Jornal Eletrônico de Ensino e Pesquisa de Matemática
(1s.) v. 3 2 (2019): 27–41. ©Jeepema–ISSN-2594-6323.
www.dma.uem.br/kit/jeepema

Regra de três Simples e Composta

Prof. Doherty Andrade – doherty200@hotmail.com

Resumo: Nestas notas apresentamos um revisão sobre regra de três simples e composta e suas propriedade. Apresentamos também algumas aplicações elementares.

Sumário

1. Introdução

Os conceitos de razão, proporção e como consequência suas aplicações, nos ajudam a resolver problemas importantes. O método chamado *regra de três* é uma importante técnica que não pode ser desprezada. Embora importante, esse é um assunto elementar, em nível inicial de sexta série, e, portanto, ao alcance de de todo estudante.

Vamos então, conforme solicitado, vamos aos conceitos básicos necessários para o entendimento desse assunto.

Chamamos de **grandeza** a tudo o que pode ser medido. São exemplos de grandezas, tempo, massa, velocidade, distância, temperatura e etc.

Chamamos de **razão** entre dois números a e $b \neq 0$ ao quociente entre eles, isto é, $\frac{a}{b}$. Chamamos o número a de antecedente e o número b de consequente.

Por exemplo, a razão entre 8 e 2 é 4, pois $\frac{8}{2} = 4$.

No nosso vocabulário empregamos muitas vezes o conceito de razão. A palavra razão tem origem na palavra latina *ratio* e significa divisão.

Apenas 3, dentre 100 pessoas, lêem jornais regularmente. A razão entre a quantidade que lêem jornal e os que não lêem jornal é $\frac{3}{100}$. Isto é, 3%.

Outros exemplos em que aparece o conceito de razão:

i. **Escala**: é a razão entre o comprimento apresentado em um desenho ou maquete e o comprimento correspondente real, ambos expressos na mesma unidade de medida.

ii. **Velocidade**: é a razão entre a distância percorrida e o tempo gasto em percorrê-la.

iii. **Densidade demográfica**: é a razão entre o número total de habitantes e a área da região.

iv. **Consumo médio de combustível**: é a razão entre a distância percorrida e a quantidade de combustível gasto em percorrê-la.

v. **Gramatura de papel:** é a razão entre a massa do papel e a área do papel.

Diariamente, muitas vezes sem nos dar conta disso, estamos comparando grandezas. Vejamos alguns exemplos:

1. Se o litro da gasolina custa R$2,50, então dez litros custam R$25,00. Note, pela tabela, que aumentando a quantidade de gasolina a ser comprada, o preço também aumenta.

Qtdade de gasolina	**Preço a ser pago**
1	2,50
2	5,00
4	10,00
8	20,00
10	25,00

Vemos que dobrando a quantidade litros de gasolina, dobramos também o preço a ser pago. Aqui as grandezas comparadas foram o preço da gasolina e litros. Note que a razão entre os valores da primeira grandeza (Quantidade de gasolina) e os valores correspondentes da segunda grandeza (preço) são iguais. Vejamos, tomemos como exemplo as seguintes quantidades

Qtdade de gasolina	**Preço a ser pago**
4	10,00
8	20,00

Assim, temos

$$\frac{4}{10} = \frac{2}{5} \text{ e } \frac{8}{20} = \frac{2}{5}.$$

2. Se um operário em um dia de trabalho constrói um muro de 3 metros de comprimento, então (nas mesmas condições) para construir um muro de 24 metros ele precisará de 8 dias. Note, pela tabela, que ao aumentarmos o tempo de trabalho, aumentamos também o comprimento do muro.

Dias de trabalho	**Comprimento do muro**
1	3
2	6
4	12
8	24

Aqui as grandezas comparadas foram o tempo de trabalho e o comprimento do muro.

