J Jornal Eletrônico de Ensino e Pesquisa de Matemática
(1s.) **v. 1**, 1 (2017): 28–35. ©Jeepema – ISSN 2594-6323
www.dma.uem.br/kit/jeepema

O Teorema do Valor Médio

Angela Mognon – UTFPR
E-mail: amognon@utfpr.edu.br

Resumo: O Teorema do Valor Médio é um dos importantes resultados do Cálculo. Ele nos permite mostrar que podemos obter informações relevantes sobre uma determinada função por meio da sua derivada. Nestas notas apresentamos a demonstração do Teorema e dois exemplos que ilustram o resultado fazendo uso dos softwares Geogebra e Maple.

Palavras-chave: Teorema do Valor Médio. Maple. Geogebra. *

Sumário

1. Introducão

Um dos teoremas importantes no estudo introdutório do Cálculo Diferencial e Integral é o Teorema do Valor Médio (TVM), formulado pela primeira vez por Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), ele nos diz que se uma função f é contínua em um intervalo fechado $[a, b]$ e derivável em (a, b), então existirá um número $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Geometricamente isso signfica que se uma função f for contínua num intervalo fechado $[a, b]$ e derivável no intervalo aberto (a, b), então

* Publicado em 14-08-2017.

existe $c \in (a,b)$ tal que a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(c, f(c))$ é paralela à reta secante que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

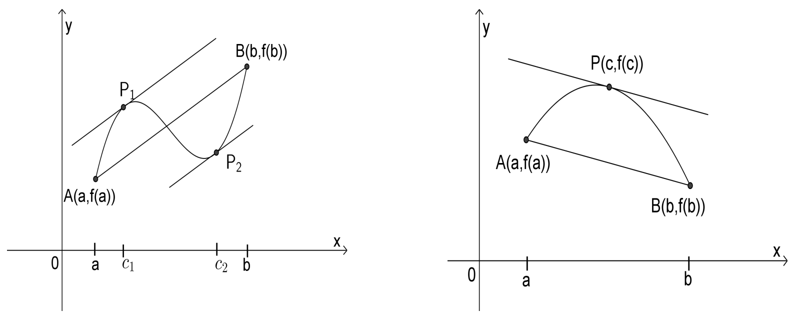


Figura 1: Ilustração do Teorema do Valor Médio.

Uma aplicação prática do TVM é a seguinte: se percorremos uma distância de 100km em 2 horas, em algum instante desse intervalo de tempo a nossa velocidade será de $50km/h$. Em outras palavras, se $s(t)$ representa a posição de um objeto em cada instante $t \in [a, b]$ então, em algum instante $t \in (a, b)$ teremos que

$$v_m = \frac{s(b) - s(a)}{b - a} = v(t) = s'(t).$$

O Teorema do Valor Médio permite obter propriedades da função por meio de sua derivada. Ele é utilizado para mostrar que uma função f é crescente sobre um intervalo aberto I se, e somente se, $f'(x) > 0, \forall x \in I$. Analogamente, a função f é decrescente sobre um intervalo aberto se, e somente se, $f'(x) < 0, \forall x \in I$.

Outra consequência é que se $f'(x) = g'(x)$, então $f(x) = g(x) + k$, para alguma constante k.

2. Enunciado e Demonstração

Antes da demonstração do Teorema do Valor Médio vamos demonstrar o Teorema de Rolle, este resultado garante, sob algumas condições, a existência de valores extremos de uma função no interior de um intervalo fechado.

Teorema 2.1. [Teorema de Rolle] Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e derivável no intervalo aberto (a, b). Se $f(a) = f(b)$ então, existe um número c em (a, b) tal que $f'(c) = 0$.

Demonstração: Se $f(x) = k$ é a função constante então, $f'(x) = 0$, logo o número c pode ser tomado com qualquer número em (a, b).

Se $f(x) > f(a)$ para algum $x \in (a, b)$, como f é contínua em $[a, b]$, pelo Teorema do Valor Extremo, f tem um valor máximo em algum ponto de $[a, b]$. Uma vez que $f(a) = f(b)$, ela deve assumir esse valor máximo em algum número c no intervalo aberto (a, b). Como f é derivável em (a, b), pelo Teorema de Fermat $f'(c) = 0$.

Analogamente, se $f(x) < f(a)$ para algum $x \in (a, b)$, pelo Teorema do Valor Extremo, f tem um valor mínino em $[a, b]$ e como $f(a) = f(b)$, ela deve assumir esse valor mínimo em algum número c no intervalo aberto (a, b), logo $f'(c) = 0$. $\square$

Teorema 2.2. [Teorema do Valor Médio] Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e derivável em (a, b). Então, existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{1}$$

Demonstração: Consideremos $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e derivável em (a, b) vamos mostrar que existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Para isso, vamos aplicar o Teorema de Rolle à função $H(x)$ definida como a diferença entre f e a reta secante que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$. Isto é,

$$H(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Temos que $H(x)$ é contínua em $[a, b]$, pois é a diferença de duas funções contínuas, e $H(x)$ é diferenciável em (a, b), pois é diferença de duas funções diferenciáveis. Além disso, $H(a) = H(b) = 0$. Portanto, $H(x)$ satisfaz as hipótese do Teorema de Rolle, logo existe $c \in (a, b)$ tal que $H'(c) = 0$. Assim,

$$0 = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Longrightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Isso conclui a demonstração do teorema. □

O Teorema do Valor Médio garante a existência de um valor $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

no entanto, não diz como encontrar esse valor.

