J Jornal Eletrônico de Ensino e Pesquisa de Matemática
(1s.) **v. 3** 2 (2019): 1–6. ©JEEPEMA–ISSN-2594-6323.
www.dma.uem.br/kit/jeepema

Teorema do Ponto Fixo aplicado à cadeia de Markov

Doherty Andrade

RESUMO: Métodos iterativos aparecem cedo para todo estudante de ciências exatas. Eles estão, por exemplo, no método de Gauss-Seidel e Gauss-Jacobi, no método de Newton e no método de Picard para mostrar existência e unicidade de soluções para problemas de valor inicial. Estes métodos iterativos comumente estudados separados, são na verdade, faces diferentes do Princípio das Contrações. Neste trabalho vamos apresentar o Princípio das Contrações e dar uma aplicação à cadeia de Markov.

Sumário

1. Introdução

O Princípio das Contrações na sua forma abstrata foi primeiro creditado a Stefan Banach [1] que mostrou, sob hipóteses bem gerais, que sucessivas aplicações de uma função contração gera uma sequência de pontos que converge para um único ponto fixo dessa função.

Vejamos o seu enunciado.

Teorema 1.1 (Princípio da Contração) *Seja (M, d) um espaço métrico completo e $F : M \to M$ uma contração, isto é, F satisfaz*

$$d(F(x), F(y)) \leq Kd(x, y), \forall x, y \in M,$$

e algum $0 \leq K < 1$. Então, tem-se:

1. *existe um único ponto fixo $x^* \in M$ tal que $F(x^*) = x^*$;*

2. *para todo ponto inicial $x_0 \in M$, a sequência iterativa $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ definida por*

$$x_{n+1} = F(x_n), n \geq 0$$

converge para o único ponto fixo $x^* \in M$. Além disso,

$$d(x_n, x^*) \leq \frac{K^n}{1-K} d(x_1, x_0).$$

Demonstração: Se a sequência (x_n) definida acima converge para $a \in M$, então como F é contínua temos
$$f(a) = f(\lim x_n) = \lim f(x_n) = \lim x_{n+1} = a.$$
Provando que a é ponto fixo de F.

Se F tem dois pontos fixos a e b, então temos
$$d(a,b) = d(F(a), F(b)) \leq kd(a,b),$$
o que é absurdo a menos que $a = b$. Logo, $a = b$.

Resta provar que a sequência (x_n) converge. Notemos que $d(x_1, x_2) \leq Kd(x_0, x_1)$ e que, em geral, $d(x_{n+1}, x_n) \leq K^n d(x_1, x_0), \forall n \in \mathbb{N}$. Segue que para $n, p \in \mathbb{N}$ temos
$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+p}) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + \cdots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \\ &\leq [K^n + k^{n+1} + \cdots + K^{n+p-1}]d(x_0, x_1) \\ &\leq \frac{K^n}{1-K} d(x_0, x_1). \end{aligned}$$
Como $\lim K^n = 0$ segue que a sequência é de Cauchy e portanto convergente, o que completa a prova do teorema. □

O seguinte teorema é um resultado simples sobre existência de ponto fixo de funções contínuas $f : [a,b] \to [a,b]$. Para funções definidas em compactos do $\mathbb{R}^n$ veja http://www.dma.uem.br/kit/jeepema/vol2017/art1.pdf.

Teorema 1.2 *Toda aplicação contínua $f : [a,b] \to [a,b]$ tem pelo menos um ponto fixo.*

Demonstração: Defina a seguinte aplicação $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = f(x) - x$. Assim g mede a distância orientada entre x e sua imagem $f(x)$. Um ponto fixo de f é um ponto x onde $g(x) = 0$. Se um dos extremos do intervalo é ponto fixo nada temos a provar. Então suponha que nenhum deles seja ponto fixo. Como $f(a)$ e $f(b)$ estão no intervalo $[a,b]$ segue que $a < f(a)$ e $f(b) < b$ e portanto $g(a) > 0$ e $g(b) < 0$. Como g é contínua, pelo teorema do valor intermediário existe $x \in [a,b]$ tal que $g(x) = 0$. □

Um exemplo simples e comumente utilizado por professores de métodos númericos é determinar a solução da equação $x = \cos(x)$. Esta função é uma contração no intervalo $[0.5, 0.9]$ (por exemplo).

