Jornal Eletrônico de Ensino e Pesquisa de Matemática
(1s.) **v. 9** 1 (2025): 92–108. ©JEEPEMA–ISSN-2594-6323.
www.dma.uem.br/kit/jeepema

Poliônimos Geradores de Números Primos

Doherty Andrade – Email: dandrade@uem.br

Resumo: Nesta notas investigamos polinômios com coeficientes inteiros que geram números primos. Apresentamos as espirais de Ulam e de Sacks em que os números primos se apresentam seguindo certos padrões. Também apresentamos códigos em Python que nos ajudam e visualizar as espirais.
Palavras-chave: Polinômios; Números primos; Coeficentes.

1. Introdução

O interesse pelos números primos vem de longa data, Euclides de Alexandria (300 A.C.) talvez tenha sido o primeiro a apresentar uma demonstração para a existência de infinitos números primos. Historicamente, define-se número primo apenas para os números naturais. Podemos estender o conceito de número primo para abranger os números inteiros negativos definindo que $-n$ é primo se n for primo. Assim, -5 é um número inteiro primo.

Os números primos desempenham um papel importante dentro da Matemática. O Teorema Fundamental da Aritmética afirma que todo número natural maior do que 1 ou é primo ou é um produto de primos, evidenciando assim os números primos como blocos construtores dos números naturais e, portanto, dos números inteiros.

Com o surgimento do computador, o interesse pelos primos cresceu ainda mais. A possibilidade de realizar buscas computacionais por números primos cada vez maiores se tornou realidade, especialmente na criptografia. Além disso, conjecturas que antes pareciam inalcançáveis passaram a ser testadas de forma empírica. Embora testes computacionais não substituam demonstrações Matemática, eles oferecem intuição e fornecem contraexemplos valiosos.

A questão principal que muitos matemáticos tentam responder é como os números primos são gerados? Existe um padrão em que eles aparecem no conjunto dos números naturais? Qual é a forma geral de um número primo? Muitos matemáticos, desde a antiguidade, tentaram compreender o universo dos números primos e responder a essas perguntas. Elaborando teorias e fazendo conjecturas fomos avançando no conhecimento.

Neste contexto, surgem os polinômios com coeficientes inteiros que geram números primos. As fórmulas polinomiais com coeficientes inteiros que geram números primos estão dentro deste tema. É sobre alguns desses polinômios que vamos tratar nestas notas.

Legendre demonstrou que não existe uma função algébrica racional $R(n)$ que sempre produza números primos quando a entrada n é um número natural. Em 1752, Goldbach mostrou que nenhum polinômio $p(n)$ com coeficientes inteiros pode gerar sempre um primo quando os valores n são inteiros. Veja o teorema 4.1 na seção 4. Portanto, não esperamos encontrar um polinômio com essa propriedade, mas podemos procurar por um polinômio que possa gerar muitos números primos.

Assim o interesse ainda continua: determinar polinômios não contantes e com coeficientes inteiros que, para uma grande quantidade de números naturais n, tem-se $p(n)$ um número primo.

Existe um polinômio em 10 variáveis com coeficientes inteiros tal que o conjunto de primos é igual ao conjunto de valores positivos deste polinômio, obtido à medida que as variáveis assumem todos os valores inteiros não negativos. Embora esse resultado seja impressionante, trata-se, na verdade, de um conjunto de equações diofantinas disfarçadas. Veja (Ribenboim, 1991).

2. O exemplo de Euler

Entre os polinômios geradores de números primos, a mais conhecida dessas fórmulas polinomiais é a de Euler, veja (Euler, 1772) e (Ball; Coxeter, 1987):

$$f(n) = n^2 + n + 41.$$

De modo geral,

$$f(n) = n^2 + n + p,$$

onde p é um número primo.

Aos números primos p tais que a expressão acima gera primos para $n = 0, 1, ..., p-2$ foi denominada por Le Lionnais (Le Lionnais, 1983) de números da Sorte de Euler (onde o caso $p = 41$ corresponde à fórmula de Euler).

Rabinowitz (Rabinowitz, 1913) demonstrou que para um primo $p > 0$, o polinômio de Euler representa um primo para $n \in [0, p-2]$ (excluindo o caso trivial $p = 2$) .

O polinômio de Euler $p(n) = n^2 + n + 41$ que gera números primos para vários valores de números naturais n sucessivos. Na verdade, este polinômio gera números primos para os 40 primeiros números consecutivos, a saber, $n = 0, 1, 2, \ldots, 38, 39$, como mencio-

nado acima. Como $p(-n-1) = p(n)$, ele também gera primos para $n = -40, -39, \ldots, -2, -1$, mas esses primos são idênticos aos primos gerados anteriormente.

