Jornal Eletrônico de Ensino e Pesquisa de Matemática
(1s.) **v. 1**, 2 (2017): 84–91. ©Jeepema – ISSN 2594-6323
www.dma.uem.br/kit/jeepema

O Modelo de crescimento de peixes de Von Bertalanffy

Ermerson Arnaut de Toledo - DMA-UEM

Resumo: Neste trabalho apresentamos a equação diferencial de Von Bertalanffy que modela o crescimento de peixes. Embora seja uma equação diferencial simples e com solução explícita, a dedução do modelo envolve algumas dificuldades.

Palavras-chave: Crescimento de Peixes. Von Bertalanffy. EDO's. *

Sumário

1. Introdução

No estudo do crescimento de animais existem dois aspectos a serem considerados: um deles se refere a mudanças no comprimento do corpo

* Publicado em 14-12-2017.

e o outro está relacionado a mudanças no peso. Assim, quando falamos de crescimento animal estamos falando do comprimento à medida que o tempo passa, ou ao crescimento no peso à medida que o tempo passa. Numa população, o crescimento de um individuo é geralmente caracterizado por uma expressão que representa o crescimento individual de algum animal "médio"na população. Os peixes exibem um tipo de crescimento conhecido como indeterminado, isto é, não existe um ponto de sua vida no qual o crescimento está completo. Durante um certo tempo de sua vida o crescimento do peixe é acompanhado de mudança na forma do corpo, este crescimento é conhecido como alométrico. Após atingir esse estágio o crescimento ocorre enquanto que a forma do corpo se mantém relativamente constante, neste caso dizemos que o crescimento é isométrico.

2. O Modelo de Von Bertalanffy

É um modelo bastante utilizado, pois ele se aplica a um grande número de espécies animais. É devido a Ludwig Von Bertalanffy (1938).

Antes de introduzir o modelo alguns comentários sobre a alimentação de peixes e sobre proteínas e aminoácidos são importantes. Proteínas são compostos orgânicos formados por diversos aminoácidos, existem diferentes tipos de proteínas caracterizadas pela proporção e posição dos aminoácidos que as compõem. Os peixes possuem proteínas dispostas em uma grande variedade de tecidos tais como: ossos, pele, órgãos, musculatura, etc. A proteína corporal está constantemente sendo reposta por dois processos: anabolismo (síntese de proteína no organismo) e catabolismo (quebra de proteínas no organismo). O peso de um organismo em qualquer instante depende da resultante de duas forças opostas: anabolismo (síntese da proteína) e catabolismo (quebra da proteína).

A taxa de anabolismo é considerada como sendo proporcional à magnitude da superfície fisiológica de reabsorção do animal, enquanto que a taxa de catabolismo é proporcional ao peso do corpo. O tamanho da superfície fisiológica de reabsorção não é diretamente mensurável mas supõe-se que seja proporcional ao quadrado de alguma dimensão linear. O peso também é tomado como sendo proporcional ao cubo de alguma dimensão linear.

Os processos de anabolismo e catabolismo ocorrem simultaneamente durante a vida de um animal, a diferença entre eles em um instante define a taxa na qual o peso do animal varia no instante t. Portanto, podemos obter uma equação diferencial que define a taxa de variação instantânea do peso.

$$\frac{dw}{dt} = pS - \beta w, \tag{1}$$

onde p é o coeficiente de anabolismo, β é o coeficiente de catabolismo, S é o tamanho da superfície fisiológica de reabsorção e w é o peso do corpo do peixe.

Como S e w são proporcionais ao quadrado e cubo, respectivamente, de alguma dimensão linear, então

$$S = al^2 \text{e } w = bl^3,$$

onde a e b são constantes apropriadas de proporcionalidade. Substituindo essas expressões para S e w na equação 1, obtemos:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{(bl^3)}{dt} = pal^2 - \beta bl^3. \tag{2}$$

Isto é,

$$3bl^2\frac{dl}{dt} = pal^2 - \beta bl^3. \tag{3}$$

Segue que,

$$\frac{dl}{dt} = \frac{pa}{3b} - \frac{\beta}{3}l. \tag{4}$$

Esta equação é uma equação diferencial ordinária, que vamos escrevê-la na seguinte forma:

$$\frac{dl}{dt} + kl = \lambda, \tag{5}$$

onde $k = \frac{\beta}{3}$ e $\lambda = \frac{pa}{3b}$.

