J Jornal Eletrônico de Ensino e Pesquisa de Matemática
(1s.) **v. 1**, 2 (2017): 46–65. ©Jeepema – ISSN 2594-6323
www.dma.uem.br/kit/jeepema

# Construção da definição geométrica de logaritmos com o uso do GeoGebra

Luciano Xavier de Azevedo e Luciene Parron Gimenes Arantes(DMA-UEM)

Resumo: O objetivo deste trabalho é apresentar uma sequência didática significativa para o ensino de logaritmos aliada ao uso do GeoGebra 4.2, favorecendo a formação da ideia geométrica de logaritmo. Os logaritmos tiveram seu apogeu quando revelou-se um método que permitisse efetuar multiplicações, divisões, potenciações e extrações de raízes com certa presteza, mas hoje, com o uso das calculadoras, eles perderam esta utilidade. O desenvolvimento da matemática e da ciência, de modo geral, têm nos revelado a existência de relações estreitas entre os diversos fenômenos químicos, físicos, biológicos, econômicos e os logaritmos. Para mais detalhes, veja nossa referência básica [1].

**Palavras-chave:** Logaritmo. Geogebra. *

## Sumário



* Publicado em 14-12-2017.

## 1. O surgimento dos logaritmos

Hoje, com os recursos tecnológicos que temos, nos parece estranho imaginar que realizar operações de multiplicação, divisão, potenciação e radiciação tenha sido algo extremamente difícil. Esse avanço ocorreu no final do século XVI, na Europa, quando o desenvolvimento da astronomia e da navegação exigiram cálculos aritméticos muito complexos para os padrões da época. Naquele período desenvolver um método que oferecesse mais agilidade nessas operações era essencial. O avanço da Matemática se deu principalmente em função do crescimento político, econômico e social da época. Vários estudiosos se empenharam em facilitar esses cálculos, e com resultados satisfatórios, e se destacaram alguns deles, John Napier(1550 - 1617) e Jost Burgi (1552 - 1632) que, independentemente, publicaram tabelas que ficaram conhecidas como tábuas de logaritmos.

John Napier era um rico lorde escocês. Era teólogo e escreveu um livro para provar que o papa de sua época era o Anti-Cristo, baseado no Apocalipse de São João. Ele estudava matemática por lazer e dedicou anos as suas tábuas de logaritmos e em 1614 sentiu-se encorajado a publicá-las, intitulando-as de “Mirifi Logarithmorum Canonis Descriptio". A palavra *logaritmo* foi inventada por Napier a partir das palavras gregas *logos* que significa razão e *aritmos* signifca número, mas o símbolo log, abreviação de *logarithm*, é atribuída ao astrônomo Kepler.

O método de Napier se baseou na associação dos termos da progressão geométrica, $a^1$, $a^2$, $a^3$, $a^4$, ... , $a^n$, ... , aos termos da progressão aritmética 1, 2, 3, 4, ... , $n$, ... .

Henry Briggs (1561 - 1631), era professor de matemática e tomou conhecimento das tábuas de logaritmos de Napier. Henry em visita a Napier, no castelo de Merchiston, em Edinburgo na Escócia, discutiram sobre a utilidade de se construir uma tábua de base 10. Essa nova tábua foi publicada por Briggs após a morte de Napier. Uma tábua de logaritmos consiste, essencialmente, de duas colunas, onde cada número da coluna da esquerda corresponde a um número a direita, na mesma linha, que foi denominado seu logaritmo. É interessante que com essa tábua podemos multiplicar dois números utilizando-se apenas da soma de outros dois. Basta somarmos seus logaritmos e, com o resultado, procurarmos na coluna da esquerda o valor lá indicado, esse é o valor procurado. A construção inicial da possibilidade de se fazer reduções de uma multiplicação em uma adição ocorreu mediante a comparação dos termos de uma progressão aritmética com os termos de uma progressão geométrica. Observemos, por exemplo, na tabela abaixo, uma progressão geométrica de razão 2 e uma progressão aritmética de razão 2.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 128 | 256 | 512 | 1024 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |

Para obtermos o resultado da multiplicação de 8 por 64, basta somarmos 3 e 6, correspondentes a eles na progressão aritmética, então teremos 512 que corresponde a 9. Neste caso, o fato desta tábua permitir calcular, somente, produtos da forma $2^n$, com $n$ inteiro positivo, a torna insuficiente para muitos cálculos. Mesmo que troquemos a base 2 por outra, com número inteiro positivo arbitrário, ainda seria insuficiente.

## 2. Definição de logaritmo

**Definição 2.1.** *Dado um número real* $a > 0$ *e* $a \neq 1$ *chamamos logaritmo de um número* $b > 0$ *na base* $a$*, o número* $y$ *tal que*

$$a^y = b.$$

*O número* $a$ *é chamado de* base *do logaritmo,* $b$ *é o* logaritmando *e* $y$ *o* logaritmo. *Escrevemos,*

$$y = \log_a b.$$

A seguir, apontamos as propriedades operatórias de logaritmos, assumindo que $a, b, c > 0$ e $a \neq 1$. A primeira propriedade é conhecida como propriedade fundamental dos logaritmos.