A seguir apresentamos um exemplo ilustrando como encontrar tais valores, calculando numericamente o conjunto solução da equação.

3. Exemplo

Consideremos a função $f(x) = x^3 - x$. Uma vez que f é um polinômio, então ela é contínua e derivável para todo x; logo, é contínua em $[0, 2]$ e derivável em $(0, 2)$. Portanto, pelo Teorema do Valor Médio, existe um número c em $(0, 2)$ tal que

$$f(2) - f(0) = f'(c)(2 - 0) \Rightarrow 6 = (3c^2 - 1).2 = 6c^2 - 2,$$

o que nos dá $c^2 = \dfrac{4}{3}$, isto é, $c = \pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}$. Como c deve estar em $(0, 2)$, então $c = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Em geral, nas aulas de Cálculo o professor não se preocupa em resolver a equação 1 e elabora questões em que a resolução dessa equação não oferece dificuldades. Mas podemos usar algum software de matemática simbólica para antecipar e motivar os alunos nesse tópico e ao mesmo tempo explorar o cálculo de reta tangente ao gráfico de uma função.

Uma alternativa para a resolução da equação 1 é utilizar algum método numérico, por exemplo, o método da Bissecção, que permite

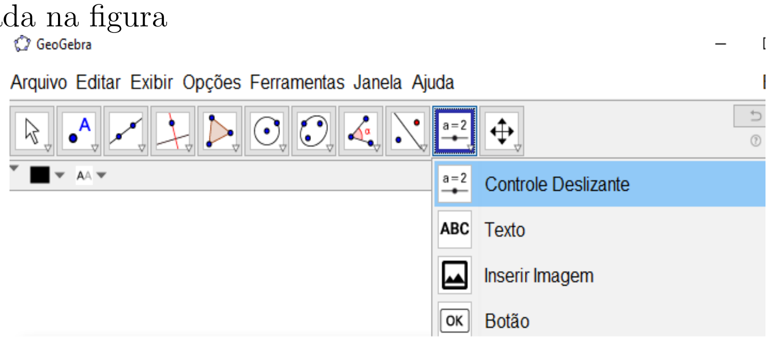
obter uma aproximação para a solução de uma equação não-linear $f(x) = 0$. Esse método está disponível on-line em
http://www.dma.uem.br/kit/paginas/proced_numericos.

4. Usando Softwares

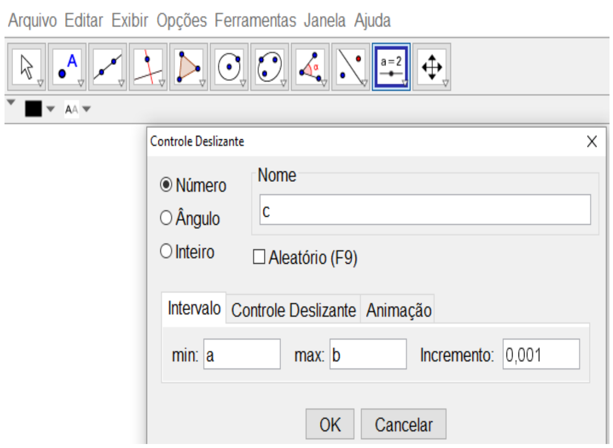
Nesta seção apresentamos duas atividades, a primeira elaborada no software Geogebra e a segunda usando Maple, que ilustram o Teorema do Valor Médio.

Atividade 1: Para a ilustração no Geogebra siga os seguintes passos:

1. Abra um arquivo novo no GeoGebra;
2. No campo de entrada digite os números $a = -2$ e $b = 2$;
3. Digite a função $g(x) = x^3 - x$;
4. No campo de entrada crie a função f escrevendo Função[g,a,b] no campo de entrada;
5. Na Janela de Álgebra clique no ponto ao lado da função g para esconder seu gráfico. Você pode mudar a cor e estilo da função f, clicando sobre ela com o botão direito e em seguida em propriedades;
6. Crie os pontos $A(a, f(a))$ e $B(b, f(b))$;
7. Trace a reta secante que passa pelos pontos A e B, escrevendo Reta[A,B] no campo de entrada. Renomeie por r_s, para isso clique com o botão direito sobre a reta e escolha a opção renomear e escreva r_s;
8. Determine a derivada de f, escrevendo Derivada[f] no campo de entrada. Esconda seu gráfico;
9. Crie um controle deslizante. Para isso utilize a ferramenta ilustrada na figura



escolha a opção *Controle Deslizante*. Clique na janela de visualização. Aparecerá a seguinte janela:



