



Alguns resultados sobre integração numérica

Pedro Gabriel Papa Torelli¹

Resumo: A Teoria dos Cálculos Aproximados visa desenvolver técnicas para que seja possível calcular aproximações de um dado problema para o qual os mecanismos comumente utilizados não são aplicáveis. Neste escrito, são formalmente apresentados ao leitor alguns métodos para aproximação do valor da integral de uma função dada em um intervalo fechado: aproximação pelo ponto médio, trapezoidal e aproximação de Simpson. Também são apresentadas estimativas de erro para os métodos mencionados e ao final, aplicações.

Conteúdo

1	Integração Aproximada	7
2	Aproximações	9
2.1	Aproximações à esquerda e à direita	9
2.2	Aproximação pelo ponto médio	10
2.3	Aproximação trapezoidal	10
2.4	Aproximação de Simpson	10
2.5	Interpretação geométrica para as aproximações	12
3	Estimativas de Erro	12
4	Aplicação dos Métodos Anteriores	20

1. Integração Aproximada

Uma das mais importantes criações da humanidade é o Cálculo Diferencial e Integral, que se baseia em dois conceitos centrais: a derivada e a integral. A teoria sobre integração e suas inúmeras aplicações reforçam sua importância nos dias atuais. O Teorema Fundamental do Cálculo é uma ferramenta essencial para o estudo deste tema e sua utilização simplifica o cálculo da integral de Riemann. Para aplicá-lo deve ser possível encontrar uma primitiva para a função que se deseja integrar.

Entretanto, há uma grande gama de funções para as quais não é possível utilizar o Teorema Fundamental do Cálculo, já que não é possível encontrar uma primitiva para estas funções. Em meio a esta problemática, a solução é optar por aproximar a integral desejada. A Teoria dos Cálculos Aproximados, dentre vários resultados, estabelece métodos para aproximação de integrais. Neste artigo nos dedicamos ao estudo de três métodos de aproximação de integrais, a saber, as regras trapezoidal, do ponto médio e de Simpson.

Esta seção é dedicada à definição da integral de Riemann de uma função f sobre um intervalo $[a, b]$. Os métodos de aproximação apresentados nas próximas seções estão

¹ Licenciado em Matemática pela Universidade Estadual de Maringá. Email: pgptorelli@gmail.com

apoiados nesta teoria, já que para que seja possível realizar uma aproximação da integral de uma função, primeiro é preciso garantir que tal integral existe.

Para introduzir a definição de integral de Riemann iremos apresentar algumas definições que servirão de base para os resultados presentes neste capítulo. Dentre estas definições estão as de Partição Uniforme, Soma de Riemann e Integral de Riemann.

Definição 1 (Partição de um intervalo $[a, b]$): Seja $I = [a, b]$ um intervalo fechado e limitado em \mathbb{R} . Uma partição de I é um conjunto finito e ordenado $\mathcal{P} = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ de pontos de $[a, b]$.

Usualmente denotamos a partição \mathcal{P} por

$$\mathcal{P} = \{[x_{i-1}, x_i]\}_{i=1}^n$$

Observamos que a partição \mathcal{P} divide o intervalo $I = [a, b]$ em n subintervalos

$$I_1 = [x_0, x_1], I_2 = [x_1, x_2], \dots, I_n = [x_{n-1}, x_n].$$

Definimos ainda a norma da partição \mathcal{P} , denotada por $\|\mathcal{P}\|$ como sendo o comprimento do "maior subintervalo" I_i , isto é,

$$\|\mathcal{P}\| = \max\{(x_1 - x_0), (x_2 - x_1), \dots, (x_n - x_{n-1})\}. \quad (1)$$

Se em cada um dos n subintervalos $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ for fixado um ponto t_i , então temos uma partição aferida, isto é, um par ordenado $\dot{\mathcal{P}} = \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^n$, onde $\mathcal{P} = \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^n$ é uma partição de $[a, b]$ e $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ é um ponto fixado.

Definição 2 (Soma de Riemann): Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real definida num intervalo fechado e limitado $I = [a, b]$. Para cada partição aferida $\dot{\mathcal{P}} = \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^n$ do intervalo I definimos a soma de Riemann de f associada a $\dot{\mathcal{P}}$ como sendo o número real

$$S(f; \dot{\mathcal{P}}) = \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Agora estamos aptos para definir a integral de Riemann de uma função f sobre um intervalo $[a, b]$.

Definição 3: Dizemos que uma função $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável a Riemann em $[a, b]$ se existe um número real L tal que para todo $\varepsilon > 0$, arbitrariamente dado, existe um $\delta > 0$ (que geralmente depende de ε) de modo que

$$|S(f; \dot{\mathcal{P}}) - L| < \varepsilon,$$

sempre que $\dot{\mathcal{P}}$ for tal que $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta$.

O conjunto de todas as funções integráveis à Riemann num intervalo $[a, b]$ será denotado por $\mathcal{R}([a, b])$. Podemos facilmente verificar que se $f \in \mathcal{R}([a, b])$ então o número L satisfazendo a definição 3 é unicamente determinado e, por isso, recebe o nome de integral de f sobre $[a, b]$. Logo para $f \in \mathcal{R}([a, b])$ escrevemos

$$L = \int_a^b f$$

e com devido abuso de notação escrevemos também

$$L = \lim_{\|\dot{\mathcal{P}}\| \rightarrow 0} S(f; \dot{\mathcal{P}}).$$

Boa parte do estudo sobre integrabilidade consiste em determinar condições necessárias e/ou suficientes para que uma função $f \in \mathcal{R}([a, b])$. O resultado principal e decisivo nesta direção foi dado por Henri Lebesgue e atualmente é conhecido como Critério de Integrabilidade de Lebesgue, o qual enunciamos no teorema seguinte.

Teorema 1 (Critério de Integrabilidade de Lebesgue): *Seja $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada. Então $f \in \mathcal{R}([a, b])$ se, e somente se, f é quase sempre contínua em $[a, b]$.*

Em particular se $f \in \mathcal{C}([a, b])$ então $f \in \mathcal{R}([a, b])$. Logo, a continuidade de f garante sua integrabilidade. Esta será a classe de funções para as quais apresentaremos métodos de aproximação para as integrais.