3. Outros exemplos

De tempos em tempos estudiosos apresentam polinômios com coeficientes inteiros que geram números primos, mas não geram todos os números primos obviamente. Um polinômio com essa propriedade, mesmo que gerando apenas alguns números primos, é importante porque nem todo polinômio tem essa propriedade. Por exemplo, $p(n) = 3n^2 - n + 2$ gera apenas números pares, ou seja, nunca gera primos (exceto obviamente quando $n = 0$ obtemos o primo 2). De fato, como $p(n) = 3n^2 - n + 2 = n(3n-1) + 2$, se 2 não divide n então $n = 2k + 1$ para algum k inteiro. Segue que $3n - 1 = 6k + 2$ e, portanto, $n(3n-1) + 2 = 2(2k+1)(3k+1) + 2$ que é par. O caso em que 2 divide n é mais imediato.

A situação é ainda pior. Por exemplo, sabe-se que o polinômio de Bouniakowsky dado por $P(x) = x^{12} + 488669$ gera pelo menos um número primo. Testes computacionais mostraram que não produz números primos até $x = 616980$:

$$\begin{aligned} P(616980) &= 304265726159978433637643344390889488213671181434701 \\ &\quad 7424896000000488669. \end{aligned}$$

é o primeiro número primo assumido pelo polinômio. Este valor foi determinando computacionalmente.

Também observou-se computacionalmente que todos os valores primos conhecidos e assumidos pelo polinômio terminam com os dígitos 00488669. Isso seria verdadeiro para todos os valores primos do polinômio?

Em 1837 (Dirichlet, 1837; Stephan, 2014), o matemático alemão P. G. L. Dirichlet (1805-1859) provou que uma progressão aritmética $a + bd$ de módulo d (uma função polinomial inteira de grau 1 em d, onde d, a e b são inteiros com $\gcd(a, d) = 1$), gera infinitos números primos.

Em 1857, vinte anos após o teorema de Dirichlet, a conjectura do matemático ucraniano Victor Y. Bunyakovsky (1804-1889), mencionada em (Bunyakovsky, 1857), já era uma tentativa de generalizar este teorema para funções polinomiais inteiras de grau $m > 1$. Esta conjectura afirma que, sob três condições mencionadas a seguir, uma função polinomial de grau $m > 1$ gera infinitos números primos. Até o ano de 2024 esta conjectura não foi refutada.

A conjectura de Bunyakovsky afirma que, sob três condições mencionadas a seguir,

uma função polinomial inteira de grau $m > 1$ gera infinitos números primos. As três condições surgem do fato de que o polinômio considerado deve ser, além disso, irreduzível, sendo esta palavra tomada no sentido dado por Bunyakovsky em seu artigo:

- O coeficiente líder deve ser positivo;
- Os coeficientes do polinômio devem verificar MDC(coeficientes) $= 1$;
- O polinômio deve ser irreduzível, isto é, não divisível por qualquer outro polinômio de grau d com $0 \leq d < m$.

A conjectura sugere que, por exemplo, um polinômio como $x^2 + 1$ (que é irredutível sobre os inteiros e cujos coeficientes são coprimos) deve gerar infinitos números primos. Do mesmo modo, o polinômio de Euler $f(n) = n^2 + n + 41$ gera infinitos números primos. .

Até o momento, a conjectura de Bouniakowsky permanece não provada, assim como muitas outras conjecturas sobre a distribuição de números primos. No entanto, é apoiada por uma grande quantidade de evidências empíricas. A importância da conjectura de Bouniakowsky reside na sua generalização e na sua capacidade de abranger muitos casos especiais conhecidos na teoria dos números. Uma prova desta conjectura implicaria um grande avanço na compreensão da distribuição de números primos em polinômios e teria consequências significativas para outras conjecturas e teoremas na teoria dos números.

Em 2020 R. Deloin, (Deloin, 2020), utilizando uma nova abordagem relaciona a conjectura de Bunyakovsky com uma teoria geral das progressões aritméticas, apresentou uma prova da conjectura de Bunyakovsky, mas a comunidade matemática ainda tem algumas restrições à demonstração apresentada.

