{\text{futebol}, \text{cinema}\}$ e as estratégias da mulher $S_M = \{\text{futebol}, \text{cinema}\}$. Assim, o conjunto S das estratégias é

$$S = \{(\text{futebol}, \text{futebol}), (\text{futebol}, \text{cinema}), (\text{cinema}, \text{futebol}), (\text{cinema}, \text{cinema})\}.$$

As duas funções utilidade u_H e u_M estão descritas pela seguinte matriz dos payoffs

		Mulher	
		futebol	cinema
Homem	futebol	(10,5)	(0,0)
	cinema	(0,0)	(5,10)

• **Exemplo 3.3 (matching pennies)**

Neste jogo, dois jogadores exibem, ao mesmo tempo, a moeda que cada um esconde na sua mão. Se ambas apresentam cara ou coroa, o segundo jogador dá sua moeda ao primeiro jogador. Se ambos forem distintas, isto é, uma apresenta cara e o outro coroa, o primeiro jogador dá sua moeda ao segundo.

As duas funções utilidade estão descritas pela seguinte matriz dos payoffs

		g1	
		s_{21}	s_{22}
g2	s_{11}	(1,-1)	(-1,1)
	s_{12}	(-1,1)	(1,-1)

• **Exemplo 3.4 (Caso da perfuração dos poços de petróleo)**

As empresas XY e WZ ganham a licitação para a perfuração e exploração de um poço de petróleo P. Ambas devem iniciar suas atividades simultaneamente. Há duas opções de tubulação: a estreita, de custo de 1 (um) milhão de dólares e a larga ao custo de 5 (cinco) milhões de dólares. Ora, se XY e WZ acordarem em gastar menos, as duas instalam a tubulação estreita e extraem a mesma quantidade de petróleo. Mas se uma das duas decidirem colocar a tubulação larga para extrair mais petróleo e mais rápido, será beneficiada caso a outra mantenha a estreita. Mas se ambas tiverem o mesmo raciocínio, gastarão 5 (cinco) milhões e ao final vão extrair a mesma quantidade cada, mas com 4 (quatro) milhões de dólar a mais de custo.

As estratégias são:

$$S_{XY} \times S_{WZ} = \{\text{(estreita,estreita); (estrita,larga); (larga,estreita); (larga,larga)}\}.$$

A Matriz de payoffs é dada por:

		Perfuradora XY	
		larga	estreita
Perfuradora WZ	larga	(-5,-5)	(-5,-1)
	estreita	(-1,-5)	(-1,-1)

4. Dominância

Vamos denotar por $\mathbf{s}_{-i}$ um perfil de estratégia em que a estratégia do jogador g_i foi retirada, isto é,

$$\mathbf{s}_{-i} = \{s_{1j_1}, s_{2j_2}, \ldots, s_{(i-1)j_{i-1}}, s_{(i+1)j_{i+1}}, \ldots, s_{nj_n}\}\mathbf{S}_{-i}$$

e por $\mathbf{S}_{-i} = \mathbf{S}_1 \times \cdots \mathbf{S}_{i-1} \times \mathbf{S}_{i+1} \times \mathbf{S}_n$.

Deste modo, um perfil de estratégia pura pode ser convenientemente representado por $\mathbf{s} = (s_{ij}, \mathbf{s}_{-i})$.

Pelo par $(s_{ij_i}, \mathbf{s}_{-i})$ representamos

$$(s_{1j_1}, s_{2j_2}, \ldots, s_{(i-1)j_{i-1}}, s_{ij_i}, s_{(i+1)j_{i+1}}, \ldots, s_{nj_n}).$$

Dizemos que uma estratégia pura s_{ik} do jogador g_i é estritamente dominada pela estratégia $s_{ik'}$ se

$$u_i(s_{ik'}, \mathbf{s}_{-i}) > u_i(s_{ik}, \mathbf{s}_{-i}),$$

para todo $\mathbf{s}_{-i} \in \mathbf{S}_{-i}$.

A estratégia pura s_{ik} do jogador g_i é fracamente dominada pela estratégia $s_{ik'}$ se

$$u_i(s_{ik'}, \mathbf{s}_{-i}) \geq u_i(s_{ik}, \mathbf{s}_{-i}),$$

para todo $\mathbf{s}_{-i} \in \mathbf{S}_{-i}$.

Chamamos de dominância estrita iterada ao processo em que, sequencialmente, se eliminam as estratégias estritamente dominadas.

Uma solução estratégica ou equilíbrio de Nash de um jogo é um ponto onde cada jogador não tem incentivo de mudar sua estratégia se os demais jogadores não o fizerem. Em termos matemáticos, um perfil de estratégia pura

$$\mathbf{s}^* = (s_1^*, s_2^*, \ldots, s_{(i-1)}^*, s_i^*, s_{(i+1)}^*, \ldots, s_n^*) \in \mathbf{S}$$

é um equilíbrio de Nash se

$$u_i(s_i^*, \mathbf{s}_{-i}^*) \geq u_i(s_{ij_i}, \mathbf{s}_{-i}^*)$$

quando $i = 1, 2, \ldots, n$ e para todo $j_i = 1, 2, \ldots, m_i$, com $m_i \geq 2$.

No dilema dos prisioneiras, o perfil de estratégias (confessar, confessar) é um equilíbrio de Nash. Na batalha dos sexos, (futebol futebol) e(cinema, cinema) são únicos equilíbrios. No jogo de combinar moedas não há equilíbrio de Nash.

Uma alternativa para estes casos é considerar o jogo de ponto de vista probabilístico, isto é, ao invés de escolher um perfil de estratégia pura, o jogador deve escolher uma distribuição de probabilidades sobre suas estratégias puras.

Uma estratégia mista $\mathbf{p}_i$ para o jogador $g_i \in G$ é uma distribuição de probabilidades sobre o conjunto S_i de estratégias puras do jogador, isto é, $\mathbf{p}_i$ é um elemento do conjunto Δ_{m_i},

$$\Delta_{m_i} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{m_i}) \in \mathbb{R}^{m_i}; x_1, \geq 0, x_2, \geq 0, \ldots, x_{m_i} \geq 0 \text{ e } \sum_{k=1}^{m_i} x_k = 1\}.$$

Note que Δ_{m_i} é um conjunto compacto e convexo.