**Teorema 2.2.** *Sejam* $a, b, c$ *números reais positivos e* $a \neq 1$*. Então, as seguintes propriedades valem:*

$(P_1)$ $\log_a(b.c) = \log_a b + \log_a c;$

$(P_2)$ $\log_a \left(\dfrac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c;$

$(P_3)$ $\log_a(b^n) = n \log_a b.$

**Demonstração:** Demonstraremos a propriedade $(P_1)$. Sejam $\log_a b = x$ e $\log_a c = y$. Então, $a^x = b$ e $a^y = c$. Assim, $bc = a^x \cdot a^y = a^{x+y}$. Logo, $\log_a b.c = \log_a a^{x+y} = x + y$, como queríamos demonstrar. De forma análoga, mostra-se as demais propriedades. □

**Exemplo 2.3.** Sejam $x$, $y$ e $z$ números reais positivos cujos logaritmos numa dada base $k$ são números primos positivos satisfazendo

$$\log_k(x.y) = 49 \qquad \text{e} \qquad \log_k\left(\frac{x}{z}\right) = 44.$$

Então, $\log_k(xyz)$ é divisível por 13.

Pela propriedade $(P_1)$ do Teorema 2.2, temos

$$\log_k x + \log_k y = 49.$$

Então, existem duas possibilidades para essa soma. Vejamos a seguir.

Primeiro caso: $\log_k x = 2$ e $\log_k y = 47$. Isto se deve ao fato de que se $\log_k y$ fosse um número primo ímpar e diferente de 47, então $\log_k x$ seria par diferente de 2 e não seria primo.

Segundo caso: $\log_k x = 47$ e $\log_k y = 2$. Basta trocar os papéis de $x$ e $y$ do primeiro caso.

Agora, usando $(P_2)$, segue que $\log_k x - \log_k z = 44$, ou seja, $\log_k x = \log_k z + 44$, o que exclui a possibilidade de $\log_k x = 2$. Logo $\log_k x = 47$, $\log_k y = 2$ e $\log_k z = 3$. Concluímos, pela propriedade $(P_1)$, que $\log_k(xyz) = \log_k x + \log_k y + \log_k z = 47 + 2 + 3 = 52$ que por sua vez é um múltiplo de 13.

Agora, definimos o logaritmo como uma função real. Para tanto, denotamos por $\mathbb{R}_+$ o intervalo $(0, +\infty)$.

**Definição 2.4.** *Um sistema de logaritmos ou função logarítmica é uma função $L : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ tal que*

*(a) $L$ é crescente, ou seja, se $x < y$, então $L(x) < L(y)$;*

*(b)* $L(x \cdot y) = L(x) + L(y)$, *para quaisquer $x$ e $y$ reais positivos.*

Em geral, define-se logaritmo, como a função $L : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ tal que $L(x) = y$ se, e somente se, $a^y = x$. Assim, chamamos de base de um sistema de logaritmos $L$, ao número $a$ tal que $L(a) = 1$. Esta definição tem alguns inconvenientes.

(✓) A definição de função logarítmica não permite apresentar, espontaneamente, o número $e$ como uma base especial que se distingue naturalmente das demais, e aparece artificialmente na definição tradicional. Os logaritmos de base $e$ surgem naturalmente com a definição geométrica.

(✓) Existe a dificuldade de se estabelecer certas desigualdades fundamentais, por exemplo, $L(1 + x) < x$ (válida para logaritmos de base $e$).

### 3. Definição geométrica de logaritmo

A definição geométrica de logaritmo depende apenas do conceito de área de uma figura plana. Em 1647, isto não era tão simples assim. Nessa época a igreja permitiu que a obra do padre jesuíta Gregory Saint Vicent $(1584 - 1667)$, que já havia sido completada muitos anos antes, fosse publicada. Ele foi o primeiro a reconhecer a estreita relação entre a área de uma faixa de hiperbóle e os logaritmos, embora ele não tenha concretizado essa identificação. Um pouco depois, em 1660, Isaac Newton também reconheceu essa relação. Suas observações, segundo [2], mostraram que a concepção geométrica de uma função logarítmica é muito antiga.

Iremos definir o que chamamos *logaritmos naturais*. Inicialmente, faremos referência a respeito da área de uma faixa de hipérbole.

Consideremos a função $f(x) = \dfrac{1}{x}$, com $x > 0$, indicamos por $\mathbb{H}$ a parte do gráfico de $f$ que associa a cada número de seu domínio o número $\dfrac{1}{x}$. Então, $\mathbb{H}$ é o subconjunto do plano no qual seus elementos são os pontos da forma $\left(x, \dfrac{1}{x}\right)$, $x > 0$. Simbolicamente,

$$\mathbb{H} = \left\{(x,y); x > 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{x}\right\}.$$

Graficamente, $\mathbb{H}$ está no primeiro quadrante e $xy = 1$ representa um ramo, a parte positiva da hipérbole. Veja Figura 1.

Sejam $a, b \in \mathbb{R}_+$. Representamos por $\mathbb{H}_a^b$ a região do plano limitada pelas retas verticais $x = a$ e $x = b$ e pela hipérbole é $y = \dfrac{1}{x}$. Portanto, a faixa $\mathbb{H}_a^b$ é o conjunto de todos os pontos $(x, y)$ do plano que satisfazem as desigualdades $a \leq x \leq b$ e $0 \leq y \leq \dfrac{1}{x}$.