Note que a razão entre os valores da primeira grandeza (tempo de trabalho) e os valores correspondentes da segunda grandeza (comprimento do muro) são iguais. Tomemos como exemplo as seguintes quantidades:

Dias de trabalho	**comprimento do muro**
2	6
4	12

Assim, temos:

$$\frac{2}{6} = \frac{1}{3} \text{ e } \frac{4}{12} = \frac{1}{3}.$$

Vamos agora estabelecer o conceito básico no estudo das proporções. Dizemos que duas grandezas são **diretamente propocionais** quando a razão entre os valores da primeira grandeza e os valores correspondentes da segunda grandeza são iguais.

Mais precisamente, sejam G_1 e G_2 duas sequências de medidas dadas por

$$\begin{aligned} G_1 &: a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots \\ G_2 &: b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots. \end{aligned}$$

Se

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \cdots = \frac{a_n}{b_n} = k$$

dizemos que as duas grandezas G_1 e G_2 são diretamente proporcionais.

Assim, no exemplo 1), a grandeza quantidade de gasolina e preço são grandezas diretamente proporcionais, pois dois valores quaisquer correspondentes dessas grandezas possuem a mesma razão, igual (nesse caso) a $\frac{2}{5}$.

No exemplo 2), a grandeza dias de trabalho e o comprimento do muro são grandezas diretamente proporcionais, pois dois valores quaisquer correspondentes dessas grandezas possuem a mesma razão, igual (nesse caso) $\frac{1}{3}$.

Chamamos de **proporção** a igualdade entre duas razões.

Em uma proporção

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

a e d são denominamos extremos, b e c denominados meios.

Lemos a proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ da seguinte forma: a está para b, assim como c está para d.

A propriedade fundamental das proporções nos permite resolver muitos problemas. Ela afirma que se temos $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ então, necessariamente tem-se que $ad = bc$.

Em palavras temos o seguinte:

Propriedade 1.1 (Propriedade Fundamental) *Em uma proporção, o produto dos meios é igual ao produto dos extremos. Isto é,*

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc.$$

Para obter este resultado basta multiplicar ambos os lados da igualdade $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ pelo termo bd. O que resultada em

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{abd}{b} = \frac{cbd}{d} \Rightarrow ad = bc.$$

Segue dessa propriedade, que se conhecermos três números de uma proporção, então o quarto é facilmente calculado. Vem dessa propriedade o nome **Regra de Três**.

Tomemos o seguinte exemplo:

$$\frac{4}{3} = \frac{8}{x}.$$

Utilizando a Propriedade Fundamental, temos que

$$\frac{4}{3} = \frac{8}{x} \Leftrightarrow 4x = 8 \times 3 \Leftrightarrow x = \frac{24}{4} \Leftrightarrow x = 6.$$

2. Exemplos: grandezas diretamente proporcionais

Já temos todos os elementos necessários para resolver problemas simples envolvendo grandezas diretamente proporcionais.

Primeiro exemplo: Se o litro da gasolina custa R$2,50, então quanto custam doze litros?

Vamos denominar por x o preço de 12 litros de gasolina. Assim, temos os seguintes dados:

Qtdade de gasolina	Preço a ser pago
1	2,50
12	x

Primeiro note que as grandezas envolvidas são diretamente proporcionais. Como há igualdade entre a razão entre os preços de gasolina e a razão entre os valores correspondentes a serem pagos, temos a seguinte proporção

$$\frac{1}{2,5} = \frac{12}{x}.$$

Resolvendo essa proporção, obtemos a equação $x = 12 \times 2,5 = 30,0$. Assim, por 12 litros de gasolina deve ser pago R$30,00.

Segundo exemplo: Se um operário em um dia de trabalho constrói um muro de 3 metros de comprimento, então (nas mesmas condições) em quanto tempo ele construirá um muro de 24 metros?

Vamos denominar por x o tempo que o operário leva para construir um muro de 24 metros. Temos a seguinte tabela:

Dias de trabalho	**comprimento do muro**
1	3
x	24

Primeiro note que as grandezas envolvidas são diretamente proporcionais. Como há igualdade entre a razão entre os dias gastos na construção e os valores correspondentes aos comprimentos, temos a seguinte proporção

$$\frac{1}{3} = \frac{x}{24}.$$

Resolvendo essa proporção, obtemos a equação $3x = 24$ e portanto $x = 8$. Assim, em 8 dias de trabalho, o operário constrói um muro de 24 metros.