O espaço de todos os perfis de estratégia mista é o produto cartesiano

$$\Delta = \Delta_{m_1} \times \Delta_{m-2} \times \cdots \times \Delta_{m_n},$$

denominado de espaço de estratégia mista. Um vetor $\mathbf{p} \in \Delta$ é denominado de um perfil de estratégia mista.

Como no caso de estratégias puras, usamos a notação $\mathbf{p}_{-i}$ para representar as estratégias de todos os jogadores, com exceção do jogador g_i.

Note que Δ é compacto e convexo, pois é produto de compactos e convexos.

Cada perfil de estratégia mista $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n) \in \Delta$ determina um payoff esperado, uma média dos payoffs ponderada pelas distribuições de probabilidades $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n$. Mais precisamente,

$$\mathbf{p} = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n) = (p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{1n}; p_{21}, p_{22}, \ldots, p_{2n}; \ldots; p_{n1}, p_{n2}, \ldots, p_{nm_n})$$

então

$$u_i(\mathbf{p}) = \sum_{j_1=1}^{m_1} \sum_{j_2=1}^{m_2} \cdots \sum_{j_n=1}^{m_n} \left(\prod_{k=1}^{n} p_{kj_k} u_i(s_{1j_1}, s_{2j_2}, \ldots, s_{nj_n} \right).$$

Sejam $S_i^{(0)} = S_i$ e $\Delta_{m_i}^{(0)} = \Delta_{m_i}$. Defina recursivamente,

$$S_i^{(n)} = \{s \in S_i^{(n-1)}; \nexists \mathbf{p} \in \Delta_{m_i}^{(n-1)} \text{ tal que } \forall s_{-i} \in S_{-i}^{(n-1)}, u_i(\mathbf{p}, s_{-i} > u_i(s, s_{-i})\}$$

e

$$\Delta_{m_i}^{(n)} = \{p = (p_1, p_2, \ldots, p_{m_i}) \in \Delta_{m_i}; \forall k = 1, 2, \ldots, m_i, p_k > 0 \text{ somente se } s_{ik} \in S_i^{(n)}\},$$

onde $u_i(\mathbf{p}, s_{-i})$, por abuso de notação, representa o payoff esperado quando o jogador g_i escolhe a estratégia mista $\mathbf{p}$ e os demais jogadores escolhem as estratégias mistas correspondentes as estratégias puras dadas por s_{-i}. A interseção

$$S_i^{(\infty)} = \bigcap_{n=0}^{\infty} S_i^{(n)}$$

é o conjunto das estratégias puras e

$$\Delta_{m_i}^{(\infty)} = \{p \in \Delta_{m_i};\ \nexists \mathbf{p}' \in \Delta_{m_i} \text{talque } \forall s_{-i} \in S_{-i}^{(\infty)} u_i(\mathbf{p}', s_{-i}) > u_i(\mathbf{p}, s_{-i})\},$$

é o conjunto de todas as estratégias mistas do jogador g_i que sobreviveram a técnica da dominância estrita iterada.

Definição 4.1 (Equilíbrio de Nash) *Dizemos que um perfil de estratégia mista*

$$\boldsymbol{p}^* = (\boldsymbol{p}_1^*, \boldsymbol{p}_1^*, \ldots, \boldsymbol{p}_n^*) \in \Delta = \Delta_{m_i} \times \Delta_{m_2} \times \cdots \times \Delta_{m_n}$$

é um equilíbrio de Nash se

$$u_i(\boldsymbol{p}_i^*, \boldsymbol{p}_{-i}^*) \geq u_i(\boldsymbol{p}_i, \boldsymbol{p}_{-i}^*)$$

para todo $p_i \in \Delta_{m_i}$, isto é, nenhum jogador se sente motivação de trocar sua estratégia mista se os demais jogadores são o fizerem.

• Exemplo 4.2

No dilema do prisioneiro, o perfil de estratégia mista $\mathbf{p}^* = (1, 0; 1, 0)$ é um equilíbrio de Nash, pois

$$u_1(\mathbf{p}, \mathbf{p}^*) = u_1(p, 1-p; 1, 0) = 5p - 10 \leq u_1(1, 0; 1, 0) = u_1(p_1^*, p_2^*),$$

para todo $\mathbf{p} = (1-p, p) \in \Delta_2$ e

$$u_2(\mathbf{p}_1^*, \mathbf{q}) = u_1(1,0;q,1-q) = 5q - 10 \leq u_2(1,0;1,0) = u_2(p_1^*, p_2^*),$$

para todo $\mathbf{q} = (1-q, q) \in \Delta_2$.

Note que este equilíbrio corresponde ao equilíbrio em estratégias puras $\mathbf{s}^* =$ (confessar, confessar).

5. O teorema minimax de von Neumann

5.1. JOGO COM 2 JOGADORES E DE SOMA CONSTANTE. Um jogo com dois jogadores, g_l chamado jogador linha (com m estratégias) e g_c chamado jogador coluna (com n estratégias) e matriz de payoffs dado por

$$\begin{array}{cc|c|c|c|c|c|}
 & & & & g_c & & \\
\cline{3-7}
 & & & 1 & 2 & \cdots & n \\
\cline{3-7}
 & & 1 & (a_{11}, b_{11}) & (a_{12}, b_{12}) & & (a_{1n}, b_{1n}) \\
g_l & & 2 & (a_{21}, b_{21}) & (a_{22}, b_{22}) & & (a_{2n}, b_{2n}) \\
 & & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
 & & m & (a_{m1}, b_{m1}) & (a_{m2}, b_{m2}) & & (a_{mn}, b_{mn}) \\
\cline{3-7}
\end{array}$$

satisfazendo $a_{ij} + b_{ij} = c$, para todo $i = 1, 2, \ldots, m$ e todo $j = 1, 2, \ldots, n$ é dito um jogo de soma constante. No caso em que $c = 0$ o jogo é dito de soma zero.