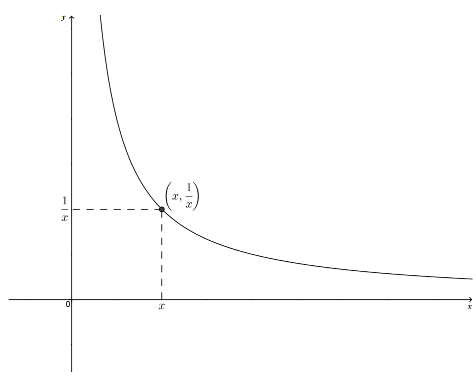

Figura 1:

Para que possamos definir a noção geométrica de logaritmo, precisamos obter a área da faixa $\mathbb{H}_a^b$, a qual denotamos por $A\left(\mathbb{H}_a^b\right)$. Para tanto, usaremos aproximações por retângulos inferiores e trapézios inscritos. No primeiro método, para um número finito de intervalos justapostos, decompomos o intervalo $[a, b]$. Então, nessa decomposição, temos $n$ subintervalos na forma $[a_i, a_{i+1}]$, com $a_i < a_{i+1}$. Construímos retângulos com altura $f\left(a_{i+1}\right) = 1/a_{i+1}$. Os vértices desses retângulos tocarão a hipérbole nos pontos com coordenadas $\left(a_{i+1}, 1/a_{i+1}\right)$. Por conveniência, chamamos cada um desses retângulos como inscritos na faixa $\mathbb{H}_a^b$ e terá área $A_R$, ainda, a junção de tais retângulos irá constituir o que indicaremos polígono retangular inscrito na faixa $\mathbb{H}_a^b$. A soma das áreas desses retângulos nos fornece uma aproximação por *falta*, para a área da faixa $\mathbb{H}_a^b$, representada na Figura 2.

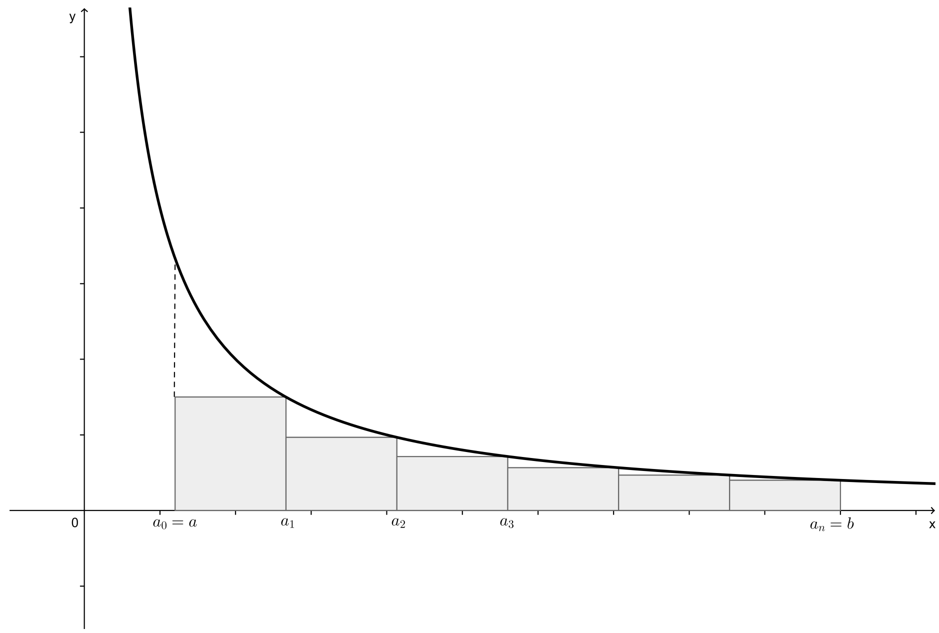


Figura 2:

**Exemplo 3.1.** Vamos obter a área da faixa $\mathbb{H}_1^4$ usando o processo de aproximações por retângulos inferiores. Denotamos esse valor por $A(\mathbb{H}_1^4)$.

Façamos a decomposição do intervalo $[1,4]$ em subintervalos de mesma medida através das retas $x = \frac{3}{2}$, $x = 2$, $x = \frac{5}{2}$, $x = 3$ e $x = \frac{7}{2}$. Assim, obtemos um polígono retangular cuja área é obtida pela soma das áreas dos retângulos. Assim,

$$\sum A_R = \frac{1}{2}\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{2}{5} + \frac{1}{2}\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\frac{2}{7} + \frac{1}{2}\frac{1}{4} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} = 1,219.$$

Pelo fato dos lados superiores dos retângulos apresentados na Figura 3 ficarem abaixo do gráfico da hipérbole, podemos concluir que

