Jornal Eletrônico de Ensino e Pesquisa de Matemática
(1s.) **v. 1**, 1 (2017): 36–43. ©Jeepema – ISSN 2594-6323
www.dma.uem.br/kit/jeepema

Aproximação de funções: polinômios de Bernstein

Medeiros, Heloisa B. (medeiros@mat.uff.br) & Menezes, M. Lucia (menezes@mat.uff.br)

Resumo: Esse artigo foi originalmente publicado como um artigo do Projeto Klein. Dentro desse contexto, se propõe a apresentar de forma leve e resumida os famosos Polinômios de Bernstein, muito usados para aproximar funções. O texto se insere no panorama da análise numérica fazendo algumas considerações sobre os aspectos positivos e negativos dessa aproximação. Também apresenta um esboço da demonstração de convergência desses polinômios, apresentada pelo próprio Bernstein, comentando sobre a possibilidade de sua utilização em uma demonstração construtiva do Teorema de Weirstrass.

Palavras-chave: Polinômios de Bersntein. Aproximação de funções. Convergência uniforme. *

Sumário

1. Introdução

Quando usamos alguma máquina para esboçar um gráfico ou determinar um valor como $e^{\sqrt{2}}$, não nos ocorre perguntar como são feitos os cálculos ou quão exatos são. Todavia, um sem número de pesquisas vem sendo desenvolvido para que estas informações sejam mais precisas e obtidas com maior rapidez.

* Publicado em 14-08-2017.

O surgimento dos processadores (em meados do século XX) colocou para a Matemática uma série de questões sobre como representar e calcular valores e funções. Em linhas gerais, sabemos que um processador só é capaz de fazer somas algébricas de modo que todos os cálculos, em última análise, devem se remeter a este tipo de operação. Produtos podem ser efetuados utilizando somas e, consequentemente, operações como elevar um valor a um número inteiro podem ser executadas. A possibilidade de calcular x^n torna o uso de polinômios uma ferramenta importantíssima em cálculos realizados por máquinas. Por exemplo, para calcular $\sqrt{3}$ pode ser conveniente usar um procedimento padrão (como método de Newton ou bisseção) para resolver $x^2 - 3 = 0$. Nem sempre se pode reduzir o problema ao cálculo da raiz de um polinômio, mas são muitos os usos dos polinômios nos compiladores, máquinas de calcular e softwares em geral. Um recurso utilizado em ampla escala é a aproximação de funções por polinômios. Eleger o método específico a ser usado depende muito das circunstâncias. A aproximação deve ser feita em um único ponto, ou em um intervalo? Qual o erro máximo que queremos? Qual o processador disponível? Que valor ou função deve ser aproximado ? A aproximação deve ter sensibilidade suficiente para captar singularidades isoladas?

Dentre os métodos possíveis, para funções contínuas, os polinômios de Bernstein se destacam por oferecerem uma aproximação uniforme. Como sempre, existe um preço a ser pago: a convergência não é muito rápida, quando comparada a outros métodos de aproximação polinomial. Mesmo assim, são de grande utilidade nos casos em que se necessita aproximar uma função em todo um intervalo como, por exemplo, no esboço de um gráfico. Vale, ainda, notar que os polinômios de Bernstein fornecem uma belíssima demonstração construtiva do Teorema de aproximação de Weierstrass.

Em todo este texto, $f(x)$ será uma função contínua no intervalo $[0,1]$.

2. Os Polinômios de Bernstein

Para definir os polinômios de Bernstein, lembramos da fórmula binomial:

$$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j b^{n-j} \tag{1}$$

Escolhemos agora $a = x$, $b = 1 - x$ e definimos $\beta_{nj}(x) := \binom{n}{j} x^j (1-x)^{n-j}$, $j = 0, 1, \cdots, n$. Dividimos o intervalo $[0,1]$ em n subintervalos, de igual tamanho, $[x_j, x_{j+1}]$, $j = 0, \cdots, n-1$, de modo que $x_j = \frac{j}{n}$. Avaliamos $f(x_j)$ em cada ponto e, com estas constantes, definimos o polinômio de Bernstein de grau n da função $f(x)$ como:

$$B_n(f;x) := \sum_{j=0}^{n} f(x_j)\beta_{nj}(x) \tag{2}$$

Observamos que o conjunto $\{B_{nj}(x)\}$, $j = 0, \cdots, n$, forma uma base para o espaço vetorial de polinômios de grau menor ou igual à n, e o polinômio de Bernstein é uma combinação linear dos elementos desta base. Para verificar isso, não é difícil ver que cada um dos elementos da base canônica $\{1, x, x^2, \cdots, x^n\}$ pode ser escrito como combinação linear dos $B_{nj}(x)$.