2. Aproximações

Nesta seção definimos sequências numéricas convenientes que convergem para o valor da integral de uma função $f \in \mathcal{C}([a, b])$. Em tudo que segue, f representa uma função real definida e contínua em um intervalo real fechado e limitado $[a, b]$. As aproximações que convergem para o valor da integral que estão presentes neste estudo são as aproximações à direita, à esquerda, pelo ponto médio, a trapezoidal e a de Simpson. Esses mecanismos são especialmente úteis quando não podemos aplicar o Teorema Fundamental do Cálculo.

Antes de apresentarmos as aproximações, vamos introduzir uma família de partições especiais do intervalo $[a, b]$, chamada de partições uniformes. Para cada $n \in \mathbb{N}$, denotamos por $\mathcal{P}_n = \{[a_{i-1}, a_i]\}_{i=1}^n$, a partição do intervalo $[a, b]$, obtida pela divisão do intervalo $[a, b]$ em um n subintervalos de mesmo comprimento $h_n = \frac{b-a}{n}$. Isto é,

$$\mathcal{P}_n = \{a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b\},$$

onde

$$a_i = a + ih_n, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

2.1. Aproximações à esquerda e à direita. As aproximações pela esquerda são obtidas pelas somas de Riemann de f , associadas às partições \mathcal{P}_n , cujas aferições são tomadas sendo os extremos esquerdos de cada subintervalo de \mathcal{P}_n . Melhor ainda, definimos a aproximação à esquerda, para o valor da integral de f em $[a, b]$, como sendo a sequência numérica $(E_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ cujo termo geral é dado por

$$E_n(f) = h_n \sum_{k=0}^{n-1} f(a + kh_n). \quad (2)$$

Por outro lado quando consideramos as somas de Riemann de f , associadas às partições $\dot{\mathcal{P}}_n$, cujas aferições são tomadas como os pontos extremos à direita de cada subintervalo, teremos as chamadas aproximações à direita. Isto é, definimos a aproximação à

direita, para a integral de f em $[a, b]$, como sendo a sequência numérica $(D_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ cujo termo geral é dado por

$$D_n(f) = h_n \sum_{k=1}^n f(a + kh_n). \quad (3)$$

2.2. Aproximação pelo ponto médio. As aproximações pelo ponto médio são dadas pela soma de Riemann de f , associadas às partições $\dot{\mathcal{P}}_n$, cujas aferições são escolhidas como os pontos médios de cada um dos subintervalos de \mathcal{P}_n . Precisamente, definimos a aproximação pelo ponto médio para o valor da integral de f em $[a, b]$ como sendo a sequência numérica $(M_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ cujo termo geral é dado por

$$M_n(f) = h_n \sum_{k=1}^n f\left(a + \left(\frac{2k-1}{2}\right)h_n\right). \quad (4)$$

2.3. Aproximação trapezoidal. Sabemos que as aproximações à esquerda e à direita, ambas, convergem para o mesmo valor $L = \int_a^b f$. Entretanto não é possível afirmar qual destas duas aproximações é mais eficiente, ou seja, tem menor erro, está mais próxima do número L . Este fato nos motiva a considerar a média aritmética entre estas duas aproximações, que certamente será uma aproximação melhor que a pior dentre as duas. A aproximação obtida pela média aritmética entre $E_n(f)$ e $D_n(f)$ é denominada aproximação trapezoidal. Logo, definimos a aproximação trapezoidal para a integral de f em $[a, b]$, como sendo a sequência numérica $(T_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ cujo termo geral é dado por

$$T_n(f) = \frac{E_n(f) + D_n(f)}{2} = h_n \left[\frac{1}{2}f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} f(a + kh_n) + \frac{1}{2}f(b) \right]. \quad (5)$$

2.4. Aproximação de Simpson. Para motivar a definição da aproximação de Simpson, definimos os erros das aproximações $M_n(f)$ e $T_n(f)$ como sendo:

$$e_M(n) = M_n(f) - \int_a^b f \quad (6)$$

e

$$e_T(n) = T_n(f) - \int_a^b f \quad (7)$$

Agora, vejamos alguns exemplos.

i) Aproximar o número real $\text{sen } 1$. Para isto, vejamos que $\text{sen } 1 = \int_0^1 \cos x \, dx$ e pela regra do ponto médio e pela regra trapezoidal, com $n = 5$, no intervalo $[0, 1]$, obtemos:

$\text{sen } 1$ (com 9 casas decimais)	Aproximação	Erro
0,841470985	$M_5(f) \approx 0,842875074$	$e_M = -0,001404089$
0,841470985	$T_5(f) \approx 0,838664210$	$e_T = 0,002806775$

Tabela 4: Aproximação da integral de $f(x) = \cos x$ em $[0, 1]$.

ii) Aproximar o número real $\text{sen } 3$. Para isto, vejamos que $\text{sen } 3 = \int_0^3 \cos x \, dx$ e pela regra do ponto médio e pela regra trapezoidal, com $n = 10$, no intervalo $[0, 3]$, obtemos:

$\text{sen } 3$ (com 9 casas decimais)	Aproximação	Erro
0,141120008	$M_{10}(f) \approx 0,141650601$	$e_M = -0,000530592$
0,141120008	$T_{10}(f) \approx 0,140060017$	$e_T = 0,001059991$

Tabela 5: Aproximação da integral de $f(x) = \cos x$ em $[0, 3]$.

Da experiência acima, observamos as tabelas é possível uma certa relação entre os erros, isto é:

$$2e_M(n) \approx -e_T(n) \iff 2e_M(n) + e_T(n) \approx 0. \quad (8)$$

Então, usando (6), (7) e (8) podemos concluir que

$$\begin{aligned} 3 \int_a^b f &= 2 \int_a^b f + \int_a^b f \\ &= 2(M_n(f) - e_M(n)) + (T_n(f) - e_T(n)) \\ &= -[2e_M(n) + e_T(n)] + [2M_n(f) + T_n(f)] \\ &\approx 2M_n(f) + T_n(f). \end{aligned}$$

Logo,

$$\int_a^b f \approx \frac{2M_n(f) + T_n(f)}{3} \quad (9)$$

O raciocínio acima nos sugere que a média ponderada entre $M_n(f)$ e $T_n(f)$, dada em (9) fornece uma boa aproximação para o valor da integral de f . Também com objetivo de ser ter uma expressão envolvendo soma de fatores de f em pontos da partição \mathcal{P}_n de $[a, b]$ vamos definir as aproximações de Simpson para partições com um número par de pontos, isto é, para $n = 2j$, para algum $j \in \mathbb{N}$.