$$\sum A_R = 1,219 < A(\mathbb{H}_1^4).$$

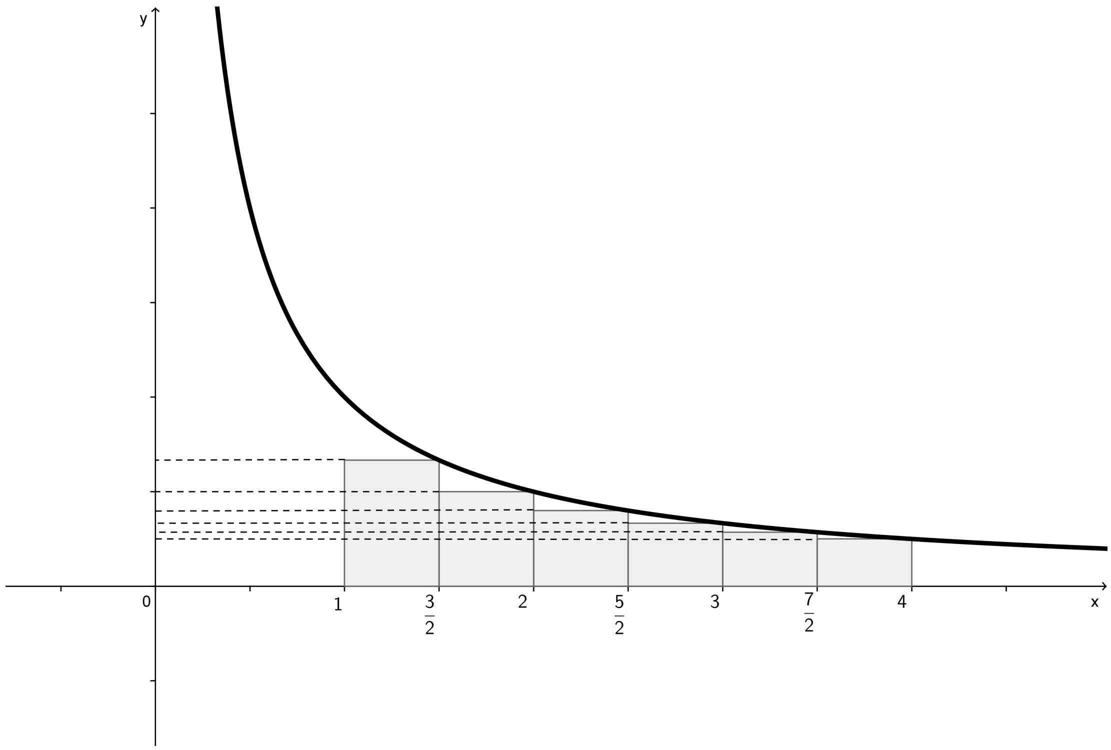


Figura 3: Área de $\mathbb{H}_1^4$ por falta.

Usando o GeoGebra versão 4.2, podemos comprovar tais cálculos. A seguir, detalhamos os passos utilizados por esse software.

Consideremos a função $y = \dfrac{1}{x}$ definida em um intervalo $(0, k]$, com $k \geq 4$. Aqui por questão de uma boa representação gráfica, usaremos o intervalo $(0, 6]$. Para tal procedemos da seguinte forma.

Digitamos na caixa de entrada função e, então, irá aparecer

Função[<Função>, <Valor de $x$ Inicial>,<Valor de $x$ Final>],

então redigitamos Função$[1/x, 0, 6]$ e damos um *enter*. Então, aparecerá a parte da hipérbole. Agora digitamos, na caixa de entrada, SomaDeRiemannInferior, aparecerá SomaDeRiemannInferior[<Função>,<Valor de $x$ Inicial>,<Valor de $x$ Final>,<Número de Retângulos>], redigitamos SomaDeRiemannInferior$[f, 1, 4, 6]$ e, novamente, damos um *enter*. Na parte superior do lado esquerdo, aparecerá o valor da soma das áreas desses seis retângulos. Comparamos, com três casas decimais o resultado obtido anteriormente e esse. Veja Figura 4.

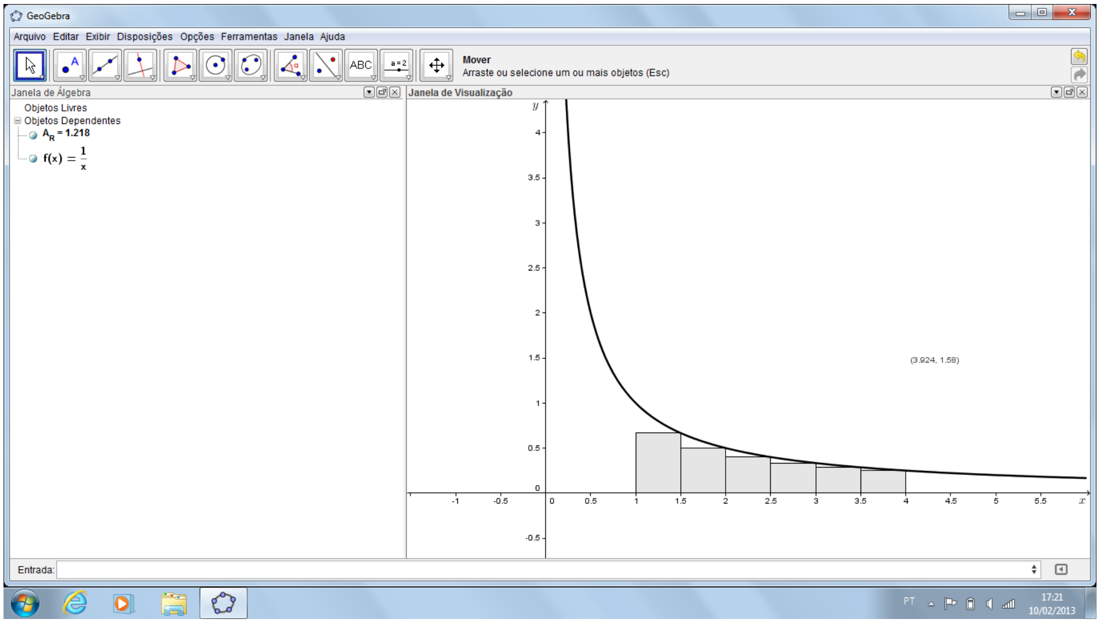


Figura 4: Área de $\mathbb{H}_1^4$ usando o GeoGebra.