Terceiro exemplo: Três amigos, João, Pedro e Miguel montaram um oficina mecânica. João entrou com R$15.000,00, Pedro com R$ 30.000,00 e Miguel com R$ 45.000,00 na sociedade. Depois de seis meses obtiveram R$ 60.000,00 de lucro. O lucro deve ser dividido, entre eles, proporcionalmente ao valor investido. Quanto cada um deve receber?

Vamos denotar por x, a parte do lucro recebida por João; y a parte do lucro recebida por Pedro e por z a parte do lucro recebida por Miguel. Assim, tem-se $x + y + z = 60.000$. Como a divisão deve ser proporcional ao capital investido, temos

$$\frac{x}{15.000} = \frac{y}{30.000} = \frac{z}{45.000} = k,$$

onde k é o valor comum das razões. Segue que $x = 15.000k$, $y = 30.000k$ e $z = 45.000k$. Assim, como $x + y + z = 60.000$ podemos escrever

$$\begin{aligned} 15.000k + 30.000k + 45.000k &= 60.000 \\ 90.000k &= 60.000 \\ k &= \frac{60.000}{90.000} \\ k &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Logo, para João temos $\frac{x}{15.000} = \frac{2}{3}$ e portanto, pela regra de três, $x = R\$10.000,00$. Para Pedro, temos $\frac{y}{30.000} = \frac{2}{3}$ e assim, pela regra de três, temos $y = R\$20.000$. Para Miguel, temos $\frac{z}{45.000} = \frac{2}{3}$. Donde $z = R\$30.000,00$

3. Propriedades

Já vimos a propriedade fundamental das proporções e com ela fomos capazes de resolver alguns problemas. Vamos ver outras propriedades que se ajudarão e resolver problemas mais facilmente.

Propriedade 3.1 (Segunda Propriedade) *Em toda proporção* $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ *tem-se*

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Uma relação similar vale para o caso $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$.

De fato, tem-se:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} \Leftrightarrow \frac{a+c+e}{b+d+f} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}.$$

Primeiramente vamos provar que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b}$.

De $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ temos que $ad = bc$. Somando ab a ambos os lados, obtemos $ad + ab = bc + ab$. Reorganizando, tem-se $(a+c)b = (b+d)a$. O que resulta em

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b}.$$

Do mesmo modo, demonstra-se a segunda parte: $\frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d}$. De $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ temos que $ad = bc$. Somando dc a ambos os lados, obtemos $ad + dc = dc + bc$. Reorganizando, tem-se $(a+c)d = (b+d)c$. O que resulta em

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d}.$$

Note que a propriedade acima fornece no primeiro caso

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} \\ \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d} \end{aligned}$$

e no segundo caso

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{a+c+e}{b+d+f} = \frac{a}{b} \\ \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{a+c+e}{b+d+f} = \frac{c}{d} \\ \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{a+c+e}{b+d+f} = \frac{e}{f}. \end{aligned}$$

Exemplo 3.1

Podemos utilizar a segunda propriedade para resolver de modo mais simples o problema dos três amigos sócios na oficina mecânica.

Vimos que
$$\frac{x}{15.000} = \frac{y}{30.000} = \frac{z}{45.000} = k.$$
Utilizando a segunda propriedade temos que
$$\frac{x+y+z}{15.000+30.000+45.000} = \frac{x}{15.000} = \frac{y}{30.000} = \frac{z}{45.000}.$$
Como $x+y+z = 60.000$, segue que
$$\frac{60.000}{90.000} = \frac{x}{15.000} = \frac{y}{30.000} = \frac{z}{45.000}.$$
De onde segue, após simplificação e utilizando regra de três seguidamente, que:
$$\begin{aligned} \frac{2}{3} &= \frac{x}{15.000} \Rightarrow x = 10.000 \\ \frac{2}{3} &= \frac{y}{30.000} \Rightarrow y = 20.000 \\ \frac{2}{3} &= \frac{z}{45.000} \Rightarrow z = 30.000. \end{aligned}$$

Podemos resumir a técnica empregada no exemplo acima em um teorema que facilita muito a divisão em partes diretamente proporcionais.