Ainda sobre os polinômio de Euler do tipo $f(n) = n^2 + n + p$, onde p é um número primo, vimos acima que ele assume valores primos para todos n no conjunto {0, 1, 2, ..., p-2}. Os únicos valores de p para os quais o polinômio $f(n) = n^2 + n + p$ assume valores primos para todos $n \in \{0, 1, 2, \ldots, p-2\}$ são os seguintes: {2, 3, 5, 11, 17, 41}.

Note que, para cada um desses polinômios, a lista de valores consecutivos de n para os quais ele assume valores primos não pode ser estendida além de $n = p - 2$, pois $n^2 + n + p$ é composto para $n = p - 1$ (e para $n = p$ também).

De fato, se $n = p - 1$, então obtemos $f(p) = p^2 + 1$. Se $p = 2$ ou 3 tem-se um número composto. Se $p > 3$ é primo, então p pode ser escrito de uma das formas

$$6k, 6k + 1, 6k + 2, 6k + 3, 6k + 4, 6k + 5$$

e entre esses, apenas os que estão na forma $6k \pm 1$ podem ser primos.

Vamos analisar $p = 6k + 1$ e $p = 6k - 1$:

Se $p = 6k + 1$:

$$p^2 = (6k + 1)^2 = 36k^2 + 12k + 1$$

Portanto,

$$p^2 + 1 = 36k^2 + 12k + 1 + 1 = 36k^2 + 12k + 2 = 2(18k^2 + 6k + 1)$$

Isto é claramente divisível por 2, portanto, é composto.
Se $p = 6k - 1$:

$$p^2 = (6k - 1)^2 = 36k^2 - 12k + 1$$

Portanto,

$$p^2 + 1 = 36k^2 - 12k + 1 + 1 = 36k^2 - 12k + 2 = 2(18k^2 - 6k + 1)$$

Isto também é claramente divisível por 2, portanto, é composto.

Assim, para qualquer número primo $p > 3$, $p^2 + 1$ será sempre um número composto.

Também Legendre apresentou o polinômio $p(n) = n^2 + n + 17$ que é primo para todos $n \in \{0, 1, 2, \ldots, 14, 15\}$ e o polinômio $p(n) = 2n^2 + 29$ que é primo para $n \in \{0, 1, 2, \ldots, 27, 28\}$.

Vejamos alguns exemplos de outros polinômios.

O exemplo de Fung e Ruby:

$$p(n) = 47n^2 - 1701n + 10181$$

assume valores primos para $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 29, 28, \ldots, 42\}$.

Também o polinômio

$$p(n) = 36n^2 - 810n + 2753$$

assume valores primos para $n \in \{01, 2, 3, 4, 19, 20, \ldots, 44\}$.

O polinômio cúbico dado por S. M. Ruiz

$$p(n) = 3n^3 - 183n^2 + 3318n - 18757$$

assume valores primos para $n \in \{0, 1, 2, \ldots, 46\}$.

Outro polinômio cúbico interessante

$$P(n) = n^3 + n^2 + 17$$

assume muitos valores primos para valores consecutivos de $n = 0, \ldots, 10$.

Como observado acima, Legendre apresentou o polinômio $f(n) = n^2 + n + 17$ que é primo para todos $n \in \{0, 1, 2, \ldots, 14, 15\}$. Polinômios que se assemelham a este incluem:

- $f(n = n^2 + 3n + 19$: primo para $n \in \{0, 1, 2, \ldots, 13, 14\}$;
- $f(n) = n^2 + 5n + 23$: primo para $n \in \{0, 1, 2, \ldots, 12, 13\}$;
- $f(n) = n^2 + 7n + 29$: primo para $n \in \{0, 1, 2, \ldots, 11, 12\}$.

Legendre também apresentou o polinômio $f(n) = 2n^2 + 29$ que é primo para $n \in \{0, 1, 2, \ldots, 27, 28\}$. Polinômios semelhantes incluem:

- $f(n) = 8n^2 + 29$: primo para $n \in \{0, 1, 2, \ldots, 13, 14\}$;
- $f(n) = 10n^2 + 13$: primo para $n \in \{0, 1, 2, \ldots, 11, 12\}$;
- $f(n) = 10n^2 + 7$: primo para $n \in \{0, 1, 2, \ldots, 5, 6\}$;
- $f(n) = 10n^2 + 19$: primo para $n \in \{0, 1, 2, \ldots, 17, 18\}$;
- $f(n) = 12n^2 + 59$: primo para $n \in \{0, 1, 2, \ldots, 13, 14\}$.