Tomando como ponto inicial $x_0 = 0.7$ e calculando a sequência dada por $x_{n+1} = \cos(x_n), n \geq 0$, obtemos:

```
0.739082197209505,
0.7648421872844885,
0.7214916395975273,
0.7508213288394496,
0.7311287725733576,
...............
0.739082197209505
```

após 20 iterações.

Note que os valores da sequência se aproximam de 0.739082197209505.

Podemos repetir este processo em qualquer calculadora científica. Para casos mais gerais podemos programar usando alguma linguagem. Os valores da sequência acima foram obtidos executando o notebook em Python chamado de *fixedp*. Para outros exemplos, redefina a função f.

```
# Metodo do ponto fixo

# SINTAXE: fixedp(f,x0,tol=10e-5,maxiter=N)
#ONDE x0 é o chute inicial,tol é a toelerancia e maxiter é o numero maximo de iterações.

from pylab import plot,show
from numpy import array,linspace,cos
from numpy.linalg import norm

def fixedp(f,x0,tol=10e-5,maxiter=100):
 """ algoritmo do ponto fixo """
 e = 10
 k = 0
 xp = []
 # começçando a iteração
 while(e > tol and k < maxiter):
  x = f(x0)      # equacao do ponto fixo
  e = norm(x0-x) # erro na iteracao atual
  x0 = x
  xp.append(x0)  # salva a solução na iteração atual
  k = k + 1
 return x,xp
```

Figura 1: Algoritmo em Python

```
import math as m
f = lambda x : m.cos(x)

xp = fixedp(f,0.7, tol = 10e-6, maxiter=100)
xp
```

Figura 2: Chamando o algoritmo

Vejamos uma aplicação do teorema 1.1 à cadeia de Markov.

2. Cadeias de Markov

Um processo é dito ser Markoviano, devido a Andrei Andrevevich Markov, quando cada estado depende apenas do estado imediatamente anterior. Ou seja, são processos sem memória pois, os estados anteriores não exercem influência sobre o estado atual. Um processo Markoviano é dito uma cadeia de Markov se os estados são discretos.

Uma cadeia finita de Markov com n estados é determinada especificando uma matriz $m \times m$ denominada de transição $P = (p_{ij})$, onde p_{ij} é a probabilidade do estado i mudar para o estado j durante qualquer período de transição e, onde $\sum_{i=1}^{m} p_{ij} = 1$ para cada $j = 1, 2, \ldots, m$.

Exemplo 2.1

Como exemplo, consideremos o caso de migração de uma espécie de pássaro. Observou-se que do local A, 50% deles permancem em A, 40% deles migram para o local B e que 10% migram para o local C. Observou-se que do local B, 40% deles migram para o local A, que 30% migram para o local C e 30% permancem em B. Dos pássaros presentes em C observou-se que 20% emigram para A, 60% emigram para B e apenas 20% permanecem em C.

Denotando, x' o número de pássaros que emigraram para A, y' o número de pássaros que emigraram para B e z' o número de pássaros que emigraram para C, podemos descrever o movimento migratório do seguinte modo:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.2 \\ 0.4 & 0.3 & 0.6 \\ 0.1 & 0.3 & 0.2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Ou resumidamente,

$$v' = Mv,$$

onde

$$M = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.2 \\ 0.4 & 0.3 & 0.6 \\ 0.1 & 0.3 & 0.2 \end{bmatrix} \text{ e } v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Supondo que a população dos pássaros seja mantida constante ao longo dos anos, então podemos inferir resultados sobre a emigração para os anos seguintes.