Agora, indicamos o segundo método de aproximação para o cálculo da área da faixa $\mathbb{H}_a^b$, o método de aproximação por trapézios inscritos na faixa da hipérbole.

Consideremos os trapézios de altura $a_{i+1} - a_i$ e bases medindo $f(a_{i+1}) = \dfrac{1}{a_{i+1}}$ e $f(a_i) = \dfrac{1}{a_i}$. Vemos que a área de cada um desses trapézios $A_T$ é calculada por $A_T = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a_{i+1}} + \dfrac{1}{a_i}\right).(a_{i+1} - a_i)$. Assim, $A_T = \dfrac{1}{2}.\left(\dfrac{a_{i+1}}{a_i} - \dfrac{a_i}{a_{i+1}}\right)$.

Esses trapézios têm vértices na hipérbole $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Como essa hipérbole tem concavidade para cima, temos que esses trapézios são secantes a ela, pois existem pontos acima de $f$ que estão contidos nos trapézios e ainda, dois de seus vértices fazem parte da hipérbole. A reunião desses trapézios formam um polígono tapezoidal cuja soma da área de todos esses trapézios gera uma aproximação por *excesso* da faixa $\mathbb{H}_a^b$. Então,

$$\sum A_T > A\left(\mathbb{H}_a^b\right).$$

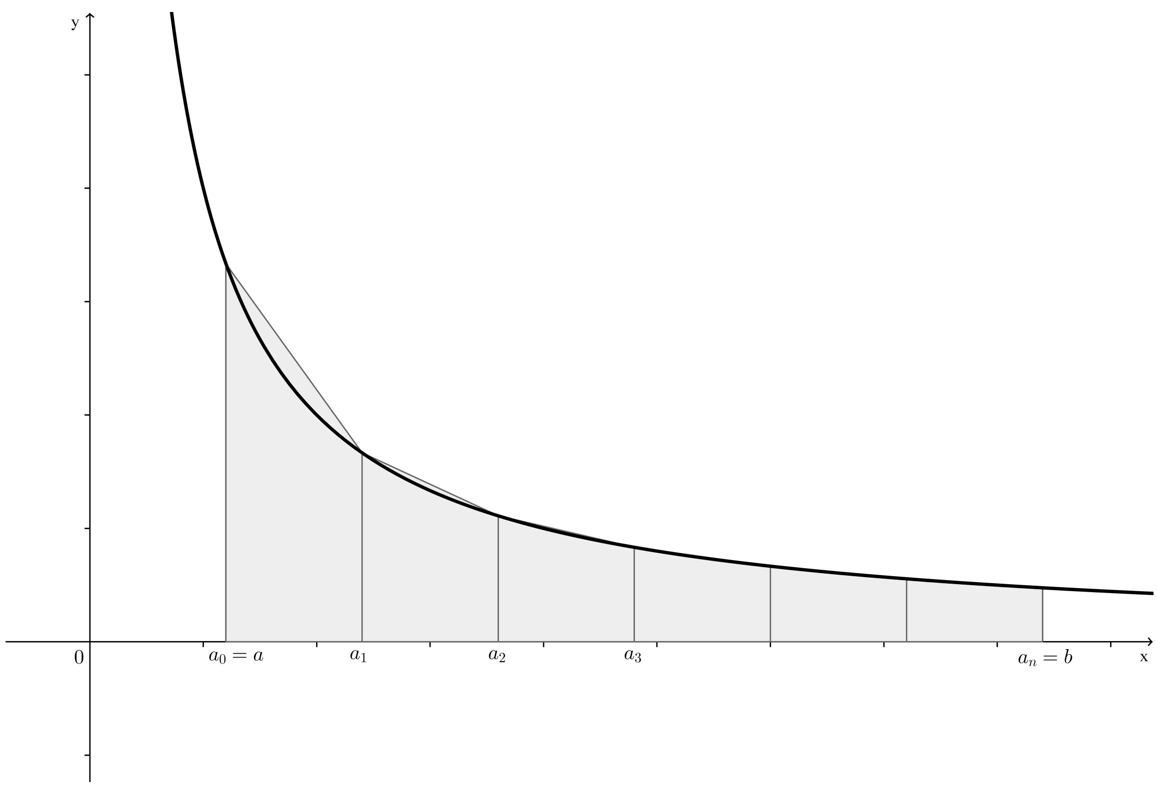


Figura 5: Área de $\mathbb{H}_a^b$ por excesso.

É interessante usarmos as aproximações obtidas pelos trapézios, já que os lados dos trapézios se aproximam mais da hipérbole $\mathbb{H}$ do que as bases superiores dos retângulos inscritos.

**Exemplo 3.2.** Consideremos a faixa $\mathbb{H}_1^4$. Vamos obter o valor da área da faixa $\mathbb{H}_1^4$ por excesso utilizando o GeoGebra.