Aqui estão alguns polinômios que se assemelham ao polinômio de Euler $n^2 + n + 41$, mas diferem no coeficiente de n:

- $n^2 + 3n + 43$: primo para $n \in \{0, 1, 2, \ldots, 37, 38\}$;
- $n^2 + 5n + 47$: primo para $n \in \{0, 1, 2, \ldots, 36, 37\}$;
- $n^2 + 7n + 53$: primo para $n \in \{0, 1, 2, \ldots, 35, 36\}$.

Cada um desses polinômios gera valores primos por um longo conjunto de valores consecutivos de n.

Aqui está um exemplo dado por Fung e Ruby:

$$f(n) = 36n^2 - 810n + 2753.$$

Ele assume valores primos para $n \in \{0, 1, 2, \ldots, 43, 44\}$. Polinômios semelhantes incluem:

- $f(n) = 36n^2 - 828n + 4363$: primo para $n \in \{0, 1, 2, \ldots, 24, 25\}$;
- $f(n) = 36n^2 - 960n + 7993$: primo para $n \in \{0, 1, 2, \ldots, 14, 15\}$.

Semelhante ao acima está aqui outro exemplo de Fung e Ruby:

$$f(n) = 47n^2 - 1701n + 10181.$$

Ele assume valores primos para $n \in \{0, 1, 2, \ldots, 41, 42\}$. Polinômios semelhantes incluem:

- $f(n) = 47n^2 - 1591n + 9631$: primo para $n \in \{0, 1, 2, \ldots, 10, 11\}$;
- $f(n) = 47n^2 - 371n + 8761$: primo para $n \in \{0, 1, 2, \ldots, 9, 10\}$;
- $f(n) = 47n^2 - 901n + 9151$: primo para $n \in \{0, 1, 2, \ldots, 7, 8\}$;
- $f(n) = 67n^2 - 1261n + 9491$: primo para $n \in \{0, 1, 2, \ldots, 7, 8\}$;
- $f(n) = 67n^2 - 561n + 9241$: primo para $n \in \{0, 1, 2, \ldots, 11, 12\}$.

Por fim, temos este polinômio cúbico dado por S. M. Ruiz:

$$p(n) = 3n^3 - 183n^2 + 3318n - 18757.$$

Ele assume valores primos para $n \in \{0, 1, 2, \ldots, 41, 42\}$. Polinômios semelhantes incluem:

- $f(n) = 3n^3 - 183n^2 + 3138n - 13487$: primo para $n \in \{0, 1, 2, \ldots, 6, 7\}$;
- $f(n) = 3n^3 - 183n^2 + 2148n - 15277$: primo para $n \in \{0, 1, 2, \ldots, 8, 9\}$.

Dessa forma, podemos explorar variações em polinômios geradores de primos que geram valores primos por longos períodos de valores consecutivos do argumento. Os leitores podem encontrar mais exemplos desse tipo.

Um polinômio interessante é:

$$Q(n) = n^2 - 2999n + 2248541,$$

que produz 80 primos de $n = 1460$ a $n = 1539$, como exemplo.

Analisando atentamente o polinômio $Q(n)$, realizando algumas manipulações algébricas, obtem-se que

$$Q(n) = (-n + 1499)^2 - (-n + 1499) + 41$$

ou seja, $Q(n) = f(-n + 1499)$, onde f é o polinômio de Euler.

Os 80 primos produzidos por $Q(n)$ são, portanto, os mesmos 40 primos distintos do Polinômio de Euler, obtidos de $n = 1$ a $n = 40$. Como funções polinomiais de grau 2 têm um eixo vertical de simetria no vértice, cada valor aparece duas vezes.

O polinômio com coeficientes racionais a seguir, fugindo um pouco dos polinômios com coeficientes inteiros,

$$\frac{1}{4}nx^5 - \frac{133}{4}n^4 + \frac{6729}{4}n^3 - \frac{158379}{4}n^2 + \frac{860147}{2}n - 1705829$$

gera números primos para n entre 0 e 56.

4. A demonstração

Voltando à pergunta: existe um polinômio $p(n)$ não constante com coeficientes inteiros que gera para cada número inteiro n um número primo? A resposta é não e vamos ver porque.

Teorema 4.1 *Não existe polinômio $p(n)$ de uma variável com coeficientes inteiros e não constante que assuma apenas valores primos para valores de n inteiros.*

A condição "não constante"é necessária para evitar casos triviais. Por exemplo, suponha que $p(n) = 3$ para todos os inteiros positivos n (ou seja, é uma função constante); isso claramente assume apenas valores primos!

Para provar o teorema acima, precisamos dos dois lemas dados abaixo.