Para todo n natural par, definimos

$$S_n = S_{2j} = \frac{2M_j(f) + T_j(f)}{3}. \quad (10)$$

A seqüência $(S_{2j})_{j \in \mathbb{N}}$ cujo termo geral é dado por (10) é denominada aproximação de Simpson para a integral de f em $[a, b]$.

Veja que $\lim_{j \rightarrow \infty} S_{2j} = \int_a^b f$, pois $M_j(f) \rightarrow \int_a^b f$ e $T_j(f) \rightarrow \int_a^b f$. Além disso usando as definição de $M_j(f)$ e $T_j(f)$ podemos escrever S_{2j} numa forma conveniente. Com efeito, seja n um natural par, então

$$n = 2j \iff j = \frac{n}{2}.$$

Considere \mathcal{P}_n a partição uniforme de $[a, b]$ em n subintervalos de comprimento $h_n = \frac{b-a}{n}$. Então

$$M_j(f) = h_j \sum_{k=1}^{n/2} f(a_{2k-1}) = \left(\frac{b-a}{j}\right) \sum_{k=1}^{n/2} f(a_{2k-1}) = \left(\frac{b-a}{n}\right) \sum_{k=1}^{n/2} 2f(a_{2k-1}),$$

ou ainda,

$$2M_j(f) = \left(\frac{b-a}{n}\right) \sum_{k=1}^{n/2} 4f(a_{2k-1}). \quad (11)$$

Também temos que

$$T_j(f) = \left(\frac{b-a}{n}\right) \left[f(a) + \sum_{k=1}^{n/2-1} 2f(a_{2k}) + f(b) \right]. \quad (12)$$

Substituindo (11) e (12) em (10) temos

$$\begin{aligned} S_{2j}(f) &= \frac{1}{3} \frac{(b-a)}{n} [f(a) + 4f(a_1) + 2f(a_2) + 4f(a_3) + 2f(a_4) \\ &\quad + \cdots + 2f(a_{n-2}) + 4f(a_{n-1}) + f(b)], \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} S_n(f) &= \frac{1}{3} h_n [f(a) + 4f(a+h_n) + 2f(a+2h_n) + 4f(a+3h_n) + 2f(a+4h_n) \\ &\quad + \cdots + 2f(b-2h_n) + 4f(b-h_n) + f(b)]. \end{aligned}$$

2.5. Interpretação geométrica para as aproximações. Para visualizarmos uma interpretação geométrica para cada uma das aproximações definidas na seção anterior é necessário interpretar a integral em termos de uma área. Logo, é preciso supor que $f \in \mathcal{C}([a, b])$ seja uma função não negativa em $[a, b]$, ou seja, $f(x) \geq 0$, para todo $x \in [a, b]$. Nestas condições é fácil ver que

$E_n(f)$ é a soma das áreas dos retângulos de base h_n e altura dada pelo valor da função nos extremos à esquerda de cada subintervalo de \mathcal{P}_n ;

$D_n(f)$ é a soma das áreas dos retângulos de base h_n e altura dada pelo valor da função nos extremos à direita de cada subintervalo de \mathcal{P}_n ;

$M_n(f)$ é a soma das áreas dos retângulos de base h_n e altura dada pelo valor da função nos pontos médios de cada subintervalo de \mathcal{P}_n ;

$T_n(f)$ é a soma das áreas dos trapézios de altura h_n e bases $f(a+kh_n)$ e $f(a+(k+1)h_n)$, valores da função nos extremos à esquerda e à direita de cada subintervalo de \mathcal{P}_n ;

É também possível uma abordagem geométrica para $(S_n(f))_{n \text{ par}} = (S_{2j}(f))_{j \in \mathbb{N}}$. De fato, dado n natural par, isto é, $n = 2j$ para algum $j \in \mathbb{N}$, aproximamos o gráfico da função f no intervalo $[a_0, a_2]$ por uma função polinomial de grau menor igual a 2 que passa pelos pontos $(a_0, f(a_0))$, $(a_1, f(a_1))$ e $(a_2, f(a_2))$. Desta forma, temos que:

$S_n(f)$ é a soma das áreas dos $\frac{n}{2}$ trapézios "curvilíneos" de altura $2h_n$.

3. Estimativas de Erro

Nesta seção discutiremos mais a fundo os erros resultantes das aproximações descritas na seção anterior. Tal estudo é intrinsecamente interessante pois como estamos

discutindo aproximações, uma pergunta natural é: Qual é o erro da aproximação obtida para o valor real da integral? Estes erros são possíveis de serem estimados e esta seção apresenta tais estimativas. Iniciamos com o caso em que f é monótona.

Teorema 2: Se $f \in C([a, b])$ é monótona então

$$\left| T_n(f) - \int_a^b f \right| \leq \left[\frac{(b-a)|f(b) - f(a)|}{2} \right] \frac{1}{n}.$$

Demonstração: Suponhamos que f é não crescente. Então

$$E_n(f) \leq \int_a^b f \leq D_n(f) \Rightarrow -D_n(f) \leq -\int_a^b f \leq -E_n(f).$$

Caso somemos $T_n(f)$ na desigualdade anterior, obtemos

$$\begin{aligned} T_n(f) - D_n(f) &\leq T_n(f) - \int_a^b f \leq T_n(f) - E_n(f) \\ \Rightarrow \frac{E_n(f) + D_n(f)}{2} - D_n(f) &\leq T_n(f) - \int_a^b f \leq \frac{E_n(f) + D_n(f)}{2} - E_n(f) \\ \Rightarrow \frac{E_n(f) - D_n(f)}{2} &\leq T_n(f) - \int_a^b f \leq \frac{D_n(f) - E_n(f)}{2} \\ \Rightarrow \left| T_n(f) - \int_a^b f \right| &\leq \frac{D_n(f) - E_n(f)}{2} = \frac{f(b) - f(a)}{2} h_n \leq |f(b) - f(a)| \frac{(b-a)}{2n}. \end{aligned}$$

Se f é não crescente então

$$D_n(f) \leq \int_a^b f \leq E_n(f) \Rightarrow -E_n(f) \leq -\int_a^b f \leq -D_n(f).$$

Somando $T_n(f)$ na desigualdade anterior, com um raciocínio análogo ao caso acima concluímos o resultado. \square

O próximo teorema se refere a um resultado que pode ser interessante ser considerado quando se deseja aproximar a integral de uma função contínua côncava ou convexa em um dado intervalo $[a, b]$. Como este resultado não é o principal para este estudo, apenas enunciaremos abaixo.