É uma equação diferencial simples, em que utilizamos a técnica do fator integrante para obter a solução, explícita:

$$l(t) = \frac{\lambda}{l} + C\mathrm{e}^{-kt}. \tag{6}$$

Supondo que o comprimento do peixe no instante t_0 é $l = l_0$, obtemos que $C = l_0 - \frac{\lambda}{k}$. Substituindo esse valor na equação na equação 6, obtemos que

$$l(t) = \frac{\lambda}{k} + \left(l_0 - \frac{\lambda}{k}\right)\mathrm{e}^{-kt}. \tag{7}$$

Quando $t \to \infty$ observamos que $l(t) \to \frac{\lambda}{k} = l_\infty$. Ou seja, o comprimento do peixe tende a um valor assintótico.

Portanto, podemos reescrever a equação 5 em termos l_∞ e obter:

$$l(t) = l_\infty + (l_0 - l_\infty)\,\mathrm{e}^{-kt}. \tag{8}$$

que é conhecida como a equação de Von Bertalanffy para o crescimento, em comprimento, do peixe.

Uma maneira de se estimar os valores de l_∞ e k quando se tem uma tabela de valores experimentais, consiste em tomar a reta $y = mx + n$ pela regressão linear dos valores $l(t)$ e $l(t+1)$, isto é,

$$l(t+1) = ml(t) + n, \text{ onde } m = \mathrm{e}^{-kt} \text{ e } n = l_\infty(1 - \mathrm{e}^{-kt}). \tag{9}$$

Considerando que quando $t \to \infty$, $l(t+1) \approx l(t) = l_\infty$, obtemos

$$l_\infty = ml_\infty + n,$$

isto é,

$$l_\infty = \frac{n}{1-m}.$$

Como $m = \mathrm{e}^{-k}$, temos que $k = -\ln(m)$. Esse processo para o cálculo de k e de l_∞ é atribuído a Ford-Waldorf.

3. O Modelo de Von Bertalanffy para o Peso

Como $S = al^2$ e $w = bl^3$, para constantes apropriadas, podemos obter que $w^{2\beta} = b^{2\beta} l^2$ e daí temos que

$$l^2 = \frac{w^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{2}{3}}}.$$

Logo,

$$S = \frac{aw^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{2}{3}}}$$

e assim, a equação 1 pode ser escrita na forma

$$\frac{dw}{dt} = \frac{pa}{b^{\frac{2}{3}}} w^{\frac{2}{3}} - \beta w, \tag{10}$$

ou seja,

$$\frac{dw}{dt} + \beta w = \alpha w^{\frac{2}{3}}, \tag{11}$$

onde $\alpha = \dfrac{pa}{b^{\frac{2}{3}}}$.

Esta equação diferencial é de Bernoulli $(y'(x) + P(x)y = Q(x)y^n)$.

Dividindo 11 por $w^{\frac{2}{3}}$, obtemos

$$w^{-\frac{2}{3}} \frac{dw}{dt} + \beta w^{\frac{1}{3}} = \alpha. \tag{12}$$

Fazendo a substituição $v = w^{\frac{1}{3}}$, temos

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{3} w^{-\frac{2}{3}} \frac{dw}{dt}. \tag{13}$$

Substituindo na equação 13, obtemos

$$3\frac{dv}{dt} + \beta v = \alpha.$$

Ou seja,

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{3}\beta v = \frac{\alpha}{3}, \tag{14}$$

que é uma equação linear de primeira ordem em v. Novamente, utilizando a técnica do fator integrante, temos

$$v(t) = \frac{\alpha}{\beta} + C\mathrm{e}^{-\frac{\beta t}{3}}. \tag{15}$$

Como $v = w^{\frac{1}{3}}$, obtemos

$$w(t) = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3 \left(1 + \frac{C\beta}{\alpha}\mathrm{e}^{-\frac{\beta t}{3}}\right)^3. \tag{16}$$

Quanto $t = 0$, o valor de w é insignificante, assim podemos tomar $w(0) = 0$ para obter