Note que, nesse caso, conhecendo-se a matriz dos payoffs do jogador g_1 também se conhece a matriz dos payoffs do jogador g_2, pois $b_{ij} = c - a_{ij}$.

Se A é a matriz dos payoffs do jogador g_1 e B é a matriz dos payoffs do jogador g_2, então $A + B = C$, a matriz com todas as entradas iguais a c.

Se $p = (p_1, p_2, \ldots, p_m) \in \Delta_m$ é uma distribuição de probabilidade para as estratégias puras do jogador linha e se $q = (q_1, q_2, \ldots, q_n) \in \Delta_n$ é uma distribuição de probabilidade para as estratégias puras do jogador coluna, então o payoff esperado para o jogador linha é

$$u_l(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_i q_j a_{ij} = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \vdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} = \mathbf{p}^T A\mathbf{q}.$$

De modo análogo,

$$u_c(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \mathbf{p}^T B\mathbf{q}.$$

Como o jogo tem soma constante,

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}] = [c] = c[1],$$

onde $[1]$ denota a matriz $m \times n$ formada com 1 em todas as suas entradas.

Notando que $u_l(p,q) = \sum\sum p_i q_j a_{ij} = p^T Aq$ obtemos $u_c(p,q) = \sum\sum p_i q_j b_{ij} = p^T Bq = p^T(C-A)q = c - u_l(p,q)$. Assim, temos:

Lema 5.1 $u_c(p,q) = c - u_l(p,q)$.

Lema 5.2 *Vale a seguinte propriedade*

$$u_l(\mathbf{p}^*,\mathbf{q}^*) \geq u_l(\mathbf{p},\mathbf{q}^*) \Leftrightarrow u_c(\mathbf{p}^*,\mathbf{q}^*) \leq u_c(p,\mathbf{q}^*).$$

Demonstração: Note que $u_c(\mathbf{p}^*,\mathbf{q}^*) = c - u_l(\mathbf{p}^*,\mathbf{q}^*) \leq c - u_l(\mathbf{p},\mathbf{q}^*) = u_c(\mathbf{p},\mathbf{q}^*)$.

Para a recíproca, $u_l(\mathbf{p}^*,\mathbf{q}^*) = c - u_c(\mathbf{p}^*,\mathbf{q}^*) \geq c - u_c(\mathbf{p},\mathbf{q}^*) = u_l(\mathbf{p},\mathbf{q}^*)$.

Isto conclui a demonstração. □

5.2. EQUILÍBRIO DE NASH EM ESTRATÉGIAS PURAS. Dizemos que a_{ij} da matriz A é um ponto de sela se ele for simultaneamente um mínimo em sua linha e um máximo em sua coluna. Isto é,

$$\begin{aligned} a_{ij} &\geq a_{il}, \forall l = 1,2,\ldots,n \\ a_{ij} &\geq a_{kj}, \forall k = 1,2,\ldots,m. \end{aligned}$$

Teorema 5.3 *O elemento a_{ij} é um elemento de sela de A se, e somente se, o par (i, j) é um equilíbrio de Nash em estratégias puras para o jogo.*

Demonstração: Suponha que o ponto a_{ij} seja um ponto de sela de A. Como a_{ij} é um máximo na coluna, tem-se

$$u_l(i, j) = a_{ij} \geq a_{kj} = u_l(k, j), \forall k = 1, 2, \ldots, m.$$

Isto é, o jogador linha não pode aumentar o seu payoff se o jogador coluna mantiver a estratégia.

Por outro lado, como a_{ij} é mínimo em sua linha, vale que

$$u_c(i, j) = b_{ij} = c - a_{ij} \geq c - a_{il} = b_{il} = u_c(i, l)$$

para todo $l = 1, 2, \ldots, n$. Isto é, o jogador coluna não pode aumentar o seu payoff se o jogador linha mantiver a estratégia.

Se (i, j) é um equilíbrio de Nash para o jogo, é fácil ver que a_{ij} é uma máximo em sua coluna e um mínimo em sua linha e portanto, é um ponto de sela. □

Teorema 5.4 *Se a_{ij} e a_{rs} são pontos de sela de A, então a_{is} e a_{rj} também são pontos de sela e além disso,*

$$a_{ij} = a_{rs} = a_{is} = a_{rj}.$$

Demonstração: Considere a matriz dos payoffs $A = [a_{ij}]$. Como a_{ij} e a_{rs} são selas segue que

$$a_{ij} \leq a_{is} \leq a_{rs}$$

e

$$a_{ij} \geq a_{rj} \geq a_{rs}.$$

Donde segue a igualdade e a conclusão. □

Notação: $\underline{a_k} = \min\limits_{1 \leq l \leq n} a_{kl}$, mínimo na linha k e $\overline{a_l} = \max\limits_{1 \leq k \leq m} a_{kl}$, máximo na coluna k. Assim, o payoff mínimo do jogador coluna, se escolher a coluna l, é dado por $c - \overline{a_l}$.

Defina

$$
\begin{aligned}
v_l(A) &= \max_{1\leq k\leq m} \underline{a_k} = \max_{1\leq k\leq m} \min_{1\leq l\leq n} a_{kl} \\
v_c(A) &= \min_{1\leq l\leq n} \overline{a_l} = \min_{1\leq l\leq n} \max_{1\leq k\leq m} a_{kl}.
\end{aligned}
$$

Teorema 5.5 *Vale sempre a desigualdade $v_c(A) \geq v_l(A)$.*

Demonstração: É claro que $a_{kj} \geq \min_{1\leq l\leq n} a_{kl}, \forall k = 1,\ldots,m\ \forall l = 1,\ldots,n$. Tomando o máximo em k nessa expressão temos $\max_{1\leq k\leq m} a_{kj} \geq \max_{1\leq k\leq m} \min_{1\leq l\leq n} a_{kl} = v_l(A), \forall j$.