Teorema 3: Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e sejam $|e_M|$ e $|e_T|$ os erros absolutos que resultam das aproximações pelo ponto médio e trapezoidal de $\int_a^b f$ sob uma partição uniforme \mathcal{P}_n .

i. se f'' não muda de sinal em (a, b) então $|e_M| < |e_T|$;

ii. se o gráfico de f é côncavo para baixo em (a, b) , então $T_n(f) < \int_a^b f < M_n(f)$;

iii. se o gráfico de f é côncavo para cima em (a, b) , então $M_n(f) < \int_a^b f < T_n(f)$.

Denotamos agora

$$\|f''\| = \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)| \quad \text{e} \quad \|f^{(4)}\| = \max_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)|.$$

O resultado principal sobre estimativas de erro para as aproximações da integral de f em $[a, b]$ é dado pelo teorema a seguir.

Teorema 4:

i. Se $f \in C^2([a, b])$, então

$$\left| M_n(f) - \int_a^b f \right| \leq \left[\frac{(b-a)^3}{24} \|f''\| \right] \frac{1}{n^2} \quad (13)$$

e

$$\left| T_n(f) - \int_a^b f \right| \leq \left[\frac{(b-a)^3}{12} \|f''\| \right] \frac{1}{n^2}. \quad (14)$$

ii. Se $f \in C^4([a, b])$, então

$$\left| S_n(f) - \int_a^b f \right| \leq \left[\frac{(b-a)^5}{180} \|f^{(4)}\| \right] \frac{1}{n^4}. \quad (15)$$

Demonstração: Claramente separamos a demonstração deste teorema em dois casos:

i. Para a primeira desigualdade constante neste item, vejamos:

Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja \mathcal{P}_n a partição uniforme do intervalo $[a, b]$, cujos pontos médios de cada um dos n subintervalos é representado por

$$c_k = a + \left(k - \frac{1}{2} \right) h_n, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (16)$$

onde $h_n = \frac{b-a}{n}$.

Introduzimos n funções $\psi_k : [0, \frac{h_n}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$\psi_k(t) = \int_{c_k-t}^{c_k+t} f(x) dx - 2tf(c_k), \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (17)$$

Claramente é possível observar que

$$\psi_k(t) = \int_{c_k}^{c_k+t} f(x) dx - \int_{c_k}^{c_k-t} f(x) dx - 2tf(c_k).$$

Para cada $k = 1, 2, \dots, n$, vemos que a função ψ_k é duas vezes derivável em $[a, b]$ e um cálculo simples nos dá que:

$$\psi_k'(t) = f(c_k + t) + f(c_k - t) - 2f(c_k) \quad (18)$$

e

$$\psi_k''(t) = f'(c_k + t) - f'(c_k - t). \quad (19)$$

De (17), (18) e (19), obtemos que

$$\psi_k(0) = \psi_k'(0) = \psi_k''(0) = 0, \quad \forall k = 1, 2, \dots, n. \quad (20)$$

Agora, para cada $k = 1, 2, \dots, n$ e $0 < t \leq \frac{h_n}{2}$ fixados, podemos aplicar o Teorema do Valor Médio para a função $f'|_{[c_k-t, c_k+t]}$. Logo, para cada $k = 1, 2, \dots, n$ e $0 < t \leq \frac{h_n}{2}$ fixados, $\exists \eta(k, t) \in (c_k - t, c_k + t)$ tal que

$$f'(c_k + t) - f'(c_k - t) = f''(\eta(k, t))(2t).$$

Substituindo (19) na igualdade acima, temos

$$\psi_k''(t) = 2t f''(\eta(k, t)) \quad (21)$$

Levando em conta que $f'' \in C([a, b])$, temos que $\exists x_0, x_1 \in [a, b]$ tais que para todo $s \in [a, b]$ temos

$$f''(x_0) = \min_{a \leq x \leq b} \{f''(x); x \in [a, b]\} \leq f''(s) \leq \max_{a \leq x \leq b} \{f''(x); x \in [a, b]\} = f''(x_1), \quad (22)$$

de onde, em particular,

$$f''(x_0) \leq f''(\eta(k, t)) \leq f''(x_1),$$

ou ainda,

$$2t f''(x_0) \leq 2t f''(\eta(k, t)) \leq 2t f''(x_1).$$

Usando (21) na desigualdade acima, concluimos que para cada $k = 1, 2, \dots, n$ e $0 \leq t \leq \frac{h_n}{2}$

$$2t f''(x_0) \leq \psi_k''(t) \leq 2t f''(x_1).$$

Observe também que esta desigualdade continua válida para $t = 0$. Então,

$$2t f''(x_0) \leq \psi_k''(t) \leq 2t f''(x_1), \quad \forall k = 1, 2, \dots, n, \quad \forall t \in \left[0, \frac{h_n}{2}\right]. \quad (23)$$

Integrando, membro a membro, a desigualdade acima de zero a s , com $s \in \left[0, \frac{h_n}{2}\right]$, temos:

$$\begin{aligned} \int_0^s 2t f''(x_0) dt &\leq \int_0^s \psi_k''(t) dt \leq \int_0^s 2t f''(x_1) dt \\ s^2 f''(x_0) &\leq \psi_k'(s) \leq s^2 f''(x_1). \end{aligned}$$

Integrando agora, de zero a t , sendo $t \in \left[0, \frac{h_n}{2}\right]$, verifica-se que:

$$\begin{aligned} \int_0^s s^2 f''(x_0) ds &\leq \int_0^s \psi_k'(s) ds \leq \int_0^s 2s^2 f''(x_1) ds \\ \frac{t^3}{3} f''(x_0) &\leq \psi_k(t) \leq \frac{t^3}{3} f''(x_1). \end{aligned}$$

Tomando, em particular $t = \frac{h_n}{2}$ na desigualdade acima, temos:

$$\frac{h_n^3}{24} f''(x_0) \leq \psi_k \left(\frac{h_n}{2} \right) \leq \frac{h_n^3}{24} f''(x_1).$$

Somando as desigualdades acima de $k = 1$ a $k = n$, obtemos

$$\frac{nh_n^3}{24}f''(x_0) \leq \sum_{k=1}^n \psi_k\left(\frac{h_n}{2}\right) \leq \frac{nh_n^3}{24}f''(x_1).$$