Supondo que foi observado que A tem atualmente 60% dos pássaros, B tem 10% e que C tem 30% dos pássaros. Isto é, a distribuição inicial é dada por $v_0 = \begin{bmatrix} 0.60 \\ 0.10 \\ 0.30 \end{bmatrix}$.

Com base nos dados deste ano, para o próximo ano, a distribuição da migração deverá ser:

$$v_1 = Mv_0,$$

e assim, temos

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0.40 \\ 0.45 \\ 0.15 \end{bmatrix}.$$

Aplicando o mesmo raciocínio, no segundo ano a migração será

$$v_2 = M(Mv_0) = M^2 v_0,$$

donde se obtém que

$$v_2 = \begin{bmatrix} 0.410 \\ 0.385 \\ 0.205 \end{bmatrix}.$$

No quarto ano seguinte, a migração será

$$v_4 = M^4 v_0,$$

donde se obtém que

$$v_4 = \begin{bmatrix} 0.401 \\ 0.399 \\ 0.200 \end{bmatrix}.$$

Por indução, conclui-se que decorridos k anos, a migração é dada por

$$v_k = M^k v_0.$$

Dizemos que uma cadeia de Markov é regular, se alguma potência de M tem apenas entradas positivas. Este é o caso do exemplo acima.

Vamos denotar por V o espaço associado ao conjunto de vetores de probabilidade para a cadeia regular de Markov com matriz de transição M. Defina a aplicação $T : V \to V$ dada por $Tv = Mv$.

Note que

$$V = \{v = (x_1, x_2, \ldots, x_m); \sum_{i=1}^{m} x_1 = 1 \text{ e } x_i \geq 0\}.$$

Vamos introduzir em V a seguinte noção de distância: dados vetores $v_1 = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ e $v_2 = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ de V seja

$$d(v_1, v_2) = \max\{|x_i - y_1|; i = 1, 2, \ldots, m\}.$$

Assim, (V, d) é um espaço métrico completo.

Podemos agora enunciar um dos resultados mais importantes sobre cadeias de Markov.

Teorema 2.2 *Para toda cadeia finita e regular de Markov existe um único vetor probabilidade v^* que é um ponto fixo de sua matriz de transição M, e todas as sequências iterativas $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots$ determinadas por $v_{n+1} = Mv_n, n \geq 1$ convergem para v^*.*

A demonstração consiste em demonstrar que

$$d(Mx, My) \leq Kd(x, y), \forall x, y \in V$$

e para alguma constante $0 \leq K < 1$. O resultado segue do Princípio da Contração 1.1.

3. Aplicação

Voltando ao nosso exemplo, queremos determinar v^* que satisfaça $v^* = Mv^*$, chamado de o ponto de estabilidade. O teorema 2.2 garante a existência deste ponto de estabilidade. Para determinar v^* basta resolver o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.2 \\ 0.4 & 0.3 & 0.6 \\ 0.1 & 0.3 & 0.2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

juntamente com a condição $x + y + z = 1$.

Cuja solução é $x = 2z, y = 2z$ e $5z = 1$, de onde resulta que $x = \frac{2}{5}, y = \frac{2}{5}$ e $z = \frac{1}{5}$. O que significa que ao longo dos anos as taxas de migração vão se estabilizar em $\frac{2}{5}$ da população em A e B e, $\frac{1}{5}$ em C.

Referências

1. S. Banach. Sur le oprations dans les ensembles abstraits et leur applications aux equations intégrals. Fund. Math. 3 (1922) 133–181. 1

2. ANDRADE, D. *Geometria Analítica*. 2. ed. Florianópolis: UFSC, 2010.

3. S. D. CONTE, *Elementary Numerical Analysis*. MacGraw-Hill, 1965.