Agora tomando o mínimo em j, $\min_{1\leq j\leq n} \max_{1\leq k\leq m} a_{kj} \geq v_l(A), \forall j$, isto é, $v_c(A) \geq v_l(A)$. □

Teorema 5.6 *Uma matriz A tem ponto de sela, se e somente se, $v_l(A) = v_c(A)$.*

Demonstração: Suponha que a_{ij} seja ponto de sela da matriz A. Então, $a_{ij} = \min_{1\leq l\leq n} a_{il} = \underline{a_i}$. como $v_l(A) = \max_{1\leq k\leq m} \underline{a_k}$ segue que$v_l(a) \geq \underline{a_i} = a_{ij}$.

Po outro lado, $a_{ij} = \max_{a\leq k\leq m} a_{kj} = \overline{a_j}$ e como $v_c(A) = \min -1 \leq l \leq n\overline{a_l}$ segue que

$$
v_c(A) \leq \overline{a_j} \leq a_{ij}.
$$

Combinando, obtemos que $v_l(A) \geq v_c(A)$. Do teorema anterior, segue a igualdade.

Suponha que exista linha i tal que $v_l(A) = \underline{a_i}$. Mas como $\underline{a_i} = \min_{1\leq s\leq n} a_{is}$, existe coluna l tal que $\underline{a_i} = a_{il}$. Assim, $v_l(A) = \underline{a_i} = a_{il}$.

Do mesmo modo, $v_c(A) = a_{kj}$ para algum k e algum i.

Como $v_l(A) = v_c(A)$ temos que $a_{il} = a_{kj}$ donde segue que a_{ij} é ponto de sela. □

Assim, em um jogo de dois jogadores e com soma constante dado por uma matriz de payoffs A do jogador linha tem um equilíbrio de nash em estratégias puras se, e somente se, $v_l(A) = v_c(A)$.

6. Equilíbrio de Nash em estratégias mistas

Definimos as seguintes funções

$$v_l(A) = \max_{p \in \Delta_m} \min_{q \in \Delta_n} \mathbf{p}^T A \mathbf{q} \text{ e } v_c(A) = \min_{q \in \Delta_n} \max_{p \in \Delta_m} \mathbf{p}^T A \mathbf{q}.$$

Como no caso de estratégias puras, tem-se:

Teorema 6.1 *Vale sempre a desigualdade $v_c(A) \geq v_l(A)$.*

Demonstração: Temos que para todo $\mathbf{p} \in \Delta_m$,

$$\mathbf{p}^T A \mathbf{q} \geq \min_{\mathbf{y} \in \Delta_m} \mathbf{p}^T A \mathbf{y}.$$

Assim,

$$\max_{\mathbf{p} \in \Delta_m} \mathbf{p}^T A \mathbf{q} \geq \max_{\mathbf{p} \in \Delta_m} \min_{\mathbf{y} \in \Delta_m} \mathbf{p}^T A \mathbf{y} = v_l(A).$$

Consequentemente,

$$v_c(A) = \min_{\mathbf{q} \in \Delta_n} \max_{\mathbf{p} \in \Delta_m} \mathbf{p}^T A \mathbf{q} \geq \max_{\mathbf{p} \in \Delta_m} \min_{\mathbf{y} \in \Delta_m} \mathbf{p}^T A \mathbf{y} = v_l(A).$$

Isto completa a demonstração. $\square$

O resultado a seguir, é um teorema que caracteriza a existência de equilíbrios de Nash em estratégias mistas em termos de v_l e v_c.

Teorema 6.2 *Um perfil de estratégias mistas $(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*)$ é um equilíbrio de Nash de um jogo com dois jogadoes e com soma constante definido pela matriz de payoffs do jogador linha se, e somente se, tem-se $v_l(A) = v_c(A) = \mathbf{p}^{*T} A \mathbf{q}^*$.*

Demonstração: Se $(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*)$ é um equilíbrio de Nash, então

$$\mathbf{p}^{*T} A \mathbf{q}^* = u_l(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*) \geq u_l(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*) = \mathbf{p}^T A \mathbf{q}^*,$$

para todo $\mathbf{p} \in \Delta_m$. Em particular,

$$\mathbf{p}^{*T} A\mathbf{q} = \max_{\mathbf{p}\in\Delta_m} \mathbf{p}^T A\mathbf{q}^* \geq \min_{y\in\Delta_n} \max_{p\in\Delta_m} \mathbf{p}^T A\mathbf{y} = v_c(A).$$

Vale também que

$$\mathbf{p}^{*T} A\mathbf{q} = c - u_c(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*) \leq c - u_c(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}) = \mathbf{p}^{*T} A\mathbf{q}$$

para todo $\mathbf{q} \in \Delta_n$. Em particular,

$$\mathbf{p}^{*T} A\mathbf{q}^* = \min_{\mathbf{q}\in\Delta_n} \mathbf{p}^{*T} A\mathbf{q} = v_l(A).$$

Assim, obtemos que $v_l(A) \geq v_c(A)$. Agora a igualdade segue do teorema.

Agora suponha que $v_l(A) = \max_{\mathbf{p}\in\Delta_m} \min_{\mathbf{q}\in\Delta_m} \mathbf{p}^T A\mathbf{q}$, então existe $\mathbf{p}^* \in \Delta_m$ tal que $v_l(A) = \min_{\mathbf{q}\in\Delta_n} \mathbf{p}^{*T} A\mathbf{q}$.

Analogamente, como $v_c(A) = \min_{\mathbf{q}\in\Delta_n} \max_{\mathbf{p}\in\Delta_m} \mathbf{p}^T A\mathbf{q}$, então existe $\mathbf{q}^* \in \Delta_n$ tal que $v_c(A) = \max_{\mathbf{p}\in\Delta_m} \mathbf{p}^T A\mathbf{q}^*$.