Teorema 3.2 *Sejam dados $N > 0$ e números não nulos a, b e c. Os números x, y e z que dividem N em partes diretamente proporcionais a, respectivamente, a, b e c são dados por:*
$$\begin{aligned} x &= \frac{Na}{a+b+c} \\ y &= \frac{Nb}{a+b+c} \\ z &= \frac{Nc}{a+b+c}. \end{aligned}$$

A demonstração deste teorema segue diretamente da segunda propriedade.

4. Grandezas Inversamente Proporcionais

Assim como as grandezas diretamente proporcionais, as grandezas inversamente proporcionais também aparecem em nosso cotidiano. Vejamos alguns exemplos:

1. Com velocidade de 100 km/h um trem bala percorre uma determinada distância em 3 horas. Aumentando a velocidade para 150km/h ele percorrerá a mesma distância em 2 horas.

   Note, pela tabela, que aumentando a velocidade do trem, diminuímos o tempo de viagem.

Velocidade (km/h)	**Tempo (h)**
100	3
150	2
200	3/2
400	3/4

Vemos que dobrando a velocidade, percorremos o mesmo percurso na metade do tempo. Aqui as grandezas comparadas foram velocidade e tempo. Note que a razão entre dois valores de velocidade e a razão entre seus respectivos tempos **não** é a mesma. Vejamos, tomemos os seguintes valores,

Velocidade (km/h)	**Tempo (h)**
100	3
200	$\frac{3}{2}$

Mas observe que tomando a razão de uma grandeza com os inversos da outra grandeza,

$$\frac{100}{\frac{1}{3}} = 300 \text{ e } \frac{200}{\frac{2}{3}} = 300.$$

temos igualdade. Logo, temos a proporção

$$\frac{100}{\frac{1}{3}} = \frac{200}{\frac{2}{3}} = 300.$$

2. Dois operários realizam uma tarefa em 6 dias. Em quanto tempo 4 operários realizam juntos o mesmo serviço?

   Note, pela tabela, que ao aumentarmos o número de trabalhadores o tempo necessário para realizar a tarefa diminui.

Número de operários	**Tempo (h)**
2	6
4	3
8	1,5

Note que a razão entre duas quantidades de dias de trabalho e a razão entre os respectivos tempo de trabalho não é a mesma. Vejamos, tomemos as seguintes quantidades

Número de operários	**Tempo (h)**
2	6
4	3

Calculando as razões, temos que

$$\frac{2}{6} = \frac{1}{3} \text{ e } \frac{4}{3} = \frac{4}{3},$$

são diferentes.

Observe que tomando os inversos (de uma grandeza ou de outra), temos

$$\frac{2}{\frac{1}{6}} = 2 \times \frac{6}{1} = 12 \text{ e } \frac{4}{\frac{1}{3}} = 4 \times \frac{3}{1} = 12.$$

Logo, temos a proporção

$$\frac{2}{\frac{1}{6}} = \frac{4}{\frac{1}{3}}.$$

Estes dois exemplos ilustram grandezas inversamente proporcionais.

Dizemos que duas grandezas são **inversamente propocionais** quando a razão entre dois valores quaisquer da primeira grandeza e os inversos correspondentes da segunda grandeza são iguais.

Mais precisamente, sejam G_1 e G_2 duas sequências de medidas dadas por

$$\begin{aligned} G_1 &: a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots \\ G_2 &: b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots . \end{aligned}$$

Se

$$\frac{a_1}{\frac{1}{b_1}} = \frac{a_2}{\frac{1}{b_2}} = \frac{a_3}{\frac{1}{b_3}} = \cdots = \frac{a_n}{\frac{1}{b_n}} = k$$

dizemos que as duas grandezas G_1 e G_2 são **inversamente propocionais**

Nos dois exemplos apresentados acima, as grandezas são inversamente proporcionais.

