J Jornal Eletrônico de Ensino e Pesquisa de Matemática
(1s.) **v. 1**, 2 (2017): 34–45. ©Jeepema – ISSN 2594-6323
www.dma.uem.br/kit/jeepema

Integral na reta com Álgebra Linear: caso particular

Ânderson da Silva Vieira – E-mail:anderdsvieira@gmail.com
Fatec-Carapicuíba e Faculdade Mário Schenberg, Cotia, SP

Resumo: O objetivo principal desse material é apresentar ao leitor uma maneira de calcular a integral na reta, para um caso particular, usando as definições e resultados que são desenvolvidos em um curso de Álgebra Linear.

Palavras-chave: Integral, Bases, Geradores, Transformação Linear, Operador Inverso. *

Sumário

1. Introdução

Quando o professor de matemática inicia um conceito em sua aula, é muito comum surgir a pergunta de um de seus alunos: *"Onde vamos aplicar esse conceito?* Muitas vezes precisamos de tantos pré-requisitos para fazer uma aplicação, mesmo em um caso bem particular, mas a emoção de poder fazê-la é inexplicável.

Se sabemos resolver sistemas lineares, Boldrini (ver [?]) nos apresenta exemplos aplicados em balanceamento de reações químicas e em circuito elétrico. Por outro lado, se sabemos os conceitos de operadores

* Publicado em 14-12-2017.

invertíveis, podemos calcular algumas integrais para um caso particular. O método que descreveremos foi apresentado por David Poole (ver [**?**]).

Quanto à organização desse material, temos o seguinte: na Seção 2 recordamos um pouco dos assuntos estudados em Álgebra Linear que serão importantes; na Seção 3 teremos a resposta para o objetivo desse material; finalizamos com Seção 4 deixando exercícios para que o leitor aplique a técnica às outras situações.

2. Álgebra Linear: Breves definições e resultados

Nesta seção, os conjuntos U e V serão sempre espaços vetoriais (ver [**?**]) sobre $\mathbb{R}$. Apenas apresentaremos as definições que nos serão úteis no desenvolver da técnica.

Iniciaremos com as definições sobre os espaços vetoriais.

Consideremos subconjunto $S = \{u_1, \cdots, u_n\} \subset V$. Indicaremos por $[S]$ o seguinte subconjunto de V construído a partir de S:

$$[S] = \{\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n | \alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}.$$

Observação 2.1. *$[S]$ é subespaço vetorial de V.*

Definição 2.1. *O subespaço $[S]$ é chamado* ***subespaço vetorial gerado*** *por S.*

Cada elemento de $[S]$ é chamado combinação linear de $u_1, \cdots, u_n$.

Definição 2.2. *Seja $S = \{u_1, \cdots, u_n\} \subset V$. Consideremos a equação*

$$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n = 0. \tag{1}$$

O conjunto S diz-se linearmente independente, caso a equação (1), admite apenas a solução trivial, $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$.

Se existem soluções $\alpha_i \neq 0$, diz-se que o conjunto S é linearmente dependente.

Definição 2.3. *Um conjunto $S = \{u_1, \cdots, u_n\} \subset V$ é uma base do V se*

(I) S é linearmente independente;

(II) $V = [S]$.

Definição 2.4. *Se* V *possui uma base com* n *vetores, então* V *tem dimensão* n *e denotamos* $\dim V = n$.

Agora, passaremos a rever as definições com transformações lineares.

Definição 2.5. *Uma aplicação* $F : U \to V$ *é chamada* ***transformação linear*** *de* U *em* V *se, e somente se,*

(a) $F(u_1 + u_2) = F(u_1) + F(u_2), \forall u_1, u_2 \in V$;

(b) $F(\alpha u) = \alpha F(u), \forall \alpha \in \mathbb{R}$ *e* $\forall u \in U$.

Quando $U = V$, uma transformação linear $F : U \to V$ é chamada de ***operador linear***.