As *curvas de Bézier*, bem familiares aos que usam softwares gráficos, também são formadas como combinação linear de elementos desta base, embora Bézier e Bernstein tenham chegado aos seus resultados de forma independente.

A figura 1 ilustra algumas características da aproximação obtida pelos polinômios de Bernstein. Nos dois casos, o desenho apresenta o gráfico da função e os gráficos dos polinômios de Bernstein de graus 4, 8, 12 e 16. Primeiro, observamos que, diferentemente de outras aproximações polinomiais, o polinômio de Bernstein de grau n, em geral, não coincide com a função em um número n de pontos; ademais, mesmo quando a função é um polinômio de grau n, o n -ésimo polinômio de Bernstein não é a própria função (como seria, por exemplo, no caso do polinômio de Taylor). Não é difícil verificar que $f(1) = B_n(f;1)$ e $f(0) = B_n(f;0)$, o que está ilustrado nos gráficos. Todavia, a propriedade que queremos ressaltar aqui é que a velocidade de convergência será maior, se a variação da função for mais suave. Em ambos os casos, a imagem da função, como conjunto, é essencialmente a mesma e as propriedades gerais da curva também (isto é: é contínua, assume um único ponto de máximo, possui um ponto de inflexão, etc). Mas, no gráfico da esquerda, a variação na vizinhança do ponto de máximo é bem mais brusca. Não é difícil ver que o erro obtido nas aproximações (de mesmo grau) pelos polinômios, na vizinhança do ponto de máximo, é maior no primeiro caso. Este comportamento pode ser entendido observando propriedades das duas funções. Como a teoria está sendo desenvolvida para funções contínuas (classe C^0), grau de diferenciabilidade não é uma hipótese que se queira utilizar, a princípio, para medir "suavidade"de variação.

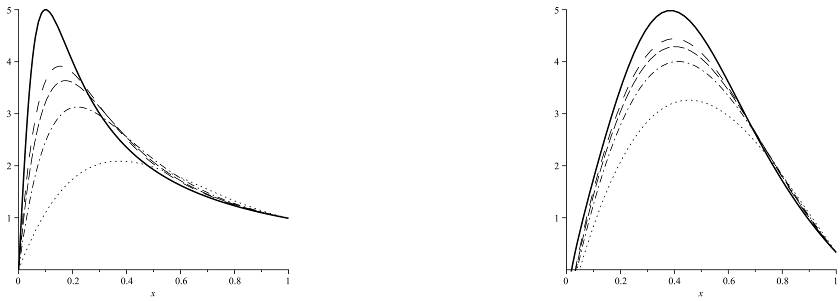

Figura 1: O gráfico da função é a curva sólida e as outras curvas são os polinômios de Bernstein de grau 4, 8, 12 e 16.

O conceito mais importante, por ora, é o de *módulo de continuidade* de uma função. Trata-se, grosso modo, de uma medida do "quão contínua"uma função é. Para fazer esta medida, subdividimos o intervalo [0, 1] em subintervalos de tamanho δ. Em cada um deles, medimos o maior salto de f e escolhemos o maior destes valores. Formalmente: O módulo de continuidade, em relação à δ, de uma função $f(x)$ no intervalo $[0,1]$, aqui denotado por $w(f;\delta)$ é definido como sendo:

$$w(f;\delta) = \sup_{|x-x'|\leq\delta} |f(x) - f(x')| \quad x, x' \in [0,1]$$

O Teorema 2.1 a seguir fornece uma estimativa da velocidade de convergência da aproximação obtida pelos polinômios de Bernstein, quando n aumenta. A demonstração do Teorema é bastante técnica e pode ser vista em [5].

Teorema 2.1. *Se $f(x)$ é uma função contínua em $[0,1]$, para todo $x \in [0,1]$, tem -se*

$$|f(x) - B_n(f;x)| \leq \frac{9}{4} w(f; \frac{1}{\sqrt{n}}).$$

Pelo gráfico, não é difícil ver que, para um mesmo δ, o módulo de continuidade da função é maior no gráfico da esquerda. A estimativa dada no teorema 2.1 pode ser melhorada, dependendo das propriedades da função, especialmente se houver algum grau de diferenciabilidade, em que pese não se conseguir estimativas excelentes.

A partir do Teorema 2.1 podemos construir polinômios que aproximam qualquer função contínua uniformemente. A existência de tais polinômios foi mostrada por Weierstrass no final do século XIX, que não os construiu, todavia. Usando o teorema anterior e tomando n suficientemente grande para termos $\frac{9}{4}w(f;\frac{1}{\sqrt{n}}) < \frac{4\epsilon}{\delta}$, obtém-se uma demonstração construtiva dos resultados de Weierstrass.