Nomeie de c, escreva a como valor mínimo e b como valor máximo e em Incremento escreva 0,001;

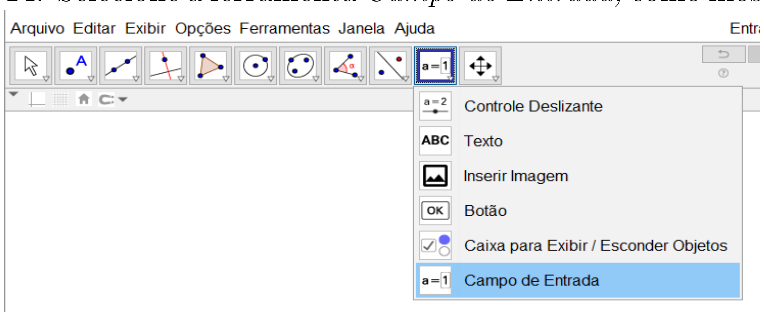
10. Crie o ponto $C(c, f(c))$;

11. Determine a reta tangente ao gráfico de f no ponto C, escrevendo $y - f(c) = f'(c)(x - c)$ no campo de entrada;

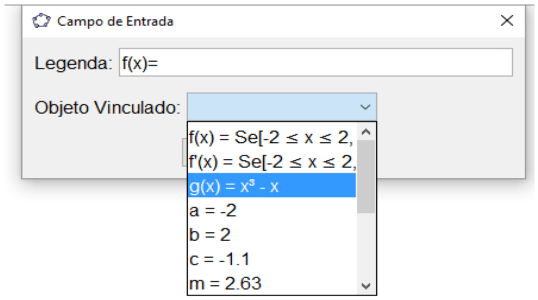
12. Determine a inclinação da reta secante r_s. Para isso, escreva Inclinação [r_s] no campo de entrada. Renomeie por m_s;

13. Analogamente ao passo 12, determine a inclinação da reta tangente e renomeie por m. Movimente o seletor c e observe o que acontece com a inclinação da reta tangente;

14. Selecione a ferramenta *Campo de Entrada,* como mostra a figura



Clique na janela de visualização e aparecerá a seguinte janela



Em legenda escreva $f(x) =$. Em objeto vinculado escolha a opção $g(x)$. Com esse passo podemos mudar a função mais facilmente. Podemos diminuir o tamanho do campo, clicando com o botão direito, escolhendo propriedades em seguida estilo;

15. Da mesma forma que no passo anterior podemos criar os campos de entrada para os extremos do intervalo a e b. Dessa forma podemos mudar mais facilmente os extremos do intervalo.

Podemos animar esta ilustração do TVM no Geogebra, para isso clique com o botão direito do mouse sobre o controle deslizante c e clique em *animar*.

Veja essa atividade pelo Geogebra `TVM.ggb`.

Atividade 2: Ilustração fazendo uso do Maple:

Para animar a ilustração no Maple use os seguintes comandos:

```
> restart;
>f := proc (x) options operator, arrow; x^4-2*x end proc;
> L := [[-2, f(-2)], [2, f(2)]];
> g := proc (x) options operator, arrow; 4*x^3-2 end proc;
> a := (f(2)-f(-2))/(2+2);
>fsolve(g(x) = a, x);
> t := proc (x) options operator, arrow; -2*x
end proc;
>plots[animate](plot, [[f(x), L, t(x)+k], x = -3 .. 3],
k = 0..16, thickness = 4);
```

Para ativar a animação, clique sobre a figura com o botão direito e selecione animation e, em seguida, play.

O Maple apresenta um aplicativo que ilustra o Teorema do Valor Médio, nele entramos com a função e o intervalo e ele nos fornece o valor de c, mas não apresenta opções para o cálculo de c. Para acessar o aplicativo clique em ferramentas, em seguida em tutoriais e escolha a opção Cálculo-uma variável e clique em Teorema do Valor Médio.

5. Agradecimentos

Parabenizo o professor Doherty Andrade pela iniciativa desse projeto e agradeço pela oportunidade de poder contribuir com seu trabalho.

Referências

1. Andrade, D. Cálculo Diferencial e Integral: um KIT de sobrevivência. Disponível em http://www.dma.uem.br/kit. 2017.

2. ANTON, H. Bivens, I. Dsvis, S. **Cálculo.**, 8ª Ed.. Porto Alegre: Bookman, 2007.

3. LEITHOLD, L. **O Cálculo com Geometria Analítica.**. V. Vol.1, 3ª Edição. São Paulo: Harbra, 1994.

4. STEWART, J. **Cálculo**. V.1, 7ª Edição. São Paulo: CENGAGE Learning, 2013.