Para aplicarmos os resultados de Álgebra Linear, precisamos ter uma aplicação que é uma transformação linear. Sendo assim, a seguir, veremos uma proposição que nos garantirá que o operador diferencial $D : P_n(\mathbb{R}) \to P_n(\mathbb{R})$ definido por

$$D(p(t)) = p'(t),$$

para todo polinômio $p(t) \in P_n(\mathbb{R})$, é um operador linear.

Proposição 2.1. *Mostre que* D *é um operador linear.*

Demonstração. Sejam $p(t), q(t) \in P_n(\mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Desta forma,

$$\begin{aligned} D(p(t) + q(t)) &= (p(t) + q(t))' \\ &= p'(t) + q'(t) \\ &= D(p(t)) + D(q(t)); \end{aligned}$$

além disso,

$$\begin{aligned} D(\alpha p(t)) &= (\alpha p(t))' \\ &= \alpha p'(t) \\ &= \alpha D(p(t)). \end{aligned}$$

Portanto, D é um operador linear. □

Indicaremos por $\mathcal{L}(U,V)$ o conjunto das transformações lineares de U em V. Se $U = V$, o conjunto dos operadores lineares de U será denotado por $\mathcal{L}(U)$.

Como vamos precisar da matriz associada à transformação linear, apresentaremos os passos de como obtê-la.

Suponhamos que $\beta = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ e $\beta' = \{v_1, v_2, \cdots, v_m\}$ sejam bases de U e V, respectivamente. Dado $u \in U$, podemos escrevê-lo como

$$u = x_1u_1 + x_2u_2 + \cdots + x_nu_n \Rightarrow [u]_\beta = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{2}$$

e como $T(u) \in V$, então

$$T(u) = y_1v_1 + y_2v_2 + \cdots + y_mv_m \Rightarrow [T(u)]_{\beta'} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Como $T(u_j) \in W$, $1 \leq j \leq n$, então

$$T(u_j) = \alpha_{1j}v_1 + \alpha_{2j}v_2 + \cdots + \alpha_{mj}v_m \Rightarrow [T(u_j)]_{\beta'} = \begin{bmatrix} \alpha_{1j} \\ \alpha_{2j} \\ \vdots \\ \alpha_{mj} \end{bmatrix}.$$

Então, a partir de algumas contas obtemos em forma matricial

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

desta forma, se escrevemos

$$\begin{aligned}[T]_{\beta'}^{\beta} &= \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} [T(u_1)]_{\beta'} & [T(u_2)]_{\beta'} & \cdots & [T(u_n)]_{\beta'} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

temos

$$[T(u)]_{\beta'} = [T]_{\beta'}^{\beta}[v]_{\beta}. \tag{4}$$

A matriz $[T]_{\beta'}^{\beta}$ é chamada matriz de T em relação às β e β'. Note que a ordem da matriz $[T]_{\beta'}^{\beta}$ é $dim\, U \times dim\, V$.

Exemplo 2.1. *Seja $D : P_3(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ a transformação $D(p(t)) = p'(t)$. Sejam $\beta = \{1, x, x^2, x^3\}$ e $\beta' = \{1, x, x^2\}$ sejam bases de $P_3(\mathbb{R})$ e $P_2(\mathbb{R})$, respectivamente.*

(a) Encontre a matriz $[D]_{\beta'}^{\beta}$.

Note que

- $D(1) = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2$;
- $D(x) = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2$;
- $D(x^2) = 2x = 0 \cdot 1 + 2 \cdot x + 0 \cdot x^2$;
- $D(x^3) = 3x^2 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 3 \cdot x^2$;

ou seja,

$$[D]_{\beta'}^{\beta} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

(b) Usando o item (a), calcule $D(5 - x - 2x^3)$ e $D(a + bx + cx^2 + dx^3)$.

Neste item, queremos aplicar a equação (4).