Façamos a decomposição do intevalo $[1, 4]$, no eixo $x$, através das retas $x = \dfrac{3}{2}$, $x = 2$, $x = \dfrac{5}{2}$, $x = 3$ e $x = \dfrac{7}{2}$, obtemos seis trapézios que se aproximam da área da faixa $\mathbb{H}_1^4$.

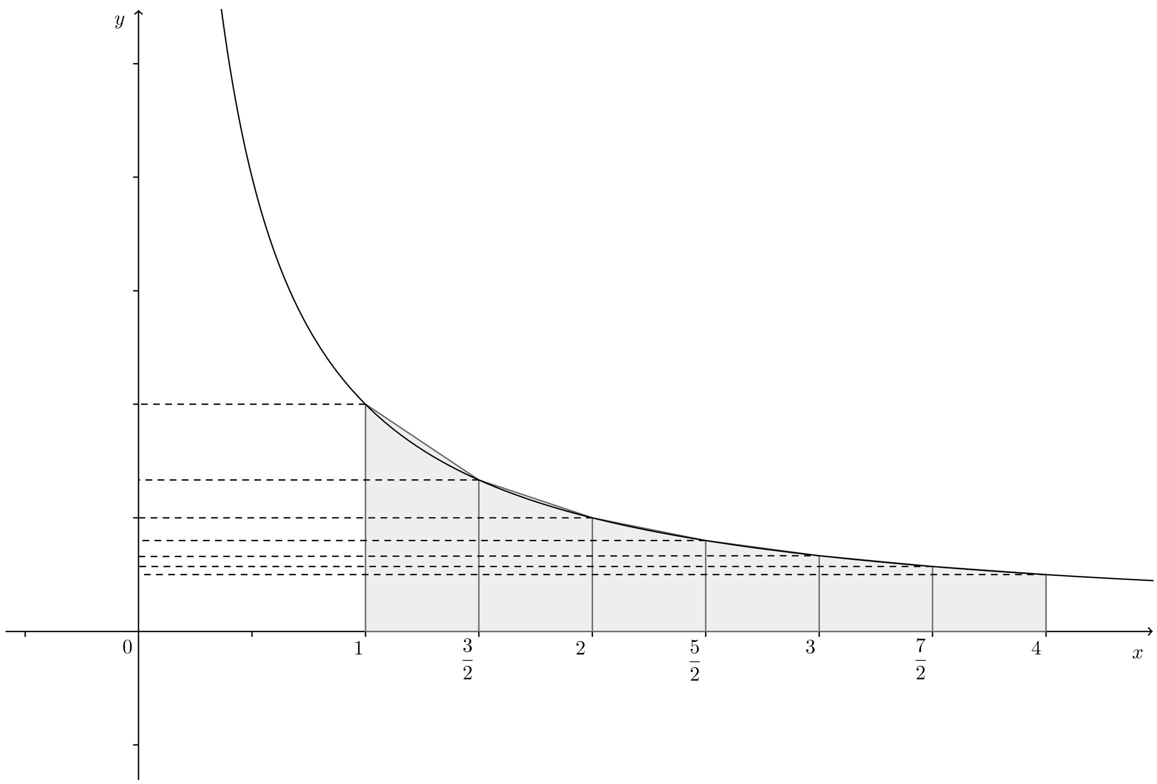


Figura 6: Área de $\mathbb{H}_1^4$ por excesso.

Observemos que a base dos trapézios estão sobre as retas $x = 1$, $x = \dfrac{3}{2}$, $x = 2$, $x = \dfrac{5}{2}$, $x = 3$, $x = \dfrac{7}{2}$ e $x = 4$. Desta forma, obtemos

$$\begin{aligned}\sum A_T &= \frac{1}{4}.\left(1 + \frac{2}{3}\right) + \frac{1}{4}.\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}.\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{5}\right) + \\ &+ \frac{1}{4}.\left(\frac{2}{5} + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{4}.\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{7}\right) + \frac{1}{4}.\left(\frac{2}{7} + \frac{1}{4}\right) = 1,405.\end{aligned}$$

Logo,

$$\sum A_T < A\left(\mathbb{H}_1^4\right).$$

Pelos cálculos aqui realizados e pelo Exemplo 3.1, concluímos que

$$\sum A_R < A\left(\mathbb{H}_1^4\right) < \sum A_T,$$

ou seja, $1,219 < A\left(\mathbb{H}_1^4\right) < 1,405$.

Com o uso do GeoGebra, podemos verificar o que acabamos de fazer. Para isto, sigam as seguintes instruções. Construa a função $y = \dfrac{1}{x}$ em um intervalo $(0, k]$, com $k \geq 4$, como já fizemos, iremos usar o intervalo $(0, 6]$. Agora, digite na caixa de entrada SomaTrapezoidal e, então, irá aparecer

SomaTrapezoidal[<Função>,<Valor de $x$ Inicial>,<Valor de $x$ Final>,<Número de Trapézios>],

então redigite SomaTrapezoidal[$\frac{1}{x}$, 0, 4, 6] e dê um *enter*. Na parte superior do lado esquerdo da tela do GeoGebra irá aparecer o resultado da soma das áreas dos seis trapézios. Comparemos, com três casas decimais, o resultado obtido anteriormente a esse, através da Figura 7.