Notando que $\sum_{k=1}^n \psi_k\left(\frac{h_n}{2}\right) = \int_a^b f - M_n(f)$, por (17) e (22), temos

$$f''(x_0) \leq \left[\frac{24}{nh_n^3}\right] \left[\int_a^b f - M_n(f)\right] \leq f''(x_1).$$

Esta desigualdade e o teorema do valor intermediário, aplicado a f'' , implicam que para cada $n \in \mathbb{N}$, $\exists \beta_n \in (a, b)$ tal que

$$f''(\beta_n) = \left[\frac{24}{nh_n^3}\right] \left[\int_a^b f - M_n(f)\right],$$

ou seja,

$$\int_a^b f - M_n(f) = \frac{nh_n^3}{24}f''(\beta_n) = \frac{(b-a)^3}{24n^2}f''(\beta_n)$$

Finalmente, tomando o módulo na igualdade acima e lembrando que $|f''(x)| \leq \|f''\|, \forall x \in [a, b]$, concluímos que

$$\left|\int_a^b f - M_n(f)\right| = \frac{(b-a)^3}{24n^2}|f''(\beta_n)| \leq \frac{(b-a)^3}{24n^2}\|f''\|$$

como desejado.

Agora de modo a validar a segunda desigualdade constante neste mesmo item, temos que:

Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja \mathcal{P}_n a partição uniforme do intervalo $[a, b]$, que o divide em n subintervalos de mesmo comprimento $h_n = \frac{b-a}{n}$. Isto é $\mathcal{P}_n = \{a_k\}_{0 \leq k \leq n} = \{a_0 = a < a_1 = a + h_n < \dots < a_n = b\} = \{a_k = a + kh_n; k = 0, 1, \dots, n\}$.

Introduzimos n funções $\varphi_k : [0, h_n] \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\varphi_k(t) = \frac{1}{2}t[f(a_k) + f(a_k + t)] - \int_{a_k}^{a_k+t} f(x)dx, \quad k = 0, 1, \dots, (n-1). \quad (24)$$

Para cada $k = 0, 1, \dots, (n-1)$ vemos que a função φ_k é duas vezes derivável em $[0, h_n]$ e um cálculo simples nos resulta

$$\varphi_k'(t) = \frac{1}{2}[f(a_k) - f(a_k + t) + tf'(a_k + t)] \quad (25)$$

e

$$\varphi_k''(t) = \frac{1}{2}tf''(a_k + t). \quad (26)$$

Então de (25) segue que

$$\varphi'_k(0) = 0, \quad \forall k = 0, 1, \dots, (n-1) \quad (27)$$

e de (26) observamos que

$$\varphi''_k(0) = 0, \quad \forall k = 0, 1, \dots, (n-1) \quad (28)$$

Além disso, desde que $f \in \mathcal{C}^2([a, b])$, temos que $f'' \in \mathcal{C}([a, b])$ e portanto, f assume valor máximo e valor mínimo no intervalo $[a, b]$, isto é, $\exists x_0, x_1 \in [a, b]$ tais que

$$f''(x_0) = \min_{a \leq x \leq b} \{f''(x); x \in [a, b]\} \leq f''(s) \leq \max_{a \leq x \leq b} \{f''(x); x \in [a, b]\} = f''(x_1), \quad \forall s \in [a, b].$$

Em particular, $\forall k = 0, 1, \dots, (n-1), \forall t \in [0, h_n]$, segue que

$$f''(x_0) \leq f''(a_k + t) \leq f''(x_1),$$

ou ainda,

$$f''(x_0) \frac{t}{2} \leq f''(a_k + t) \frac{t}{2} \leq f''(x_1) \frac{t}{2}.$$

Integrando, membro a membro, de 0 a s , sendo $s \in [0, h_n]$, e usando (27), concluimos que:

$$\begin{aligned} \int_0^s \frac{1}{2} t f''(x_0) dt &\leq \int_0^s \varphi''_k(t) dt \leq \int_0^s \frac{1}{2} t f''(x_1) dt \\ \frac{1}{4} s^2 f''(x_0) &\leq \varphi'_k(s) \leq \frac{1}{4} s^2 f''(x_1), \quad \forall s \in [0, h_n], \forall k = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Integrando a desigualdade acima em s de 0 a t , com $t \in [0, h_n]$ e usando (28), resulta que:

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{1}{4} s^2 f''(x_0) ds &\leq \int_0^t \varphi'(s) ds \leq \int_0^t \frac{1}{4} s^2 f''(x_1) ds \\ \frac{1}{12} t^3 f''(x_0) &\leq \varphi_k(t) \leq \frac{1}{12} t^3 f''(x_1), \quad \forall t \in [0, h_n], \forall k = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Donde, em particular, tomando $t = h_n$, temos para $k = 1, 2, \dots, n$:

$$\frac{1}{12} h_n^3 f''(x_0) \leq \varphi_k(h_n) \leq \frac{1}{12} h_n^3 f''(x_1)$$

Somando as desigualdades da forma acima de $k = 1$ a $k = n$, obtemos:

$$\frac{nh_n^3}{12} f''(x_0) \leq \sum_{k=1}^n \varphi_k(h_n) \leq \frac{nh_n^3}{12} f''(x_1) \quad (29)$$

Agora usando (24), podemos ver que $\sum_{k=1}^n \varphi_k(h_n) = T_n(f) - \int_a^b f$, para $n \in \mathbb{N}$.

Desta igualdade e de (29), temos

$$\frac{nh_n^3}{12}f''(x_0) \leq T_n(f) - \int_a^b f \leq \frac{nh_n^3}{12}f''(x_1)$$

$$f''(x_0) \leq \left[\frac{12}{nh_n^3} \right] \left[T_n(f) - \int_a^b f \right] \leq f''(x_1)$$

Como $f'' \in C[a, b]$, pelo Teorema do Valor Intermediário de Bolzano, podemos afirmar que para cada $n \in \mathbb{N}$, $\exists \alpha_n \in [a, b]$ tal que

$$f''(\alpha_n) = \left[\frac{12}{nh_n^3} \right] \left[T_n(f) - \int_a^b f \right]$$

ou seja,

$$T_n(f) - \int_a^b f = \frac{nh_n^3}{12}f''(\alpha_n) = \frac{(b-a)^2}{12n^2}f''(\alpha_n)$$