Lema 4.2 *Se $f(x)$ é um polinômio com coeficientes inteiros, então $(a - b)$ é um divisor de $f(a) - f(b)$ para quaisquer dois inteiros distintos a e b.*

Para ver por que isso é verdade, observe primeiro que $a - b$ é um divisor de $a^k - b^k$ para qualquer inteiro positivo k. Em seguida, observe que se

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

onde $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ são inteiros, então

$$f(a) - f(b) = a_n(a^n - b^n) + a_{n-1}(a^{n-1} - b^{n-1}) + \cdots + a_1(a - b).$$

Como $a - b$ é um divisor de cada termo entre parênteses à direita, segue que $a - b$ é um divisor de $f(a) - f(b)$.

Lema 4.3 *Se $f(x)$ é um polinômio com coeficiente líder positivo, então para N for suficientemente grande, $f(x)$ será positivo e estritamente crescente para todo $x > N$.*

Vamos apresentar apenas um esboço da prova deste lema. Seja

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

onde $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ são inteiros com $a_n > 0$. Podemos reescrever o polinômio na forma

$$f(x) = x^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right),$$

de onde concluímos que para x suficientemente grande $f(x)$ é positivo.

Do mesmo modo, como $f'(x)$ tem coeficiente lider positivo, existe N natural suficientemente grande tal que $f'(x) > 0, \forall x > N$. Segue que f é crescente e positiva, para todo $x > N$.

Agora voltamos à demonstração do teorema.

Demonstração: A seguir a demonstração da afirmação principal, teorema 4.1. Seja $f(x)$ um polinômio não constante com coeficientes inteiros, sem perda de generalidade podemos supor que tenha coeficiente líder positivo. Para mostrar que $f(x)$ não pode assumir apenas valores primos quando x é natural, só precisamos exibir um único valor composto que f assume. Vamos exibir tal valor.

Suponha que para o natural N tem-se que para $x \geq N$, $f(x)$ seja crescente e $f(x) > 1$. Seja $f(N) = q$. Como N é natural e os coeficientes são inteiros, segue que q é um inteiro. Então $q > 1$. Agora considere o número

$$f(N + q) - f(N).$$

Invocando o Lema 1, inferimos que $f(N + q) - f(N) = f(N + q) - q$ é divisível por q. Como $f(N) = q$, isso implica que $f(N + q)$ também é divisível por q. Além disso, $f(N + q) > q$, pois $f(N + q) > f(N)$. Isso implica que $f(N + q)$ é composto. Assim, conseguimos exibir um valor composto assumido por f.

Isso conclui a demonstração.

■

Uma consequência imediata é o seguinte resultado.

Corolário 4.4 *Se um polinômio com coeficientes inteiros de grau $m \geq 1$ gera infinitos números primos, então ele não gera todos os números primos.*

5. Espirais de Números primos

Vamos apresentar agora dois tipos de espirais que são muito utilizadas para o estudo dos números primos. São as espirais de Ulam e a espiral de Sacks.

A Espiral de Ulam é uma forma de representar os números primos em uma espiral, onde cada número inteiro é colocado em uma célula de uma grade que se expande em uma espiral a partir do centro. A ideia foi proposta pelo matemático polonês Stanisław Ulam em 1963. Veja a figura abaixo obtida do calendário da AMS de 1964.

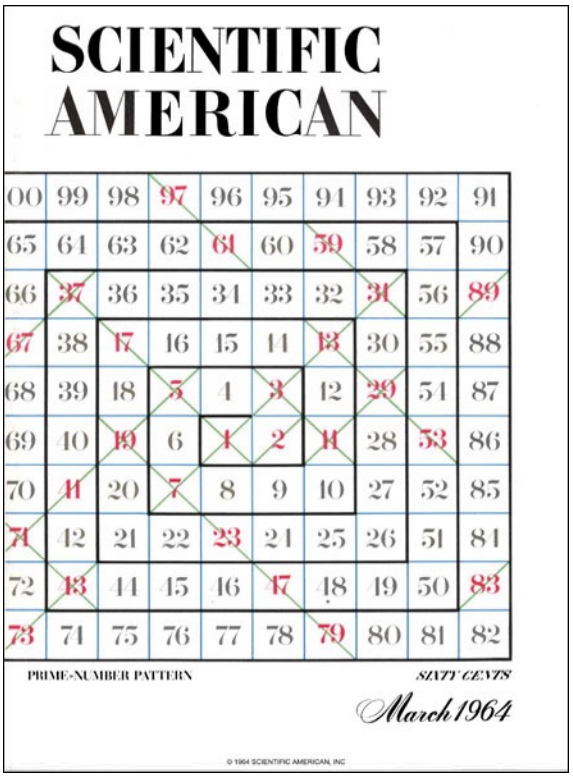

Figura 1: Espiral de Ulam com números primos destacados em vermelho.