Inicialmente, temos que

$$[5 - x - 2x^3]_\beta = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \text{ e } [a + bx + cx^2 + dx^3]_\beta = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} [D(5 - x - 2x^3)]_{\beta'} &= [D]^\beta_{\beta'}[(5 - x - 2x^3]_\beta \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} [D(a + bx + cx^2 + dx^3)]_{\beta'} &= [D]^\beta_{\beta'}[a + bx + cx^2 + dx^3]_\beta \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ 2c \\ 3d \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Portanto, $D(5 - x - 2x^3) = -1 \cdot 1 + 0 \cdot x + (-6) \cdot x^2 = -1 - 6x^2$ *e* $D(a + bx + cx^2 + dx^3) = b \cdot 1 + 2c \cdot x + 3d \cdot x^2 = b + 2cx + 3dx^2$.

Observação 2.2. *O exemplo anterior, tem como objetivo calcular a derivada de um polinômio usando matriz de uma transformação linear. Claramente, se utilizamos as regras de derivação obtemos o desejado.*

O próximo exemplo terá como proposta: trabalhar com um operador linear.

Exemplo 2.2. *Seja* $\mathscr{D}$ *o espaço vetorial de todas as funções deriváveis. Considere o subespaço* W *de* $\mathscr{D}$ *dado por* $W = [e^{3x}, xe^{3x}, x^2e^{3x}]$.

(a) Mostre que $\beta = \{e^{3x}, xe^{3x}, x^2e^{3x}\}$ *é linearmente independente.*

Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ *tais que*

$$\alpha_1 e^{3x} + \alpha_2 xe^{3x} \alpha_3 x^2 e^{3x} = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Como e^{3x} nunca se anula para qualquer valor real para x, então

$$\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Sabendo que a equação acima vale para todo número real x; em particular, vale para os seguintes valores de x: 0,-1,1. Sendo assim, teremos um sistema homogêneo de três equações e três incógnitas que apresenta a única solução $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Portanto, β é linearmente independente.

(b) *Mostre que o operador diferencial $D(p(x)) = p'(x)$ aplica W em W.*

Seja $p(x) \in W$, sendo assim $p(x) = ae^{3x} + bxe^{3x} + cx^2e^{3x}$. Então,

$$\begin{aligned} D(p(x)) &= (ae^{3x} + bxe^{3x} + cx^2e^{3x})' \\ &= (3a+b)e^{3x} + (3b+2c)xe^{3x} + (3c)x^2e^{3x}. \end{aligned}$$

Como $D(p(x))$ é uma combinação linear dos elementos de que geram W, então $D(p(x)) \in W$.

(c) *Encontre $[D]_\beta$.*

Do item (a), já temos que $D(ae^{3x}+bxe^{3x}+cx^2e^{3x}) = (3a+b)e^{3x} + (3b+2c)xe^{3x} + (3c)x^2e^{3x}$, logo

$$[D(e^{3x})]_\beta = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, [D(xe^{3x})]_\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \ e \ [D(x^2e^{3x})]_\beta = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix};$$

isto é,

$$[D]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

(d) *Calcule $D(5e^{3x} + 2xe^{3x} - x^2e^{ex})$ indiretamente usando (a).*

Note que

$$\begin{aligned} [D(5e^{3x} + 2xe^{3x} - x^2e^{ex})]_\beta &= [D]_\beta^\beta [5e^{3x} + 2xe^{3x} - x^2e^{ex}]_\beta \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}; \end{aligned}$$

então $D(5e^{3x} + 2xe^{3x} - x^2e^{ex}) = 17e^{3x} + 4xe^{3x} - 3x^2e^{ex}$.

Agora recordaremos algumas propriedades dos operadores.

(I) Se T é invertível e T^{-1} é seu inverso, então

$$T \circ T^{-1} = T^{-1} \circ T = I.$$

(II) T é invertível se, e somente se, $\ker(T) = \{0\}$

(III) Se T é invertível e β é uma base de V, então $T^{-1} : V \to V$ é linear e

$$\left[T^{-1}\right]_\beta = [T]_\beta^{-1}$$

Note que T é invertível se, e somente se, $\det[T]_\beta \neq 0$.