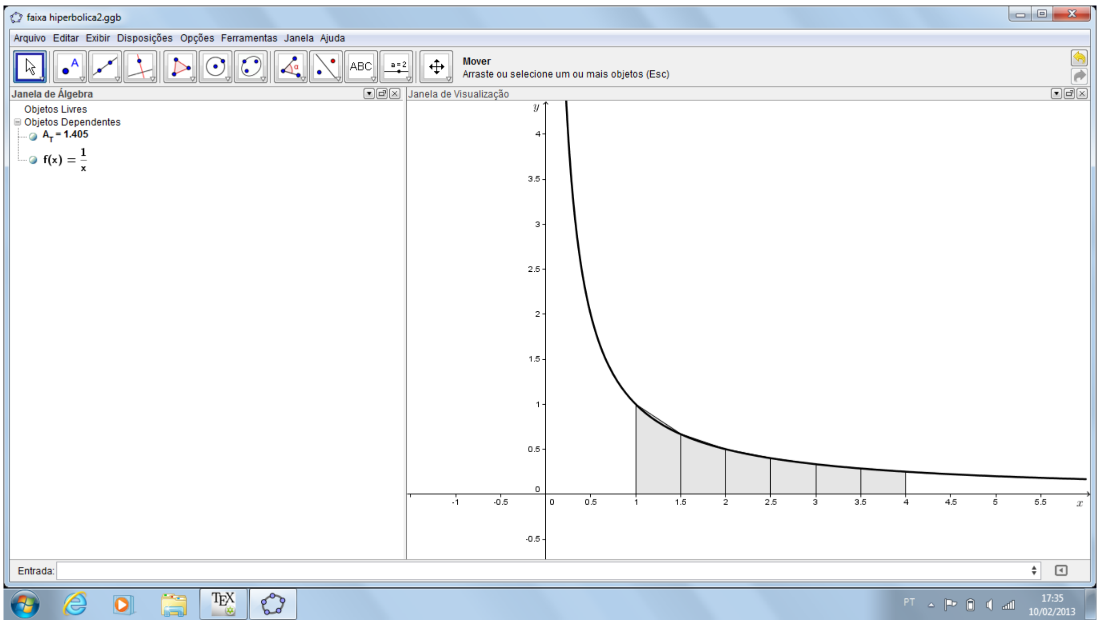


Figura 7: Área de $\mathbb{H}_1^4$ por trapézios.

## 4. Logaritmo natural

Definimos, a seguir, o logaritmo natural a partir da área de uma faixa de hipérbole $y = \dfrac{1}{x}$, com $x > 0$.

**Definição 4.1.** *Seja* $x \in \mathbb{R}_+$. *Chamamos logaritmo natural de* $x$*, e denotamos por* $\ln x$*, o valor atribuído à área da faixa* $\mathbb{H}_1^x$.

Desta definição, vem que

$$A\left(\mathbb{H}_1^x\right) = \ln x, \quad \text{para todo } x > 0.$$

Para $0 < x < 1$, convencionamos $A\left(\mathbb{H}_1^x\right) = -A\left(\mathbb{H}_x^1\right)$. Observemos que

(1) $\ln x > 0$, para $x > 1$, pois $\ln x = A\left(\mathbb{H}_1^x\right) > 0$.

(2) $\ln x < 0$, para $0 < x < 1$, pois $\ln x = A\left(\mathbb{H}_1^x\right) < 0$.

(3) $\ln 1 = 0$, pois $\mathbb{H}_1^1$ reduz-se a um segmento de reta, e $A\left(\mathbb{H}_1^1\right) = 0$.

(4) $\ln x$ não está definido para $x < 0$.

**Exemplo 4.2.** Obteremos um valor aproximado para $\ln 2$.

Pela Definição 4.1, $\ln 2 = A\left(\mathbb{H}_1^2\right)$. Para uma aproximação, dividiremos o intervalo $[1, 2]$ em dez partes iguais, que estão listados na tabela a seguir, juntamente com os valores de $\dfrac{1}{x}$ quando $x$ assume valores limites de cada uma das divisões.

| $x$ | 1 | 1,1 | 1,2 | 1,3 | 1,4 | 1,5 | 1,6 | 1,7 | 1,8 | 1,9 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $1/x$ | 1 | 0,909 | 0,833 | 0,769 | 0,714 | 0,666 | 0,625 | 0,588 | 0,555 | 0,526 | 0,500 |

Usando aproximações por retângulos inferiores, formamos dez retângulos com base medindo 0,1 e altura $\dfrac{1}{x}$. Assim,

$$\begin{aligned} A\left(\mathbb{H}_1^2\right) &= 0,1.(0,909 + 0,833 + 0,769 + 0,714 + 0,666 + 0,625 + \\ &+ 0,588 + 0,555 + 0,526 + 0,500) \\ &= 0,6685. \end{aligned}$$

Logo, o valor aproximado de $\ln 2$ é $0,6685$. Evidentemente, se usarmos a soma trapezoidal para uma divisão em mais partes iguais do intervalo $[1,2]$, temos mais próximo de $\ln 2$. Faremos isso com o uso do GeoGebra.