Note que

$$\frac{a_1}{\frac{1}{b_1}} = \frac{a_2}{\frac{1}{b_2}} \Leftrightarrow a_1 b_1 = a_2 b_2,$$

que na prática agiliza os cálculos.

5. Exemplos: grandezas inversamente proporcionais

Já temos todos os elementos necessários para resolver problemas simples envolvendo grandezas inversamente proporcionais.

Primeiro exemplo: Com velocidade de 100 km/h um trem de alta velocidade percorre uma determinada distância em 3 horas. Aumentando a velocidade para 150km/h, em quanto tempo ele percorrerá a mesma distância?

Vamos denominar por x o tempo necessário para fazer o trajeto com velocidade de 150km/h.

Velocidade (km/h)	Tempo (h)
100	3
150	x

Como há igualdade entre o inverso da razão entre as velociades e os valores correspondentes ao tempo, temos a seguinte proporção

$$\frac{100}{\frac{1}{3}} = \frac{150}{\frac{1}{x}}.$$

Resolvendo essa proporção, obtemos a equação $150x = 300$. Assim, $x = 2$. Logo, aumentado a velocidade, o tempo gasto diminuirá para duas horas.

Na prática, escreve-se diretamente o produto $150x = 100 \times 3$, o que resulta $x = 2$.

Segundo exemplo: Dois operários realizam um tarefa em 6 dias. Em quanto tempo 4 operários juntos realizam o mesmo serviço?

Vamos denominar por x o tempo que 4 operários levam para realizar a obra.

Número de operários	Tempo
2	6
4	x

Como as grandezas são inversamente proporcionais, temos a seguinte proporção:

$$\frac{2}{\frac{1}{6}} = \frac{4}{\frac{1}{x}}.$$

Resolvendo essa equação, temos $4x = 12$ e, portanto, $x = 3$. Assim, em 3 dias de trabalho, 4 operários realizam o tabalho.

Na prática, escreve-se diretamente o produto $4x = 12$, o que resulta $x = 3$.

Terceiro exemplo: Um pai deixou 104 mil reais de herança para os seus três filhos. Esse total deve ser dividido em partes inversamente proporcionais às suas idades. André o mais novo tem 2 anos, César o do meio tem 3 anos e Rodrigo o mais velho tem 4 anos. Quanto cada um receberá?

Vamos denotar por x, a parte recebida por André; y a parte recebida por César e por z a parte recebida por Rodrigo. Assim, tem-se $x + y + z = 104.000,00$. Como a divisão deve ser inversamente proporcional às idades, temos

$$\frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{y}{\frac{1}{3}} = \frac{z}{\frac{1}{4}} = k,$$

onde k é o valor comum das razões. Segue de

$$\frac{x}{\frac{1}{2}} = k, \quad \frac{y}{\frac{1}{3}} = k, \quad \frac{z}{\frac{1}{4}} = k$$

que

$$x=\frac{k}{2},\ y=\frac{k}{3},\ \ z=\frac{k}{4}.$$

Assim, como $x+y+z=104.000$ podemos escrever

$$\begin{aligned}\frac{k}{2}+\frac{k}{3}+\frac{k}{4} &= 104.000\\ \frac{6k+4k+3k}{12} &= 104.000\\ \frac{13k}{12} &= 104.000\\ k &= \frac{104.000\times 12}{13}\\ k &= 96.000\end{aligned}$$

Logo, para João temos $x=\dfrac{96.000}{2}=48.000,00$. Para Pedro, temos $y=\dfrac{96.000}{3}=32.000,00$. Para Miguel, temos $z=\dfrac{96.000}{4}=24.000,00$.

Assim, temos que João receberá R$48.000,00, Pedro receberá R$32.000,00 e Miguel R$24.000,00

Apresentamos agora a segunda propriedade adaptada para o caso de grandezas inversamente proporcionais.