3. Integração com o operador inverso

Quando damos início ao estudo de integrais, o começo do desenvolvimento da teoria é pensar em primitivas/antiderivadas e percebemos que a integral é "o caminho inverso" da derivada. Sendo assim, se temos que o operador linear diferencial $D(p(x)) = p'(x)$ é invertível, então podemos dizer que

$$D^{-1}(p'(x)) = \int p'(x)\, dx = p(x).$$

Evidentemente, sabemos que deveria aparece uma constante; por outro lado, como estamos com operadores, sabemos que o operador linear (transformação linear) associa o vetor nulo ao vetor nulo. Por isso neste caso, a constante é nula.

A seguir, veremos como calcular a integral utilizando o operador linear inverso.

Exemplo 3.1. *Seja $\mathscr{D}$ o espaço vetorial de todas as funções deriváveis. Considere o subespaço W de $\mathscr{D}$ dado por $W = [e^{3x}, xe^{3x}, x^2e^{3x}]$. Sejam operador diferencial $T(p(x)) = p'(x)$ em W e $\beta = \{e^{3x}, xe^{3x}, x^2e^{3x}\}$ a base de W.*

(a) *Mostre que D é invertível.*

Vimos no Exemplo 2.2 que

$$[D]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Observe que $\det\left([D]_\beta^\beta\right) = 27 \neq 0$, *então D é um operador invertível e*

$$[D^{-1}]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{2}{27} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{9} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

(b) *Calcule* $\displaystyle\int x^2e^{3x}\,dx$.

Veja que

$$[x^2e^{3x}]_\beta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Então,

$$\begin{aligned} \left[\int x^2e^{3x}\,dx\right]_\beta = \left[D^{-1}(x^2e^{3x})\right]_\beta &= [D^{-1}]_\beta^\beta[x^2e^{3x}]_\beta \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{2}{27} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{9} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{27} \\ -\frac{2}{9} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}; \end{aligned}$$

portanto, $\displaystyle\int x^2e^{3x}\,dx = \frac{2}{27}e^{3x} - \frac{2}{9}xe^{3x} + \frac{1}{3}x^2e^{3x}$.

Observação 3.1. *Veremos como é calculada a integral* $\displaystyle\int x^2e^{3x}\,dx$ *usando as ferramentas do Cálculo. Usando a integração por partes, sejam*

$$\begin{gathered} u = x^2 \Longrightarrow du = 2x\,dx \\ dv = e^{3x}\,dx \Longrightarrow v = \tfrac{e^{3x}}{3}. \end{gathered}$$

Então,

$$\int x^2e^{3x}\,dx = x^2\frac{e^{3x}}{3} - \int 2x\frac{e^{3x}}{3}\,dx = x^2\frac{e^{3x}}{3} - \frac{2}{3}\int xe^{3x}\,dx.$$

Para calcular $\int xe^{3x}\,dx$, mais uma vez vamos utilizar a integração por partes. Sejam

$$u = x \Longrightarrow du = dx$$
$$dv = e^{3x}\,dx \Longrightarrow v = \tfrac{e^{3x}}{3}.$$

Logo,

$$\int xe^{3x}\,dx = x\frac{e^{3x}}{3} - \int \frac{e^{3x}}{3}\,dx = x\frac{e^{3x}}{3} - \frac{e^{3x}}{9} + c_1,$$

onde c_1 é uma constante. Desta forma,

$$\begin{aligned}\int x^2e^{3x}\,dx &= x^2\frac{e^{3x}}{3} - \frac{2}{3}\int xe^{3x}\,dx\\ &= \frac{1}{3}x^2e^{3x} - \frac{2}{3}\left[x\frac{e^{3x}}{3} - \frac{e^{3x}}{9} + c_1\right]\\ &= \frac{1}{3}x^2e^{3x} - \frac{2}{9}xe^{3x} + \frac{2}{27}e^{3x} + c\\ &= \frac{2}{27}e^{3x} - \frac{2}{9}xe^{3x} + \frac{1}{3}x^2e^{3x} + c.\end{aligned}$$

4. Sugestões de atividades

1. Seja $\mathscr{D}$ o espaço vetorial de todas as funções deriváveis. Considere o subespaço W de $\mathscr{D}$ dado por $W = [\sin(x), \cos(x)]$. Sejam operador diferencial $T(p(x)) = p'(x)$ em W e $\beta = \{\sin(x), \cos(x)\}$ a base de W.