Vamos construir, com a ajuda do GeoGebra a função $y = \dfrac{1}{x}$, para $x \in (0,k]$, com $k > 2$. Digite na caixa de entrada Função$[1/x, 0, 5]$, esse último valor indica até onde irá o intervalo de contrução da função, dando um *enter* irá aparecer a função que já estávamos trabalhando. Então, façamos um controle deslizante, de nome $n$, variando de 1 a 300 (ou mais) e incremento 0,1. Então, fazemos a soma trapezoidal para o valor de $A\left(\mathbb{H}_1^2\right)$. Digitamos SomaTrapezoidal$[f, 1, 2, n]$ e dê um *enter*. Aparecerá a região que estamos querendo e, fazendo $n$ percorrer o intervalo estipulado para ele, teremos na parte superior esquerda da tela o valor aproximado de $\ln 2$. Veja Figura 8.

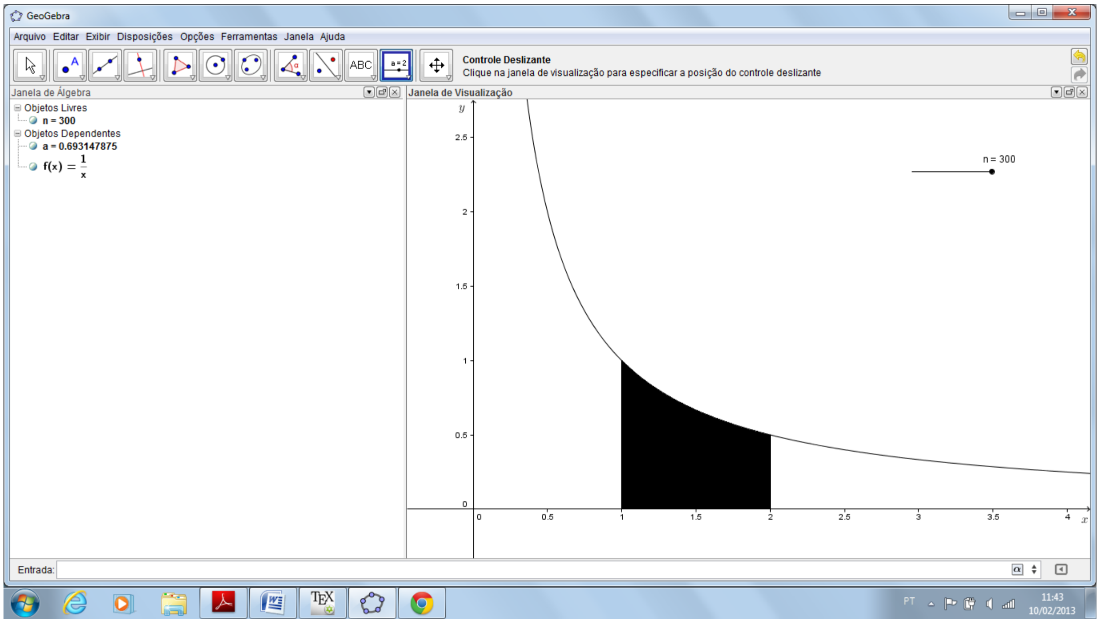


Figura 8: $\ln 2$ usando GeoGebra.

**Teorema 4.3.** *A função* $\ln : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *é logarítmica.*

**Demonstração:** Para que $\ln x$ seja uma função logarítmica, ela deve satisfazer duas propriedades: $\ln(x.y) = \ln x + \ln y$ e, também, deve ser uma função crescente. Primeiramente, sabemos que $A\left(\mathbb{H}_a^b\right) = A\left(\mathbb{H}_{ak}^{bk}\right)$, para $k \in \mathbb{R}_+$. Então, $A\left(\mathbb{H}_x^{xy}\right) = A\left(\mathbb{H}_1^{y}\right)$. Independentemente da posição dos pontos 1, $x$ e $xy$ sobre o eixo das abscissas, vale

$$A\left(\mathbb{H}_1^{xy}\right) = A\left(\mathbb{H}_1^{x}\right) + A\left(\mathbb{H}_x^{xy}\right).$$

Por definição, $A\left(\mathbb{H}_1^{xy}\right) = \ln(xy)$, $A\left(\mathbb{H}_1^{x}\right) = \ln x$ e $A\left(\mathbb{H}_1^{y}\right) = \ln y$. Então, $\ln(xy) = \ln x + \ln y$. Agora, para provarmos que $\ln x$ é crescente, sejam $x, y \in \mathbb{R}_+$, com $x < y$. É fácil ver que existe $a > 1$ tal que $y = ax$. Então,

$$\ln y = \ln(ax) = \ln a + \ln x.$$

Como $a > 1$, temos $\ln a > 0$, logo $\ln y > \ln x$, como queríamos demonstrar. $\square$

Existem vários assuntos interessantes sobre o tema Logaritmos que poderiam ser explorados. Nossa intenção era que o aluno conhecesse a definição geométrica de logaritmos e a visualizasse utilizando o GeoGebra. Esperamos que esse objetivo seja alcançado com o auxílio deste trabalho. Para mais detalhes, indicamos as referências [1] e [2].

## Referências

1. L. X. Azevedo, *Logaritmos - Construção da definição geométrica com o uso do GeoGebra*, Dissertação(mestrado), Universidade Estadual de Maringá, Profmat, 2013. 46, 64

2. E. L. Lima, *Logaritmos*, SBM, Rio de Janeiro, 2010. 51, 64

3. Anais do II Simpósio de Matemática e Matemática Industrial, vol. 1.

4. Anais do IX Seminário Nacional de História da Matemática, 2009.

5. Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática Comunicação Científica, Salvador, 2010.