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3 \left(1 + \frac{C\beta}{\alpha}\right)^3 = 0$$

e então $(1 + \frac{C\beta}{\alpha}) = 0$, o que nos dá $C = -\frac{\alpha}{\beta}$. Logo,

$$w(t) = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3 \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{\beta t}{3}}\right)^3. \tag{17}$$

Quando t cresce, isto é, $t \to \infty$ obtemos que $w(t) \to \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3$. Para simplificar e chamando este valor de w_∞ e $k = \frac{\beta}{3}$, obtemos

$$w(t) = w_\infty \left(1 - \mathrm{e}^{-kt}\right)^3 \tag{18}$$

que nos dá o peso do peixe em cada instante t.

4. Analisando a solução

Vamos agora fazer uma análise dessa equação. Derivando 18 em relação a t, temos

$$\frac{dw}{dt} = 3kw_\infty \left(1 - \mathrm{e}^{-kt}\right)^2 \mathrm{e}^{-kt}.$$

Derivando novamente, obtemos

$$\frac{d^2w}{dt^2} = 3k^2 w_\infty \mathrm{e}^{-kt} \left(1 - \mathrm{e}^{-kt}\right) \left(3\mathrm{e}^{-kt} - 1\right).$$

Observe que $\frac{dw}{dt} = 0$ quando $t = 0$ ou quando $t \to \infty$. Por outro lado, $\frac{d^2w}{dt^2} = 0$ se $t = 0$, quando $t \to \infty$ ou quando $t = \frac{\ln(3)}{k}$.

Além disso, se $w \neq 0$ então $\frac{dw}{dt} > 0$, ou seja, o o peso é sempre crescente, tendo um valor limite w_∞.

Matematicamente w_∞ é "atingido"quando $t \to \infty$, mas na realidade este "tempo infinito"é de aproximadamente 10 anos. Esta contradição pode ser minorada se, por exemplo, estabelecermos que 99 por cento do peso limite é atingido aos 10 anos.

Por outro lado, $t^* = \frac{\ln(3)}{k}$ é um ponto de inflexão da curva obtida de 18 e

$$w(t^*) = w_0 \left(1 - \mathrm{e}^{\ln 3}\right)^3 \approx 0,296 w_\infty.$$

O valor $t^* = \frac{\ln(3)}{k}$ é o instante de maior variação de peso do peixe, pois $\frac{dw}{dt}$ atinge o seu valor máximo em $t = t^*$.

Em [3] foi obtido para o peixe Tilápia os seguintes dados:

$$\begin{array}{ll} w(0) = 26g & l_0 = 11 \\ w_\infty = 935g & \alpha = 4,723 \\ \beta = 0,483 & \end{array}$$

Assim,

$$w(t) = 0.0194 \left(36.36 - 25.36 exp(-0.161t)\right)^3.$$

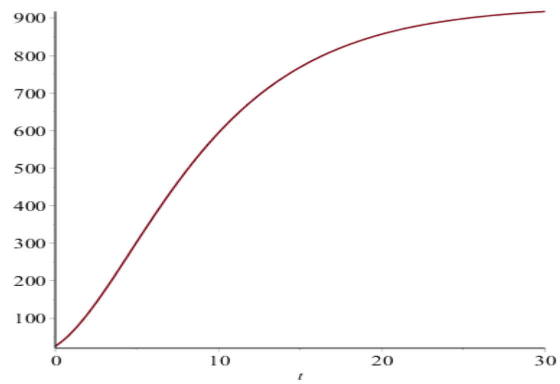

Figura 1: Curva de crescimento da Tilápia.

A figura ilustra o pouco ganho de peso do peixe a partir de um determinado instante.

Referências

1. Juliana Scapim e Rodney C. Bassanezi. Modelo de von Bertalanffy generalizado aplicado às curvas de crescimento animal. Revista Biomatemática, 18 (2008), páginas 114, ISSN 1679-365X.

2. Bassanezi, R. C. e Ferreira Jr, W. C. (1978). Equações diferenciais com aplicações. Ed. Harbra, S. Paulo.

3. J. C. de Araújo e R. Garcia, Marquez. Modelos Matemáticos apra o peso médio de Tilápias. Cadernos do IME- Série Matemática. Vol. 20 (2–8).