Tomando o valor absoluto na igualdade anterior e utilizando o fato de que $|f''(x)| \leq \|f''\|, \forall x \in [a, b]$:

$$\left| T_n(f) - \int_a^b f \right| = \frac{(b-a)^2}{12n^2}|f''(\alpha_n)| \leq \frac{(b-a)^2}{12n^2}\|f''\| = \left[\frac{(b-a)^2}{12} \|f''\| \right] \frac{1}{n^2}$$

como desejado.

ii. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja \mathcal{P}_n a partição uniforme do intervalo $[a, b]$. Então, se $k = 0, 1, 2, \dots, \frac{n}{2} - 1$ tome $c_k = a + \frac{2k+1}{h_n}$ os pontos médios de cada subintervalo formados a partir da partição equidistante \mathcal{P}_n e defina $\phi_k : [0, h_n] \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\phi_k(t) = \frac{t}{3}[f(c_k + t) + 4f(c_k) + f(c_k - t)] - \int_{c_k-t}^{c_k+t} f(x)dx. \quad (30)$$

Claramente podemos notar que:

$$\phi_k(t) = \frac{t}{3}[f(c_k + t) + 4f(c_k) + f(c_k - t)] - \left[\int_{c_k}^{c_k+t} f(x)dx - \int_{c_k}^{c_k-t} f(x)dx \right]. \quad (31)$$

Como $f \in C^4([a, b])$, derivamos a função três vezes de modo a obter:

$$\phi_k'(t) = \frac{t}{3}[-f'(c_k - t) + f'(c_k + t)] - \frac{2}{3}[f(c_k - t) - 2f(c_k) + f(c_k + t)], \quad (32)$$

$$\phi_k''(t) = \frac{t}{3}[f''(c_k - t) + f''(c_k + t)] + \frac{1}{3}[f'(c_k - t) - f'(c_k + t)] \quad (33)$$

e

$$\phi_k'''(t) = \frac{t}{3}[f'''(c_k + t) - f'''(c_k - t)], \quad \text{para } t \in [0, h_n]. \quad (34)$$

Observe que de (32), (33) e (34), temos

$$\phi_k(0) = \phi'_k(0) = \phi''_k(0) = 0. \quad (35)$$

Deste modo, segue da aplicação do Teorema do Valor Médio em f''' , que sabemos ser contínua em $[a, b]$, a afirmação de que $\exists \gamma_n \in [c_k - t, c_k + t]$ tal que

$$f'''(c_k + t) - f'''(c_k - t) = f^{(4)}(\gamma_n)(2t) \quad (36)$$

ou seja, de (34) e (36), temos

$$\phi_k'''(t) = \frac{t}{3}[f'''(c_k + t) - f'''(c_k - t)] = \frac{2t^2}{3}f^{(4)}(\gamma_n), \quad \text{para } t \in [0, h_n]. \quad (37)$$

Visto que $f \in C^4([a, b])$ pode-se afirmar que $\exists x_0, x_1 \in [a, b]$ tais que

$$f^{(4)}(x_0) = \min\{f^{(4)}(x); x \in [a, b]\} \text{ e } f^{(4)}(x_1) = \max\{f^{(4)}(x); x \in [a, b]\}. \quad (38)$$

E assim, evidentemente temos que para $t \in [0, h_n]$

$$\begin{aligned} f^{(4)}(x_0) &\leq f^{(4)}(\gamma_n) \leq f^{(4)}(x_1) \\ \frac{2t^2}{3}f^{(4)}(x_0) &\leq \frac{2t^2}{3}f^{(4)}(\gamma_n) \leq \frac{2t^2}{3}f^{(4)}(x_1) \\ \frac{2t^2}{3}f^{(4)}(x_0) &\leq \phi_k'''(t) \leq \frac{2t^2}{3}f^{(4)}(x_1). \end{aligned}$$

Agora, note que ao integrarmos a desigualdade acima de zero a v com $v \in [0, h_n]$ obtemos:

$$\frac{2v^3}{9}f^{(4)}(x_0) \leq \phi_k''(v) \leq \frac{2v^3}{9}f^{(4)}(x_1).$$

Integrando novamente, desta vez de zero a s , sendo $s \in [0, h_n]$:

$$\frac{s^4}{18}f^{(4)}(x_0) \leq \phi_k'(s) \leq \frac{s^4}{18}f^{(4)}(x_1).$$

Outra vez integrando, agora de zero a t , onde $t \in [0, h_n]$, tem-se

$$\frac{t^5}{90}f^{(4)}(x_0) \leq \phi_k(t) \leq \frac{t^5}{90}f^{(4)}(x_1).$$

Uma vez que $t \in [0, h_n]$, tomemos o caso particular onde $t = h_n$ na desigualdade acima para obtermos

$$\frac{h_n^5}{90}f^{(4)}(x_0) \leq \phi_k(h_n) \leq \frac{h_n^5}{90}f^{(4)}(x_1). \quad (39)$$

Somando as desigualdades acima de $k = 0$ a $k = \frac{n}{2} - 1$ e notando que

$$\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} \phi_k(h_n) = S_n(f) - \int_a^b f(x)dx, \text{ é percebido que}$$

$$\frac{nh_n^5}{180}f^{(4)}(x_0) \leq S_n(f) - \int_a^b f(x)dx \leq \frac{nh_n^5}{180}f^{(4)}(x_1),$$

ou seja,

$$f^{(4)}(x_0) \leq \left[\frac{180}{nh_n^5} \right] \left[S_n(f) - \int_a^b f(x)dx \right] \leq f^{(4)}(x_1) \quad (40)$$

Já que $f^{(4)}$ é contínua em $[a, b]$, ao aplicar o Teorema do Valor Intermediário de Bolzano, temos como resultado que para cada $n \in \mathbb{N}$ par $\exists \lambda_n$ tal que

$$\left[\frac{180}{nh_n^5} \right] \left[S_n(f) - \int_a^b f(x)dx \right] = f^{(4)}(\lambda_n)$$

$$S_n(f) - \int_a^b f(x)dx = \frac{nh_n^5}{180} f^{(4)}(\lambda_n). \quad (41)$$

Finalmente, tomando o módulo na igualdade (41) acima, e aplicando os fatos de que $h_n = \frac{(b-a)}{n}$ e $|f^{(4)}(x)| \leq \|f^{(4)}\|, \forall x \in [a, b]$ concluímos que

$$\left| S_n(f) - \int_a^b f(x)dx \right| = \frac{nh_n^5}{180} |f^{(4)}(\lambda_n)| = \frac{(b-a)^5}{180n^4} |f^{(4)}(\lambda_n)| \leq \frac{(b-a)^5}{180n^4} \|f^{(4)}\|.$$

□

4. Aplicação dos Métodos Anteriores

Em Estatística, uma das mais importantes distribuições de probabilidade é a distribuição normal. Esta distribuição tem grande relevância já que muitas variáveis aleatórias em experimentos físicos mostraram ser aproximadamente normais. É o caso do estudo de distribuições de altura ou peso de uma população ou mesmo a distribuição da força de tração de peças de aço produzidas em um certo processo.