Esta visualização pode sugerir que os números primos tendem a se agrupar em certas diagonais, embora a razão exata para isso ainda não seja completamente compreendida. A espiral também ajuda a observar a distribuição aparentemente aleatória dos números primos. Outros tipos de arranjos com os números, como o triângulo de Klauber, espiral de Sacks e a espiral hexagonal também guardam essa propriedade.

As linhas diagonais, horizontais e verticais na espiral numérica de Ulam correspondem a polinômios da forma $f(n) = 4n^2 + bn + c$ onde b e c são constantes inteiras. Quando b é par, as linhas são diagonais, e todos os números são ímpares, ou todos são pares, dependendo do valor de c.

Abaixo a espiral de Ulam contendo mais números. Observe que muitos primos estão alinhados.

Figura 2: Espiral de Ulam com números primos destacados em amarelo e os compostos em cinza.

Em (Bode, 2018) o trabalho intitulado ”Quadratic Polynomials With High Asymptotic Prime Density in The Ulam Spiral”de Steven Bode, o autor analisa as diagonais da espiral de Ulam com alta densidade assintótica de números primos, utilizando polinômios quadráticos para descrever essas diagonais e determinar a frequência dos números primos gerados por tais polinômios.

A espiral de Sacks (Sacks, 1964) é uma representação gráfica dos números inteiros no plano cartesiano, que revela padrões interessantes relacionados à distribuição dos números primos. Ela foi proposta por Robert Sacks em 1964 e é um exemplo marcante de como conceitos matemáticos abstratos podem ser visualizados geometricamente.

Na espiral de Sacks cada número inteiro n é mapeado a posição polar (r, θ) no plano,

com as seguintes relações:

$$r = \sqrt{n}, \tag{1}$$
$$\theta = 2\pi\sqrt{n}, \tag{2}$$

onde r é a distância do ponto ao centro da espiral, e θ é o ângulo correspondente em radianos.

Este esquema de parametrização assegura que os pontos formem uma espiral equilínea, pois r cresce com a raiz quadrada de n e θ é proporcional a $\sqrt{n}$.

Na figura a seguir, veja 3, apresentamos uma espiral de Sacks em que os números primos são marcados em azul, os números primos que são da forma $p = n^2 - n + 41$ (Euler) são marcados em vermelho e os números primos que são da forma $p = n^2 + n + 17$ (Legendre) são marcados em verde.