Como por hipótese, $v_c(A) = v_l(A)$, temos que

$$\min_{\mathbf{q}\in\Delta_m} \mathbf{p}^{*T} A\mathbf{q} = v_l(A) = v_c(A) = \max_{\mathbf{p}\in\Delta_m} \mathbf{p}^T A\mathbf{q}^*.$$

Afirmamos que $(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*)$ é um equilíbrio de Nash do jogo. Com efeito,

$$u_l(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*) = \mathbf{p}^{*T} A\mathbf{q}^* \geq \min_{\mathbf{q}\in\Delta_n} \mathbf{p}^{*T} A\mathbf{q} = \max_{\mathbf{p}\in\Delta_m} \mathbf{p}^T A\mathbf{q}^* \geq \mathbf{x}^T A\mathbf{q}^* = u_l(\mathbf{x}^T, \mathbf{q}^*)$$

para todo $\mathbf{x} \in \Delta_m$. Por outro lado,

$$u_c(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*) = c - \mathbf{p}^{*T} A\mathbf{q}^* \geq c - \max_{\mathbf{p}\in\Delta_m} \mathbf{p}^T A\mathbf{q}^* = c - \min_{\mathbf{q}\in\Delta_n} \mathbf{p}^{*T} A\mathbf{q} \geq c - \mathbf{x}^{*T} A\mathbf{y} = u_c(\mathbf{p}^*, \mathbf{y})$$

para todo $\mathbf{y} \in \Delta_n$.

Deste modo,$(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*)$ é um equilíbrio de Nash do jogo. $\square$

7. O teorema minimax de von Neumann

O próximo teorema estabelece que, para jogos de dois jogadores e com soma zero, sempre $v_l(A) = v_c(A)$. Sendo assim, pelo teorema 6.2, para esta classe de jogos, existe sempre ao menos um equilíbrio de Nash em estratégias mistas. Além disso, o teorema a seguir dá um método para determinar o equilíbrio de Nash.

Teorema 7.1 (MiniMax de von Neumann) *Para todo jogo de soma zero com dois jogadores, representado pela matriz de payoffs de A do jogador linha, sempre existe um perfil de estratégia mista $(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*) \in \Delta_m \times \Delta_n$ satisfazendo*

$$v_l(A) = \max_{\mathbf{p}\in\Delta_m} \min_{\mathbf{q}\in\Delta_n} \mathbf{p}^T A\mathbf{q} = \mathbf{p}^{*T} A\mathbf{q}^* = \min_{\mathbf{q}\in\Delta_n} \max_{\mathbf{p}\in\Delta_m} \mathbf{p}^T A\mathbf{q} = v_c(A).$$

Em particular, $(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*)$ é um equilíbrio de Nash do jogo.

A demonstração deste resultado que apresentamos a seguir utiliza um importante resultado da programação linear, o teorema da dualidade.

Dado um problema de programação linear, chamado de primal,

$$\text{(primal)} \begin{cases} \text{Maximizar } b^T y \\ \text{sujeito a } Ay \leq c, \\ y \geq 0 \end{cases}$$

o seu dual é dado por

$$\text{(dual)} \begin{cases} \text{Minimizar } c^T x \\ \text{sujeito a } x^T A \geq b^T, . \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Teorema 7.2 (dualidade) *O problema primal possui solução se, e somente se, o problema dual possui solução. Além disso, se y^* é solução do problema primal e x^* é solução do problema dual, então ambos os problemas possuem o mesmo valor ótimo, isto é, $c^T x^* = b^T y^*$.*

Demonstração: (Teorema 7.1)A demonstração consiste em introduzir os seguintes problemas de programação linear, onde $c = (1, 1, \ldots, 1)^T$ e $b = (1, 1, \ldots, 1)^T$ e

$$\text{(primal)} \begin{cases} \text{Maximizar } b^T y \\ \text{sujeito a } Ay \leq c, \\ y \geq 0 \end{cases}$$

o seu dual é dado por

$$\text{(dual)} \begin{cases} \text{Minimizar } c^T x \\ \text{sujeito a } x^T A \geq b^T, . \\ x \geq 0 \end{cases}$$

O problema dual tem solução $x^* \neq 0$ e o primal tem solução $y^* \neq 0$. Como $c^T x^* = b^T y^*$, definimos

$$\Theta = c^T x^* = b^T y^* > 0.$$

Note que $\Theta > 0$, pois $(0, 0, \ldots, 0)$ não é admissível.

Tome

$$\mathbf{p}^* = \frac{x^*}{\Theta} \text{ e } \mathbf{q}^* = \frac{y^*}{\Theta}.$$

Afirmamos que $\mathbf{p}^{*T} A \mathbf{q}^* = \Theta^{-1}$.

De fato,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{*T} A &\geq b^T \Rightarrow \mathbf{x}^{*T} A y^* \geq b^T y^* = \Theta \\ A y^* &\leq c \Rightarrow \mathbf{x}^{*T} A y^* \leq c^T x^* = \Theta. \end{aligned}$$

Segue que $\mathbf{x}^{*T} A \mathbf{y}^* = \Theta$. Dividindo por Θ^2, obtemos

$$\left(\frac{\mathbf{x}^{*T}}{\Theta}\right) A \left(\frac{\mathbf{y}^*}{\Theta}\right) = \Theta^{-1}.$$

Isto é, $\mathbf{p}^{*T} A \mathbf{q}^* = \Theta^{-1}$.

Agora vamos provar que $(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*)$ é um equilíbrio de Nash.