Por definição, uma variável X tem distribuição normal com média μ e variância σ^2 se possui função densidade de probabilidade

$$f(x|\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right],$$

onde \exp é a função exponencial e μ e σ^2 são os parâmetros média e variância da distribuição, respectivamente. Note na Figura 1 que o gráfico da distribuição normal é simétrico em relação à uma reta vertical do tipo $x = x_0$, para algum $x_0 \in \mathbb{R}$, e ainda que é significativa em apenas um certo intervalo.

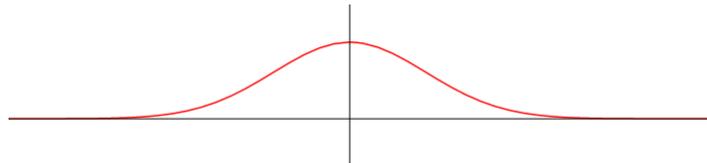


Figura 1: Esboço do gráfico de uma distribuição normal qualquer.

Dentro da distribuição normal, genericamente apresentada acima, temos um tipo particular de distribuição normal, é aquela que possui média nula e variância unitária, ou seja, a distribuição normal, cuja função densidade de probabilidade é

$$\rho(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} (u)^2 \right]$$

A função acima é chamada forma padrão da distribuição normal. Claramente, esta forma não depende dos parâmetros μ e σ , já que estes são zero e um, respectivamente.

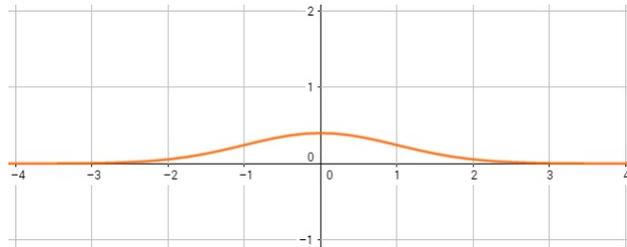


Figura 2: Esboço do gráfico da distribuição normal em sua forma padrão.

Posto estes fatos, dada uma distribuição normal, em sua forma padrão, de uma variável X , a probabilidade da variável X estar situada no intervalo $[x_1, x_2]$ é dada pela a integral da função densidade de probabilidade de x_1 a x_2 , ou seja,

$$\Pr(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \rho(u) du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{1}{2}u^2} du. \quad (42)$$

Veja que não é possível utilizar o Teorema Fundamental do Cálculo para resolver a integral acima. Nestas condições, utilizamos os métodos estudados neste capítulo para termos um valor aproximado para o valor da integral em (42).

Suponhamos que seja desejado calcular $\Pr(0 \leq X \leq 1)$, logo, deve-se resolver a integral $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 e^{-\frac{1}{2}u^2} du$. Como $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ é uma constante, focaremos no problema de se calcular $\int_0^1 e^{-\frac{1}{2}u^2} du$.

Para utilizar os principais métodos aqui apresentados, é necessário um estudo prévio acerca da função envolvida, por este motivo estudaremos a função $\rho(u) = e^{-\frac{1}{2}u^2}$ para obtermos as informações necessárias e após isto faremos as aproximações segundo os dispositivos já vistos.

Como já apresentado, para aplicar os resultados deste capítulo, devemos conhecer os pontos de máximo das derivadas segunda e quarta da função $\rho(u)$. Deste modo, explicitaremos aqui os cálculos necessários.

Primeiramente calcularemos as derivadas até a ordem 5. Evidentemente é possível realizar tais cálculos já que a função exponencial não possui restrições quanto à derivação, e conseqüentemente, todos os métodos de aproximação de integrais aqui vistos poderão ser aplicados.

$$\rho'(u) = -ue^{-\frac{u^2}{2}}$$

$$\begin{aligned}\rho''(u) &= e^{-\frac{u^2}{2}}(u^2 - 1) \\ \rho'''(u) &= e^{-\frac{u^2}{2}}(3u - u^3) \\ \rho^{(4)}(u) &= e^{-\frac{u^2}{2}}(u^4 - 6u^2 + 3) \\ \rho^{(5)}(u) &= e^{-\frac{u^2}{2}}(-u^5 + 10u^3 - 15u)\end{aligned}$$

Nos métodos de aproximação trapezoidal e pelo ponto médio é necessário o máximo do conjunto $J = \{|\rho''(u)|; u \in [0, 1]\}$. Veja que a procura do máximo valor de ρ'' , nos remete a calcular o valor de ρ'' nos extremos do intervalo e analisar os pontos onde ρ''' é igual a zero ou não está definida. Mas como esta é definida em toda a reta real, observamos que:

$$\begin{aligned}\rho'''(u) = 0 &\iff e^{-\frac{u^2}{2}}(3u - u^3) = 0 \\ &\iff (3u - u^3) = 0, \text{ pois } e^{-\frac{u^2}{2}} \neq 0, \forall u \in \mathbb{R} \\ &\iff u(u^2 - 3) = 0 \\ &\iff u = 0 \text{ ou } u = \pm\sqrt{3}\end{aligned}$$

Notando que $\pm\sqrt{3} \notin [0, 1]$, temos os seguintes valores: $\rho''(0) = -1$ e $\rho''(1) = 0$, e portanto, $|\rho''(u)| \leq |\rho''(0)| = 1$, para $u \in [0, 1]$.