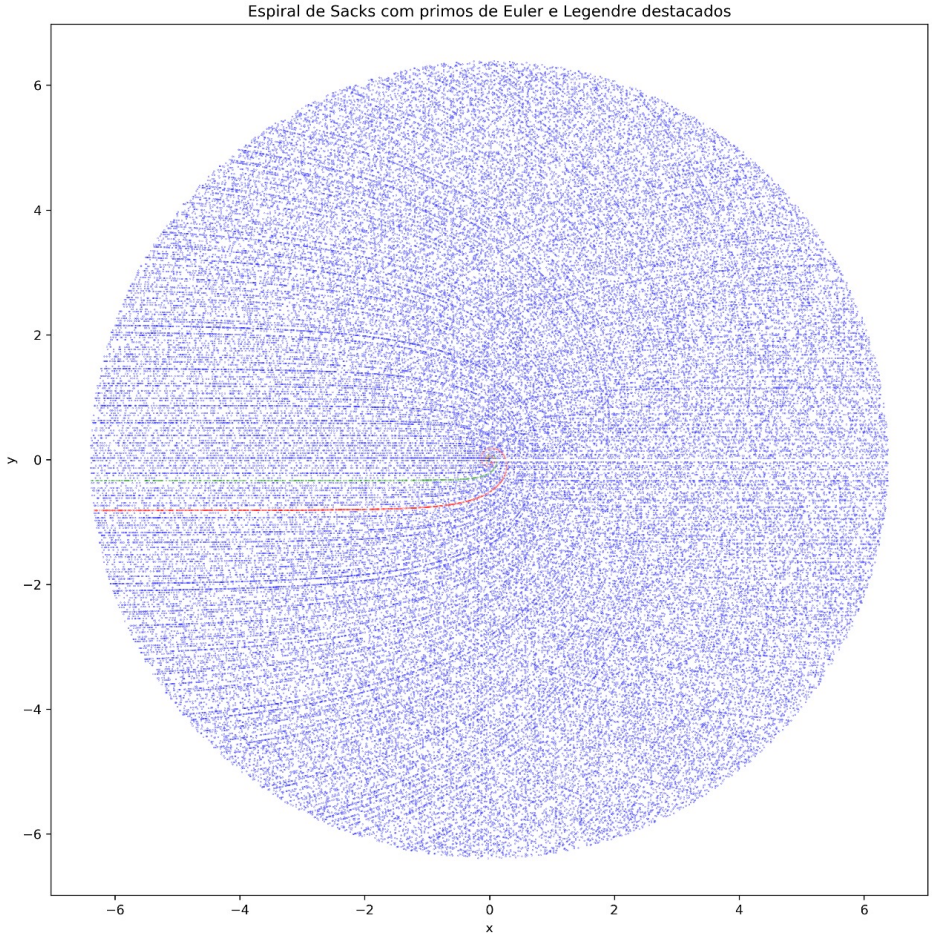

Figura 3: Espiral de Sacks.

6. Código Python

O código Python a seguir, ilustra a busca por números primos gerados pelo polinômio de Fung e Ruby dado por $p(x) = 47x^2 - 1701x + 10181$. Você pode modificar o valor *limit* para buscar números maiores. Ao final o código imprime uma tabela indicando se o número $p(n)$ é primo ou não e apresenta o total de números primos e não primos encontrados.

Você pode utilizar o mesmo código para pesquisar com um polinômio diferente, bastando para isso fazer as adaptações necessárias ao código.

Os resultados apresentados neste texto foram obtidos por meio deste código Python.

```
import math
import pandas as pd
from tabulate import tabulate

# Funcao que verifica se o numero eh primo
def is_prime(num):
# Use valor absoluto para checar se o numero eh primo
    num = abs(num)
    if num <= 1:
        return False
    if num == 2:
        return True
    if num % 2 == 0:
        return False
    max_divisor = int(math.sqrt(num)) + 1
    for d in range(3, max_divisor, 2):
        if num % d == 0:
            return False
    return True

# Polinomio de Fung e Ruby
def fung_polynomial(n):
    return 47 * n**2 - 1701 * n + 10181

# Funcao que gera os primos
def generate_table(limit):
    data = []
    prime_count = 0
    non_prime_count = 0

    for n in range(limit + 1):
        p = fung_polynomial(n)
```

```
        prime_status = is_prime(p)
        if prime_status:
            prime_count += 1
        else:
            non_prime_count += 1
        data.append({"n": n, "p(n)": p, "is_prime": prime_status})

    # Cria a tabela
    df = pd.DataFrame(data)

    # Cria a linha se primo ou nao primo
    total_row = pd.DataFrame([{"n": "Total", "p(n)": "", "is_prime": f"
       Primes: {prime_count}, Non-Primes: {non_prime_count}"}])

    # Concatena em um  DataFrame
    df = pd.concat([df, total_row], ignore_index=True)

    return df

# Exemplo de uso
if __name__ == "__main__":
    limit = 43  # Mude se quiser valores maiores de n
    table = generate_table(limit)
    print(f"Tabela de valores gerados pelo polinomio de  Fung e Ruby ate n
       ={limit}:")
    print(tabulate(table, headers='keys', tablefmt='pretty'))
```

A seguir disponibilizamos o código em Python para Jupyter Notebook usado na produção da espiral de Sacks.

```
# Espiral de Sacks com os primos de Euler e de Legendre
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from sympy import isprime

# Definindo o numero de pontos
n = 1000000

# Definindo o tamanho da espiral
sz = 8
insize = sz * 0.8

# Escala para ajustar a espiral ao tamanho desejado
basescale = (insize) / (np.sqrt(n) + 1)
```

```
# Lista fixa com os numeros da forma n^2 - n + 41 (primos de Euler)
euler_primos = [n**2 - n + 41 for n in range(1, int(np.sqrt(n)) + 2) if
    isprime(n**2 - n + 41)]

# Lista fixa com os numeros da forma n^2 + n + 17 (primos de Legendre)
legendre_primos = [n**2 + n + 17 for n in range(1, int(np.sqrt(n)) + 2) if
     isprime(n**2 + n + 17)]

# Listas para coordenadas, tamanhos dos pontos e cores
x_coords = []
y_coords = []
tamanhos = []
cores = []

# Gerando a espiral
for j in range(n):
    i = j + 2  # Comeca do numero 2
    r = np.sqrt(i)
    theta = r * 2 * np.pi
    x = np.cos(theta) * r * basescale
    y = np.sin(theta) * r * basescale

    # Verifica se o numero  eh primo
    if isprime(i):
        tamanho = basescale * 10  # Tamanho padrao para numeros primos
        x_coords.append(x)
        y_coords.append(y)
        tamanhos.append(tamanho)

        # Verifica se eh um primo de Euler
        if i in euler_primos:
            cores.append('red')  # Primos de Euler em vermelho
        # Verifica se eh um primo de Legendre
        elif i in legendre_primos:
            cores.append('green')  # Primos de Legendre em verde
        else:
            cores.append('blue')  # Outros primos em azul

# Plotando a espiral
plt.figure(figsize=(12, 12))
plt.scatter(x_coords, y_coords, s=tamanhos, c=cores, alpha=0.6)
plt.title("Espiral de Sacks com primos de Euler e Legendre destacados")
plt.axis('equal')
```

```
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.grid(False)
plt.show()
```