Notemos que $\mathbf{p}^* \in \Delta_m$ e que $\mathbf{q}^* \in \Delta_n$, pois são não negativos e

$$\sum p_i = \sum \frac{x_i^*}{\Theta} = \frac{c^T x^*}{\Theta} = \frac{\Theta}{\Theta} = 1$$

$$\sum q_j = \sum \frac{y_j^*}{\Theta} = \frac{b^T y^*}{\Theta} = \frac{\Theta}{\Theta} = 1.$$

Como $\mathbf{x}^{*T} A \geq b^T$ (dual) obtemos $\mathbf{x}^{*T} A q \geq b^T q = 1$, para todo $q \in \Delta_n$. Logo,

$$\Theta \mathbf{p}^{*T} A q \geq 1 \Rightarrow \mathbf{p}^{*T} A q \geq \Theta^{-1} = \mathbf{p}^{*T} A \mathbf{q}^*.$$

Como $A\mathbf{y}^* \leq c$ (primal) obtemos $\mathbf{p}^T A \mathbf{q}^* \geq \mathbf{p}^T c = 1$, para todo $\mathbf{p} \in \Delta_m$. Logo,

$$\Theta \mathbf{p}^T A \left(\mathbf{q}^* \Theta\right) \leq 1 \Rightarrow \mathbf{p}^T A \mathbf{q}^* \leq \Theta^{-1}.$$

Donde obtemos que

$$u_l(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*) = \mathbf{p}^{*T} A \mathbf{q}^* \geq \mathbf{p}^T A \mathbf{q}^* = u_l(p, \mathbf{q}^*),$$

assim, o jogador linha não pode aumentar o seu payoff esperado trocando $\mathbf{p}^*$ por $\mathbf{p}$ se o jogador coluna não mudar a sua estratégia.

Por outro lado, como o jogo é de soma zero

$$u_c(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*) = -u_l(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*) \geq -u_l(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}) = u_c(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}),$$

assim o jogador coluna não aumenta o seu payoff quando troca $\mathbf{q}^*$ por $\mathbf{q}$ se o jogador linha mantiver $\mathbf{p}^*$.

Logo,$(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*)$ é um equilíbrio de Nash. □

• **Exemplo 7.3 (Vacinação)**

O governo deseja vacinar seus cidadãos contra um certo tipo de virus da gripe. Este virus possui dois sorotipos, sendo que é desconhecida a proporção na qual os dois sorotipos ocorrem na população di virus. Foram desenvolvidos duas vacinas em que a eficácia da vacina 1 é 85% contra o sorotipo I e de 70% contra o sorotipo II. A eficácia da vacina 2 é de 60% contra o sorotipo I ede 90% contra o sorotipo II. Que política de vacinação deveria ser tomada pelo governo?

A situação pode ser modelada como um jogo de soma zero com dois jogadores, o nde o jogador linha, que é o governo, deseja fazer a compensação (a fração dos cidadãos resistentes ao virus) o maior possível e o jogador coluna (o virus) deseja fazer a compensação a menor possível. A matriz dos payoffs é a seguinte:

Virus

Governo		Sorotipo I	Sorotipo II
	Vacina I	$(0.85, -0.85)$	$(0.70, -0.70)$
	Vacina II	$(0.60, -0.60)$	$(0.90, -0.90)$

Para encontrar um equilíbrio de Nash, devemos resolver os seguintes problemas de programação linear (primal)

$$\text{Maximizar } (y_1 + y_2)$$

$$\text{sujeito a } \begin{bmatrix} 0.85 & 0.70 \\ 0.60 & 0.90 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$y_1 \geq 0$$
$$y_2 \geq 0$$

e o seguintes problema de programação linear (dual)

$$\text{Minimizar } (x_1 + x_2)$$

$$\text{sujeito a } \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.85 & 0.70 \\ 0.60 & 0.90 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$

A solução do problema primal é dada por
$y^* = (\frac{40}{69}, \frac{50}{69})$
e a solução do problema dual é
$x^* = (\frac{20}{23}, \frac{10}{23})$.

Segue que $\theta = y_1^* + y_2^* = x_1^* + x_2^* = \frac{30}{23}$. Deste modo, o único equilíbrio de Nash para o problema é da pelo ponto (p^*, q^*), onde $p^* = \frac{x^*}{\theta} = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ e $q^* = \frac{y^*}{\theta} = (\frac{4}{9}, \frac{5}{9})$.

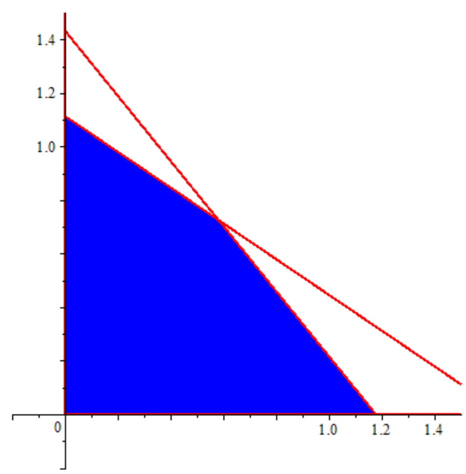

Figura 1: ppl- primal

8. O Teorema de Equilíbrio de Nash

Na seção anterior provamos o teorema minimax de von Neumann que dá a existência de um equilíbrio de Nash para jogos de soma zero com dois jogadores. Mas este resultado é geral: todo jogo definido por uma matriz de payoffs possui um equilíbrio de Nash em estratégias mistas.

A demonstração do Teorema de Equilíbrio de Nash utiliza o teorema do ponto fixo de Brouwer.

Teorema 8.1 (Brouwer) *Seja $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ um compacto convexo e $F : \Delta \to \Delta$ contínua. Então, F possui um ponto fixo $\mathbf{p}^* \in \Delta$, isto é, $F(\mathbf{p}^*) = \mathbf{p}^*$.*

Definimos para cada $i = 1, ..., n$ e $j = 1, ..., m_i$ a função

$$\begin{aligned} z_{ij} : \Delta &\rightarrow \mathbb{R} \\ p &\mapsto z_{ij}(p) = u_i(s_{ij}, p_{-i}) - u_i(p_i, p_{-i}), \end{aligned}$$

que mede o ganho ou perda do jogador g_i quando ele troca a distribuição de probabilidade p_i pela estratégia pura s_{ij}.

Teorema 8.2 *Seja $p^* \in \Delta$. Temos que p^* é um equilíbrio de Nash se, e somente se, $z_{ij}(p) \leq 0$, para cada $i = 1, ..., n$ e $j = 1, ..., m_i$.*

Demonstração: Seja $p^* = (p_i^*, p_{-i}^*)$ um equilíbrio de Nash, então $u_i(p_i^*, p_{-i}^*) \geq u_i(s_{ij}, p_{-i}^*)$, para cada $i = 1, ..., n$ e $j = 1, ..., m_i$. Consequentemente,

$$z_{ij}(p^*) = u_i(s_{ij}, p_{-i}^*) - u_i(p_i^*, p_{-i}^*) \leq 0,$$

para cada $i = 1, ..., n$ e $j = 1, ..., m_i$.