Como estamos falando de aproximações polinomiais que não envolvem interpolações, julgamos conveniente uma rápida comparação com a mais famosa delas (para funções de classe C^k): os polinômios de Taylor. Nas figuras 2, está o gráfico da função $f(x) = \text{sen}^2(2\pi(x-1/2))$, de seu polinômio de Taylor de grau 4 em torno de $0,5$ e de seu polinômio de Bernstein de grau 4. Do lado esquerdo colocamos o detalhe da figura, restringindo os valores de x; do lado direito, aparecem os gráficos em todo o intervalo $[0,1]$. Chama atenção o fato de que a aproximação do polinômio de Taylor, muito boa na vizinhança em torno do qual é calculado $(0,5)$, tem um erro muito maior, quando nos afastamos deste ponto. Em geral, pode-se esperar este comportamento, embora existam exceções.

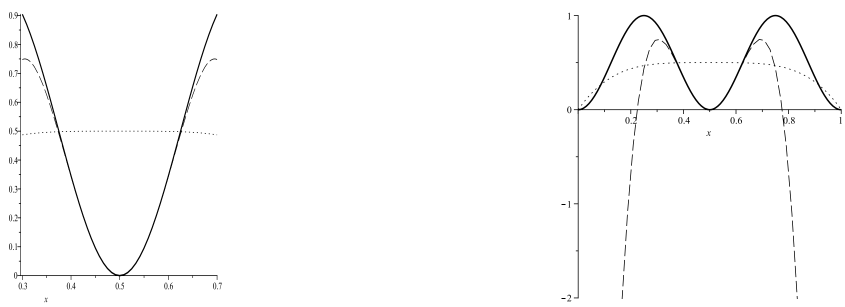

Figura 2: Polinômio de Bernstein (pontilhado) $\times$ polinômio de Taylor (tracejado).

A construção dos polinômios de Bernstein pode se tornar mais natural quando pensamos em teoria das probabilidades, como em [7]. Vamos imaginar que existe um experimento cujo resultado pode ter apenas as possibilidades A ou B e que A ocorre com probabilidade x, de modo que a probabilidade da ocorrência de B será $(1-x)$. Em n experimentos, a probabilidade do resultado ser A, j vezes (e B, $(n-j)$ vezes), será $x^j(1-x)^{(n-j)}$. j ocorrências de A podem vir em $\binom{n}{j}$ ordens diferentes e, assim, a probabilidade de termos j A's e $(n-j)$ B's, em qualquer ordem, será: $\binom{n}{j}x^j(1-x)^{(n-j)}$. Uma conta permite verificar que :

$$\beta_{nj}(x) = \left(\frac{n-j+1}{j}\right)\frac{x}{1-x}\beta_{n,j-1}(x) \tag{3}$$

Para cada x, olhamos $\beta_{nj}(x)$ como função de j e, da equação 3, verificamos que : $\beta_{nj}(x) > \beta_{n.j-1}(x)$ sse $j < (n+1)x$. Refraseando, Para x e n fixos, $\beta nj(x)$ terá um máximo quando $j = j_x = [(n+1)x]$, onde $[(n+1)x]$ é o maior inteiro menor ou igual a $(n+1)x$, e estimamos $j_x \approx nx$. Assim, $\beta_{nj}(x)$ cresce se $j < j_x$ e decresce se $j > j_x$. Logo, no somatório da definição de $B_n(f;x)$, os termos referentes aos valores de j longe de j_x são muito pequenos enquanto a contribuição dos outros termos é relevante. Vamos definir $J := \{j$ tais que j está próximo de $j_x\}$. Dividimos o somatório em duas partes:

$$B_n(f;x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j)\beta_{nj}(x) = \mathcal{S}_1(x) + \mathcal{S}_2(x)$$

onde

$$\mathcal{S}_1(x) = \sum_{j\in J} \cdots \quad \mathcal{S}_2(x) = \sum_{j\notin J} \cdots$$