Propriedade 5.1 (Segunda Propriedade–grandezas inversamente proporcionais) *Em toda proporção* $\frac{a}{\frac{1}{b}}=\frac{c}{\frac{1}{d}}$ *tem-se*

$$\frac{a}{\frac{1}{b}}=\frac{c}{\frac{1}{d}}\Leftrightarrow\frac{a+c}{\frac{1}{b}+\frac{1}{d}}=\frac{a}{\frac{1}{b}}=\frac{c}{\frac{1}{d}}.$$

Uma relação similar vale para o caso $\frac{a}{\frac{1}{b}}=\frac{c}{\frac{1}{d}}=\frac{e}{\frac{1}{f}}$ *:*

$$\frac{a}{\frac{1}{b}}=\frac{c}{\frac{1}{d}}=\frac{e}{\frac{1}{f}}\Leftrightarrow\frac{a+c+e}{\frac{1}{b}+\frac{1}{d}+\frac{1}{f}}=\frac{a}{\frac{1}{b}}=\frac{c}{\frac{1}{d}}=\frac{e}{\frac{1}{f}}.$$

O exemplo acima pode ser facilmente resolvido utilizando esta propriedade. De fato, como a partilha deve ser inversamente proporcional às idades, temos

$$\frac{x}{\frac{1}{2}}=\frac{y}{\frac{1}{3}}=\frac{z}{\frac{1}{4}},$$

e usando a segunda propriedade podemos escrever:

$$\frac{x+y+z}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}=\frac{x}{\frac{1}{2}}=\frac{y}{\frac{1}{3}}=\frac{z}{\frac{1}{4}}.$$

De onde segue que:

$$\frac{x+y+z}{\frac{13}{12}}=2x=3y=4z.$$

Logo,

$$\frac{104.000}{\frac{13}{12}} = 2x = 3y = 4z.$$

Resolvendo cada uma das equações:

$$\begin{aligned}\frac{104.000}{\frac{13}{12}} = 2x \quad &\Rightarrow \quad x = 48.000\\ \frac{104.000}{\frac{13}{12}} = 3y \quad &\Rightarrow \quad y = 32.000\\ \frac{104.000}{\frac{13}{12}} = 4z \quad &\Rightarrow \quad z = 24.000.\end{aligned}$$

Podemos resumir a técnica empregada no exemplo acima em um teorema que facilita muito a divisão em partes inversamente proporcionais.

Teorema 5.1 *Sejam dados $N > 0$ e números não nulos a, b e c. Os números x, y e z que dividem N em partes inversamente proporcionais a, respectivamente, a, b e c são dados por:*

$$\begin{aligned} x &= \frac{Nbc}{ab + ac + bc}\\ y &= \frac{Nac}{ab + ac + bc}\\ z &= \frac{Nab}{ab + ac + bc}.\end{aligned}$$

A demonstração deste resultado segue diretamente da terceira propriedade.

6. Proporcionalidade composta

Já definimos quando duas grandezas são **diretamente propocionais**. Do mesmo modo, podemos definir grandezas diretamente proporcionais para três ou mais grandezas .

Mais precisamente, sejam G_1, G_2 e G_3 três sequências de medidas dadas por

$$\begin{aligned} G_1 &: a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\\ G_2 &: b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots\\ G_3 &: c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n, \ldots.\end{aligned}$$

Dizemos que G_1 é diretamente proporcional a G_2 e a G_3 de forma composta se

$$\frac{a_1}{b_1c_1} = \frac{a_2}{b_2c_2} = \frac{a_3}{b_3c_3} = \cdots = \frac{a_n}{b_nc_n} = k.$$

Dizemos que G_1 é inversamente proporcional a G_2 e a G_3 de forma composta se

$$\frac{a_1}{\frac{1}{b_1c_1}} = \frac{a_2}{\frac{1}{b_2c_2}} = \frac{a_3}{\frac{1}{b_3c_3}} = \cdots = \frac{a_n}{\frac{1}{b_nc_n}} = k.$$

Dizemos que G_1 é diretamente proporcional a G_2 e inversamente proporcional a G_3 de forma composta se

$$\frac{a_1}{b_1 \times \frac{1}{c_1}} = \frac{a_2}{b_2 \times \frac{1}{c_2}} = \frac{a_3}{b_2 \times \frac{1}{c_3}} = \cdots = \frac{a_n}{b_n \times \frac{1}{c_n}} = k.$$

Vejamos alguns exemplos aplicando esses conceitos.