Reciprocamente, se $z_{ij}(p^*) \geq 0$ para cada $i = 1, ..., n$ e $j = 1, ..., m_i$, então

$$u_i(e_j, p_{-i}^*) = u_i(s_{ij}, p_{-i}^*) \leq u_i(p_i^*, p_{-i}^*),$$

para cada $i = 1, ..., n$ e $j = 1, ..., m_i$.

Devemos mostrar que para todo $p_i \in \Delta_{m_i}$, tem-se

$$u_i(p_i, p_{-i}^*) \leq u_i(p_i^*, p_{-i}^*).$$

Como $x \mapsto u_i(x, p_i^*)$ é um funcional linear, temos que

$$\begin{aligned} u_i(p_i, p^*_{-i}) &= u_i\left(\sum_{k=1}^{m_i} p_{ik} \cdot e_k, p^*_{-i}\right) = \sum_{k=1}^{m_i} p_{ik} \cdot u_i(e_k, p^*_{-i}) \\ &\leq \sum_{k=1}^{m_i} p_{ik} \cdot u_i(p^*_i, p^*_{-i}) = u_i(p^*_i, p^*_{-i}) \cdot \sum_{k=1}^{m_i} p_{ik}, \end{aligned}$$

onde, na última igualdade, usamos o fato de que $\sum_{k=1}^{m_i} p_{ik} = 1$, dado que $p_i \in \Delta_{m_i}$. □

Para cada $i = 1, ..., n$ e $j = 1, ..., m_i$, definimos a função

$$\begin{aligned} g_{ij} : \Delta &\to \mathbb{R} \\ p &\mapsto g_{ij}(p) = \max\{0, z_{ij}(p)\} \end{aligned}$$

Corolário 8.3 *Seja $p^* \in \Delta$. Temos que p^* é um equilíbrio de Nash se, e somente se, $g_{ij}(p*) = 0$, para cada $i = 1, ..., n$ e $j = 1, ..., m_i$.*

Definimos a aplicação

$$\begin{aligned} F : \Delta = \Delta_{m_1} \times ... \times \Delta_{m_n} &\to \Delta = \Delta_{m_1} \times ... \times \Delta_{m_n} \\ p = (p_1, ..., p_n) &\mapsto F(p) = (y_1(p), ..., y_n(p)), \end{aligned}$$

onde $p_i = (p_{i1}, ..., p_{im_i})$, $y_i(p) = (y_{i1}(p), ..., y_{im_i}(p))$ e

$$y_{ij}(p) = \frac{p_{ij} + g_{ij}(p)}{1 + \sum_{k=1}^{m_i} g_{ik}(p)}.$$

8.1. A demonstração.

Teorema 8.4 *Seja $p^* \in \Delta$. Temos que p^* é um equilíbrio de Nash se, e somente se, $F(p^*) = p^*$.*

Demonstração: Observemos que $y_i(p) \in \Delta_{m_i}$, para todo $i = 1, ..., n$. De fato, claramente $y_{ij} \geq 0$ para todo $i = 1, ..., n$ e $j = 1, ..., m_i$. Para todo $p \in \Delta$, tem-se

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m_i} y_{ik}(p) &= \sum_{k=1}^{m_i}\left(\frac{p_{ik}+g_{ik}(p)}{1+\sum_{k=1}^{m_i} g_{ik}(p)}\right) = \frac{\sum_{k=1}^{m_i} p_{ik}+\sum_{k=1}^{m_i} g_{ik}(p)}{1+\sum_{k=1}^{m_i} g_{ik}(p)}\\ &= \frac{1+\sum_{k=1}^{m_i} g_{ik}(p)}{1+\sum_{k=1}^{m_i} g_{ik}(p)} = 1,\end{aligned}$$

ou seja, mostramos que $F(\Delta) \subset \Delta$.

Seja p^* um equilíbrio de Nash, então $g_{ij}(p^*) = 0$ para cada $i = 1, ..., n$ e $j = 1, ..., m_i$. Deste modo, $y_{ij}(p^*) = p^*$ para cada $i = 1, ..., n$ e $j = 1, ..., m_i$, isto é, $y_i(p^*) = p_i^*$ para cada $i = 1, ..., n$, ou ainda, $F(p^*) = p^*$.

Reciprocamente, se $p^* \in \Delta$ é um ponto fixo do operador $F : \Delta \to \Delta$, isto é,

$$p_{ij}^* = \frac{p_{ij}^* + g_{ij}(p^*)}{1+\sum_{k=1}^{m_i} g_{ik}(p^*)},$$

para todo $i = 1, ..., n$ e $j = 1, ..., m_i$. Segue que

$$g_{ij}(p^*) = p_{ij}^* \sum_{k=1}^{m_i} g_{ik}(p^*). \tag{1}$$

Definimos $\alpha = \sum_{k=1}^{m_i} g_{ik}(p^*)$ para cada $i = 1, ..., n$ e $j = 1, ..., m_i$. Queremos mostrar que $\alpha = 0$, de modo que $g_{ik}(p^*) = 0$ para todo $i = 1, ..., n$ e $k = 1, ..., m_i$. Suponhamos, por absurdo, que $\alpha > 0$, vemos por (1) que

$$g_{ij}(p^*) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad p_{ij}^* > 0.$$