    (a) Mostre que $\beta = \{\sin(x), \cos(x)\}$ é linearmente independente.

    (b) Mostre que o operador diferencial $D(p(x)) = p'(x)$ aplica W em W.

    (c) Encontre $[D]_\beta$.

    (d) Calcule $D(3\sin(x) - 5\cos(x))$ indiretamente usando (a).

(e) Mostre que D é invertível e determine $[D^{-1}]_{\beta}^{\beta}$.

(f) Calcule $\displaystyle\int \sin(x) - 3\cos(x)\,dx$.

2. Seja $\mathscr{D}$ o espaço vetorial de todas as funções deriváveis. Considere o subespaço W de $\mathscr{D}$ dado por $W = [e^{2x}, e^{-2x}]$. Sejam operador diferencial $T(p(x)) = p'(x)$ em W e $\beta = \{e^{2x}, e^{-2x}\}$ a base de W.

   (a) Mostre que $\beta = \{e^{2x}, e^{-2x}\}$ é linearmente independente.

   (b) Mostre que o operador diferencial $D(p(x)) = p'(x)$ aplica W em W.

   (c) Encontre $[D]_{\beta}$.

   (d) Calcule $D(e^{2x} - 3e^{-2x})$ indiretamente usando (a).

   (e) Mostre que D é invertível e determine $[D^{-1}]_{\beta}^{\beta}$.

   (f) Calcule $\displaystyle\int 5e^{-2x}\,dx$.

3. Seja $\mathscr{D}$ o espaço vetorial de todas as funções deriváveis. Considere o subespaço W de $\mathscr{D}$ dado por $W = [e^{2x}, e^{2x}\sin(x), e^{2x}\cos(x)]$. Sejam operador diferencial $T(p(x)) = p'(x)$ em W e

$$\beta = \{e^{2x}, e^{2x}\sin(x), e^{2x}\cos(x)\}$$

   a base de W.

   (a) Mostre que $\beta = \{e^{2x}, e^{2x}\sin(x), e^{2x}\cos(x)\}$ é linearmente independente.

   (b) Mostre que o operador diferencial $D(p(x)) = p'(x)$ aplica W em W.

   (c) Encontre $[D]_{\beta}$.

   (d) Calcule $D(3e^{2x}+2e^{2x}\sin(x)-e^{2x}\cos(x))$ indiretamente usando (a).

   (e) Mostre que D é invertível e determine $[D^{-1}]_{\beta}^{\beta}$.

   (f) Calcule $\displaystyle\int -2e^{2x}\sin(x) + e^{2x}\cos(x)\,dx$.

4. Seja $\mathscr{D}$ o espaço vetorial de todas as funções deriváveis. Considere o subespaço W de $\mathscr{D}$ dado por $W = [\sin(x), \cos(x), x\sin(x), x\cos(x)]$. Sejam operador diferencial $T(p(x)) = p'(x)$ em W e

$$\beta = \{\sin(x), \cos(x), x\sin(x), x\cos(x)\}$$

a base de W.

(a) Mostre que $\beta = \{\sin(x), \cos(x), x\sin(x), x\cos(x)\}$ é linearmente independente.

(b) Mostre que o operador diferencial $D(p(x)) = p'(x)$ aplica W em W.

(c) Encontre $[D]_\beta$.

(d) Calcule $D(\cos(x) + 2x\cos(x))$ indiretamente usando (a).

(e) Mostre que D é invertível e determine $[D^{-1}]_\beta^\beta$.

(f) Calcule $\displaystyle\int x\sin(x) + x\cos(x)\,dx$.

Referências

1. Jose Luiz Boldrini. *Álgebra linear.* HARBRA, 1986.

2. David Poole. *Álgebra Linear.* Cengage Learning, São Paulo, 2014.