7. Exemplos: Regra de três composta

1. Dois clubes e futebol decidem construir um estádio ao custo de R\$100.000.000,00 (cem milhões). O critério de investimento para cada clube foi que a divisão seria diretamente proporcional à quantidade de torcedores de cada clube e inversamente proporcional à distância de suas sedes até o estádio. Com os dados da tabela abaixo, determine o quanto cada clube de investir.

Clube	Torcedores	Distância
A	150.000	30 km
B	220.000	15 km

Vamos denotar por x a quantia a ser investida pelo clube A e por y a quantia investida pelo clube B. É claro que $x + y = 100$ milhões. Como as quantias x e y são diretamente proporcionais ao número de torcedores e inversamente proporcionais às distâncias, temos que

$$\frac{x}{150.000 \times \frac{1}{30}} = \frac{y}{220.000 \times \frac{1}{15}}.$$

Simplificando, temos a proporção

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{4}.$$

De onde segue, pela segunda propriedade, que

$$\frac{x+y}{1+4} = \frac{x}{1} = \frac{y}{4}.$$

Logo,

$$\frac{100}{5} = \frac{x}{1} = \frac{y}{4},$$

e, portanto, $x = 20$ milhões e $y = 80$ milhões.

2. Um trabalhador trabalha duas horas diárias para montar 18 componentes eletrônicos. Com o aumento da demanda, a fábrica contrata mais dois funcionários que trabalharão com o primeiro trabalhador por 8 horas diárias. Quantos componentes eles produzirão por dia?

Trabalhadores	Horas	Componentes
1	2	18
3	8	x

Como as grandezas número de trabalhadores e horas são diretamente proporcionais à quantidade de componentes, temos que:

$$\frac{18}{x} = \frac{1}{3} \times \frac{2}{8} \Rightarrow x = 216 \text{ componentes} .$$

3. Duas bombas escoam 2100 litros de água em três horas. Em quanto tempo 5 bombas do mesmo tipo escoariam 7000 litros?

Bombas	Volume (litros)	Tempo
2	2100	3
5	7000	x

A grandeza quantidade de bombas e o tempo são grandezas inversamente proporcionais. Já a grandeza volume e o tempo são grandezas diretamente proporcionais.

Logo, podemos escrever

$$\frac{3}{x} = \frac{5}{2} \times \frac{2100}{7000} \Rightarrow x = 4.$$

4. Com 10 funcionários uma indústria produz 2000 peças trabalhando 8 horas por dia durante 5 dias. O número de funcionários para que a empresa produza 6000 peças em 15 dias, trabalhando apenas 4 horas por dia, será de:

Note que:

A grandeza número de funcionários é diretamente proporcional à grandeza número de peças.

A grandeza número de funcionários é inversamente proporcional à grandeza horas trabalhadas.

A grandeza número de funcionários é inversamente proporcional à grandeza dias trabalhados.

Trabalhadores	Peças	horas/dia	dias
10	2000	8	5
x	6000	4	15

$$\frac{10}{x} = \frac{2000}{6000} \times \frac{4}{8} \times \frac{15}{5} \Rightarrow x = 20.$$

8. Usando Maple

Podemos utilizar um software de matemática simbolica para programar a divisão em partes diretamente e inversamente proporcionais apresentadas pelo teoremas.. Veja o exemplo em Maple.

```
Diretopro := (N, a, b, c) -> (N*a/(a+b+c), N*b/(a+b+c), N*c/(a+b+c));
Inverpro := (N, a, b, c) -> (N*b*c/(a*b+a*c+b*c), N*a*c/(a*b+a*c+b*c),
                            N*a*b/(a*b+a*c+b*c));
```

Referências

1. ANDRADE, D. *Geometria Analítica*. 2. ed. Florianópolis: UFSC, 2010.
2. GARCIA, N.M. *Matemática Comercial e Financeira*. 1a. ed. EDUEM: UEM, 2011.
3. www.dma.uem.br/kit/arquivos/arquivos_pdf/regradetres.pdf.