Sem perda de generalidade suponhamos que para algum $0 < l < m_i$, tem-se $p_{i1}^* > 0, ... p_{il}^* > 0$ e $p_{i(l+1)}^* = ... = p_{im_i}^* = 0$. Observemos que

$$p_i^* = \sum_{k=1}^{m_i} p_{ik}^* e_k,$$

onde e_i é o i-ésimo vetor da base canônica de $\mathbb{R}^{m_i}$. Como $g_{ik}(p^*) > 0$ para $k = 1, ..., l$, temos $0 < g_{ik}(p^*) = z_{ik}(p^*)$, ou seja

$$u_i(p_i^*, p_{-i}^*) < u_i(e_i, p_{-i}^*),$$

para todo $k = 1, ..., l$. Desta maneira, temos

$$\begin{aligned} u_i(p_i^*, p_{-i}^*) &= u_i\left(\sum_{k=1}^{m_i} p_{ik}^*, p_{-i}^*\right) = \sum_{k=1}^{m_i} p_{ik}^* \cdot u_i(e_i, p_{-i}^*) > \sum_{k=1}^{m_i} p_{ik}^* \cdot u_i(p_i^*, p_{-i}^*) \\ &= u_i(p_i^*, p_{-i}^*) \cdot \sum_{k=1}^{m_i} p_{ik}^* = u_i(p_i^*, p_{-i}^*), \end{aligned}$$

um absurdo. Isto demonstra que $g_{ij}(p^*) = 0$, para todo $i = 1, ..., n$ e $j = 1, ..., m_i$ e, assim pelo corolário 8.3, p^* é um equilíbrio de Nash em estratégias mistas. □

Teorema 8.5 (equilíbrio de Nash) *Todo jogo definido por matrizes de payoffs possui um equilíbrio de Nash.*

Demonstração: A aplicação $F : \Delta \to \Delta$ é contínua e Δ é um conjunto compacto e convexo. Pelo teorema do ponto fixo de Brouwer, F possui um ponto fixo p^*. Pelo Teorema 8.4, p^* é um equilíbrio de Nash. □

O corolário 8.3 acima apresenta também um método para calacular os equilíbrios de Nash de um jogo. Eles são as soluções do seguinte problema de otimização não-linear:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_i} \big(g_{ij}(p)\big)^2 \\ \text{sujeito a} & p \in \Delta. \end{array}$$

De fato, a soma dos quadrados é zero se, e somente se, cada parcela é nula.

No caso do dilema do prisioneiro $(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = (p, 1 - p; q, 1 - q) \in \Delta_2 \times \Delta_2$ é um equilíbrio de Nash se, e somente se, (p, q) é solução do seguinte problema

$$\text{Minimizar } G(p, q) = (\max\{0, -(-1 + p)(4q + 1)\})^2 + (\max\{0, -p(4q + 1)\})^2 +$$

$$+ (\max\{0, -(4p + 1)(-1 + q)\})^2 + (\max\{0, -q(4p + 1)\})^2$$

sujeito a $0 \leq p \leq 1$, $0 \leq q \leq 1$.

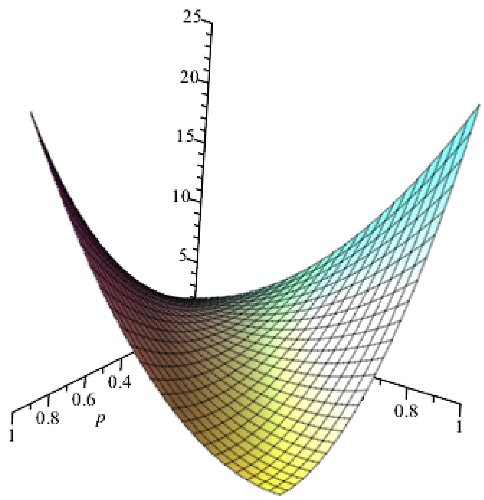

Figura 2: superfície para o dilema dos prisioneiros

Sabemos que $(\mathbf{p},\mathbf{q}) = (1,0;1,0)$ é o único equilíbrio de Nash para o dilema dos prisioneiros . A figura 2 mostra a superfície.

No caso do jogo a batalha dos sexos, devemos maximizar a função

$$(\max\{0, 5\ (-1+p)\,(3\,q-1)\})^2 + (\max\{0, -5\,p\,(3\,q-1)\})^2 + (\max\{0, -5\ (3\,p-2)\,(-1+q)\})^2 +$$

$$+\,(\max\{0, -5\,q\,(3\,p-2)\})^2$$

Sabemos que $(\mathbf{p},\mathbf{q}) = (1,0;1,0)$ ou $(0,1;0,1)$ ou $(\frac{2}{3},\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{2}{3})$ são os únicos equilíbrios de Nash para a batalha dos sexos. A figura 3 mostra a superfície.

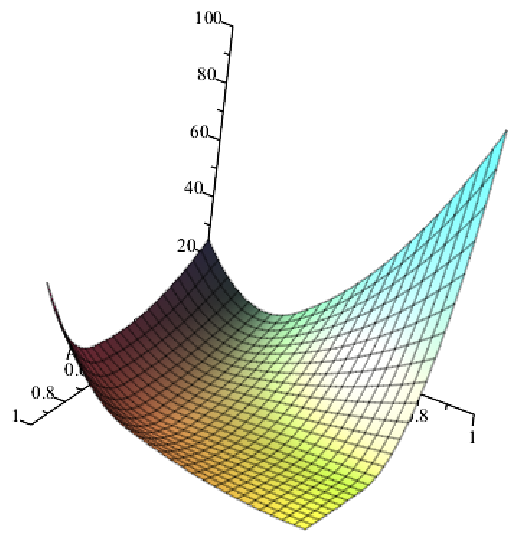

Figura 3: superfície para a batalha dos sexos

Referências

1. Max Oliveira de Souza e Jorge Zubelli .Modelagem matemática em finanças quantitativas em tempo discreto. Notas de Matemática aplicada, 2007.

2. D. Andrade et.al. Introdução à teoria dos Jogos. Notas de Minicurso na XXII semana de Matemática da UEM. 2011.

3. H. Bortolossi, G. Garbugio, Brigida Sartini. Uma introdução à teoria do jogos. 26^0 colóquio Brasileiro de Matemática, 2007.

4. Avner Friedman, Foundations of Modern Analysis. Holt, Reinehart and Winston, Inc., 1970.

5. S. Kesavan, Topics in Functional Analysis and Applications. Bangalores, John Wiley and Sons, 1988.