Desprezamos o segundo somatório porque seus termos são pequenos. Quanto ao primeiro, observamos que $x_j = \frac{j}{n}$ e que, em $\mathcal{S}_1$, j está próximo de $j_x \approx nx$. Se n for suficientemente grande, j próximo de j_x implicará $x_j = \dfrac{j}{n}$ próximo de $\dfrac{j_x}{n} = x_{j_x}$. Como f é contínua, x_j perto de x_{j_x} implicará $f(x_j)$ próximo de $f(x_{j_x})$. Mas, $f(x_{j_x}) = f(\frac{j_x}{n}) \approx f(\frac{nx}{n}) \approx f(x)$. Assim, escrevemos $\mathcal{S}_1 \approx \sum_{j\in J} f(x)\beta_{nj}(x)$. Mas $((x + (1-x))^n = \sum_{j=0}^{n} \beta_{nj}(x) = 1$ e, como estamos desprezando os termos β_{nj} em S_2, somos tentados a considerar $\mathcal{S}_1 \approx \sum_{j\in J} f(x)\beta_{nj}(x) = f(x)\sum_{j\in J}\beta_{nj}(x) \approx f(x)$ e teremos, então, $\lim_{n\mapsto\infty} B_n(f;x) = f(x)$. Tornar este argumento preciso (isto é,formalizar o argumento para demonstrar a convergência) exige um pouco mais de suor e contas e pode ser visto em [7].

3. Conclusão

Aproximações numéricas de funções são um tópico fascinante e são muitos os estudos em desenvolvimento sobre o tema. Os polinômios de Bernstein, tratados aqui, são mais usados no esboço de gráficos. Foram propostos por um matemático ucraniano, Sergei Natanovich Bernstein (falecido em 1968), que contribuiu com diversos resultados importantes para o desenvolvimento da matemática. Intimamente relacionadas aos polinômios de Bernstein são as curvas de Bézier, definidas por um grau n

e $(n+1)$ "pontos de controle "$P_0, P_1, \ldots, P_n$, dada por $B_n(t) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} t^j (1-t)^{n-j} P_j$. Essas curvas foram estudadas por Paul de Casteljau (físico e matemático da Citroen) que desenvolveu um algoritmo para obtê-las e por Pierre Bézier (um engenheiro e matemático da Renault) que as patenteou e as utilizou para desenhar automóveis, veja [3].

Os gráficos esboçados aqui foram feitos com o software Maple. São inúmeros os trabalhos sobre polinômios de Bernstein e aqui selecionamos alguns dando preferência à facilidade de acesso. Um resumo, em português, pode ser visto em [8]. No sítio de buscas virtuais de e-books [1] é possível encontrar diversos textos em formato pdf sobre os polinômios de Berstein. Citamos em particular [6] e [7], onde definições e propriedades dos polinômios são bastante explorados. A demonstração do Teorema 2.1 pode ser vista em [5] onde também se encontra um tratamento clássico e muito bem feito sobre aproximação numérica de funções. A demonstração do Teorema de Weierstrass, usando os polinômios de Bernstein pode ser encontrada em [4] ou em [2].

Referências

1. http://khup.com. 42

2. Sergei Bernstein. *Démonstration du théorème du Weierstrass fondé sur le calcul des probabilités* . Reprodução da demonstração original de Bernstein (em francês). Disponível em http://www.math.technion.ac.il/hat/fpapers/P03.PDF. 42

3. Bill Casseman. *From Bézier to Bernstein*. Web em 11/2008. Disponível em http://www.ams.org/samplings/feature-column/fcarc-bezier. 42

4. Alex Alves Dentamaro e Daniela Mariz Silva Vieira. *Teorema de Aproximação de Weierstrass*. Web em 15/11/2010. Disponível em http://www.prp.unicamp.br/pibic/congressos/xvicongresso/paineis/041705.pdf. 42

5. Eugene Isaacson and Herbert B. Keller. *Analysis Of Numerical Methods*. John Wiley & Sons, 1994. 39, 42

6. Kenneth I. Joy. *Bernstein Polynomials*. Web em 10/12/2010. Disponível em http://khup.com/view/1_keyword-bernstein-polynomial/bernstein-polynomials.html. On-Line Geometric Modeling Notes. Visualization and Graphics Research Group, Department of Computer Science. University of California, Davis. 42

7. George M. Phillips. *Interpolation and Approximation by Polynomials*. Springer, 1st edition, 2003. Capítulo sobre polinômios de Bernstein. Disponível em

http://khup.com/view/4_keyword-bernstein-polynomial/bernstein-polynomials.html em dez 2010. 40, 41, 42

8. Wikipedia. Polinômios de bernstein. Web em 15/11/2010. Disponível em http://pt.wikipedia.org/wiki/Polinômios_de_Bernstein,. 42

Endereço:

Medeiros, Heloisa B. (medeiros@mat.uff.br) & Menezes, M. Lucia (menezes@mat.uff.br)

UFF - IME – GMA

Rua Mário Santos Braga s/n –Valonguinho – 24020-140 Niteroi Rio de Janeiro -RJ.