7. Conclusão

O objetivo destas notas foi apresentar ao leitor interessado em números primos um enfoque por meio dos polinômios. Demonstramos que, embora não exista um polinômio capaz de gerar todos os números primos, a exploração de polinômios que produzem números primos para valores sucessivos de n continua sendo uma área fascinante e com potencial de pesquisa.

Durante nossa análise, vimos que existem polinômios que, sob certas condições, geram números primos com uma frequência considerável. Esses exemplos servem não apenas como curiosidades matemáticas, mas também como ferramentas para entender melhor a distribuição dos números primos e as propriedades dos polinômios. A investigação desses polinômios pode levar a novas descobertas e insights, tanto na teoria dos números quanto em outras áreas da matemática.

A pesquisa contínua nesse campo pode também ter implicações práticas, como na criptografia, onde a geração de números primos grandes e imprevisíveis é crucial. Portanto, incentivar o estudo de polinômios que produzem números primos é de grande importância tanto teórica quanto prática.

Espero ter motivado o leitor a investigar outros polinômios com as propriedades apresentadas aqui, incentivando a busca por novos métodos e estratégias na geração de números primos. Que esta exploração inspire futuras pesquisas e avanços no campo da matemática, revelando ainda mais os mistérios dos números primos e suas fascinantes propriedades.

Referências

1 RIBENBOIM, Paulo. **The Book of Prime Number Records**. New York: Springer-Verlag, 1991.

2 EULER, Leonhard. Nova observatio circa series infinitas. **Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae**, v. 17, p. 1744–1774, 1772.

3 BALL, W. W. R.; COXETER, H. S. M. **Mathematical Recreations and Essays**. 13. ed. [*S. l.*]: Dover Publications, 1987.

4 LE LIONNAIS, François. **Les nombres remarquables**. Paris: Hermann, 1983.

5 RABINOWITZ, G. On primes of the form $n^2 + n + p$. **Transactions of the American Mathematical Society**, v. 14, p. 1–16, 1913.

6 DIRICHLET, P. G. L. Beweis des Satzes, dass jede unbegrenzte arithmetische Progression, deren erstes Glied und Differenz ganze Zahlen ohne gemeinschaftlichen Factor sind, unendlich viele Primzahlen enthält. **Abhandlungen der Königlichen Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin**, v. 8, p. 45–81, 1837. Disponível em: https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k99435r/f326.

7 STEPHAN, R. **There are infinitely many prime numbers in all arithmetic progressions with first term and difference coprime (English translation of Dirichlet's 1837 publication)**. [*S. l.: s. n.*], 2014. Disponível em: https://arxiv.org/pdf/0808.1408.pdf.

8 BUNYAKOVSKY, V. Y. Sur les diviseurs numériques invariables des fonctions rationnelles entières. **Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de Saint-Pétersbourg**, VIII (Première partie Tome VI), p. 305–329, 1857. Disponível em: https://books.google.fr/books?hl=fr&id=wXIhAQAAMAAJ&pg=PA305.

9 DELOIN, Robert. Proof of Bunyakovsky's conjecture. **Theoretical Mathematics & Applications**, Scientific Press International Limited, v. 10, n. 3, p. 77–81, 2020. ISSN 1792-9687.

10 BODE, Steven. **Quadratic Polynomials With High Asymptotic Prime Density in The Ulam Spiral**. [*S. l.: s. n.*], 2018. Senior Seminar Thesis, University of Minnesota, Morris.

11 SACKS, Robert. Spirals of Integers. **Scientific American**, 1964.