No método de Simpson deve-se encontrar o máximo para o conjunto $K = \{|\rho^{(4)}(u)|; u \in [0, 1]\}$, e para isso, de modo análogo ao feito anteriormente, calcularemos $\rho^{(4)}$ nos extremos do intervalo considerado e analisaremos os pontos onde $\rho^{(5)}$ é igual a zero ou não está definida. Vendo que $\rho^{(5)}$ está definida em toda reta real, temos:

$$\begin{aligned}\rho^{(5)}(u) = 0 &\iff e^{-\frac{u^2}{2}}(-u^5 + 10u^3 - 15u) = 0 \\ &\iff -u^5 + 10u^3 - 15u = 0, \text{ pois } e^{-\frac{u^2}{2}} \neq 0, \forall u \in \mathbb{R} \\ &\iff (-u)(u^4 - 10u^2 + 15) = 0 \\ &\iff u = 0 \text{ ou } u = \sqrt{5 \pm \sqrt{10}}\end{aligned}$$

Tendo em vista que $\sqrt{5 \pm \sqrt{10}} \notin [0, 1]$ resta vermos que $\rho^{(4)}(0) = 3$ e $\rho^{(4)}(1) \approx -1,2130613194$. Logo, temos que $|\rho^{(4)}(u)| \leq |\rho^{(4)}(0)| = 3$, para $u \in [0, 1]$.

Posto isto, podemos ir às aproximações.

Agora, pode-se suceder a aproximação em duas formas: pode-se definir um número $n \in \mathbb{N}$ para que os cálculos sejam realizados a partir deste, ou ainda, pode-se escolher um certo erro para a aproximação e obter n que satisfaça tal estimativa desejada.

Para que tenhamos uma análise comparativa entre os métodos já apresentados optaremos por prosseguir a partir de um certo erro definido, para que possamos então comparar a eficiência de cada processo a partir do número n necessário para satisfazer a necessidade imposta. Logicamente, só é possível incluir no comparativo o método de Simpson se a função puder ser derivada quatro vezes, mas como este é o caso do exemplo aqui tomado, continuemos a análise.

Por exemplo, caso seja desejado um erro menor que 10^{-5} , vejamos qual seria o n que satisfaria cada processo estudado.

Na aproximação trapezoidal, da desigualdade (13), temos:

$$\left| T_n(\rho) - \int_0^1 \rho(u) du \right| \leq \frac{(1-0)^3}{12n^2} |\rho''(0)| = \frac{1}{12n^2} \cdot 1 = \frac{1}{12n^2}$$

Mas como desejamos ter o erro menor que 10^{-5} , devemos ter:

$$\frac{1}{12n^2} < 10^{-5} \iff n > 91,2870929184$$

Logo, $n=92$ satisfaz tal estimativa.

Na aproximação pelo ponto médio, da desigualdade (14), podemos afirmar que

$$\left| \int_0^1 \rho(u) du - M_n(\rho) \right| \leq \frac{(1-0)^3}{24n^2} |f''(0)| = \frac{1}{24n^2} \cdot 1 = \frac{1}{24n^2}$$

Analisando qual n é necessário para termos o erro desejado, temos

$$\frac{1}{24n^2} < 10^{-5} \iff n > 64,5497224369$$

Portanto, $n = 65$ é suficiente.

Já na regra de Simpson, ao utilizarmos a desigualdade (15), temos que:

$$\left| S_n(\rho) - \int_0^1 \rho(u) du \right| \leq \frac{(1-0)^5}{180n^4} |\rho^{(4)}(0)| = \frac{1}{180n^4} \cdot 3 = \frac{1}{60n^4}$$

E para atender a necessidade do erro dado, é necessário que

$$\frac{1}{60n^4} < 10^{-5} \iff n > 6,38943104246$$

Como é necessário n par para aplicação deste método, temos que $n = 8$ é o suficiente para obter um erro menor que 10^{-5} .

Para que tomemos ciência de qual é este valor aproximado, utilizando a linguagem de programação Julia, foram calculadas tais aproximações, e os valores obtidos foram:

$$T_{92}(\rho) \approx 0,8556184201978315;$$

$$M_{65}(\rho) \approx 0,8556303735394275;$$

$$S_8(\rho) \approx 0,8556260464436526.$$

Portanto, concluímos que:

Pelo método da aproximação trapezoidal,

$$\Pr(0 \leq X \leq 1) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot T_{92}(\rho) \approx 0,3413423637071942.$$

Já pelo método da aproximação pelo ponto médio,

$$\Pr(0 \leq X \leq 1) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot M_{65}(\rho) \approx 0,34134713240054887.$$

E pelo método da aproximação de Simpson,

$$\Pr(0 \leq X \leq 1) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot S_8(\rho) \approx 0,3413454061390929.$$

Das aproximações acima temos que são plausíveis e que diferem apenas na quinta casa decimal após a vírgula, o que é esperado já que aproximamos a integral com um erro menor que 10^{-5} .

O resultado obtido a partir das aproximações é coerente, pois sabe-se que uma probabilidade é um número entre 0 e 1. Ainda podemos compreender que a área abaixo do gráfico de ρ no intervalo $[0, 1]$ representa aproximadamente 34,134% da área total abaixo do gráfico de ρ .

Referências

1. ANTON, H.; BIVENS, I.; DAVIS, S. *Cálculo*. 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2014.
2. ASANO, C. H.; COLLI, E. *Cálculo Numérico: Fundamentos e Aplicações*. Departamento de Matemática Aplicada, IME-USP, 2009.
3. BARTLE, R. G. *Elementos de Análise Real*. Rio de Janeiro: Editora Campus LTDA, 1983.
4. BARTLE, R. G.; SHERBERT, D. R. *Introduction to Real Analysis*. 4. ed. John Wiley & Sons, 2010.
5. BUSSAB, W. O.; MORRETIN, P. A. *Estatística Básica*. 4. ed. Atual Editora, 1987.
6. DEGROOT, M. H.; SCHERVISH, M. J. *Probability and statistics*. 4. ed., Pearson, 2011.
7. DE QUADROS, R.; DE BORTOLI, A. L. *Fundamentos de Cálculo Numérico para Engenheiros*, Porto Alegre, 2009.
8. JOHNSON, N. L.; KOTZ, S.; BALAKRISHNAN, N. *Continuous Univariate Distributions*. Vol. 1. 4. ed. 1994.
9. KUDRIÁVTSEV, L. D. *Curso de Análisis Matemático*. Vol 1. Editora MIR, 1984.
10. MOREIRA, C. N.; CABRAL, M. A. P. *Curso de Análise Real*. Departamento de Matemática Aplicada, IM-UFRJ, 2011.
11. RUDIN, W. *Principles of Mathematical Analysis*. 3. ed. McGraw-HILL International Book Company, 1976.
12. RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. da R. *Cálculo Numérico: Aspectos teóricos e computacionais*. 2. ed. São Paulo: Pearson, 1996.