J Jornal Eletrônico de Ensino e Pesquisa de Matemática
(1s.) **v. 2** 1 (2018): 45–79. ©Jeepema–ISSN-2594-6323.
www.dma.uem.br/kit/jeepema

Elementos do Cálculo Fracionário

Sandra Maria Tieppo –UFPR e Sandro Marcos Guzzo–UNIOESTE

Resumo: O cálculo fracionário é o ramo da matemática que estuda os conceitos de derivada e integral de ordem arbitrária. Estes conceitos são úteis para a modelagem matemática de fenômenos que envolvem equações diferenciais de ordem arbitrária. Neste trabalho daremos uma definição de derivada e de integral de ordem arbitrária e suas principais propriedades. Aplicaremos também a teoria do cálculo fracionário em equações diferenciais ordinárias (EDOs) de ordem arbitrária.

Palavras-chave: Cálculo fracionário. Derivada fracionária. EDOs de ordem fracionária.

Sumário

1. Introdução

Uma das ferramentas mais importantes na compreensão de fenômenos naturais é a Modelagem Matemática. A ideia é identificar características fundamentais do sistema a ser estudado, de maneira a se obter um conjunto de regras matemáticas simples o suficiente para que se possa extrair informações úteis delas, mas que ainda descrevam os fenômenos mais importantes associados ao sistema em questão.

Estas regras assumem as mais diferentes formas, dependendo da natureza do problema e da conveniência na obtenção de soluções. Em diversas situações este conjunto de regras conduz a uma equação diferencial ordinária (EDO). Em alguns casos entretanto, a equação diferencial obtida não possui ordem inteira, conduzindo ao caso de uma equação diferencial de ordem fracionária. Mesmo quando a equação diferencial possui ordem inteira a modelagem por equações de ordem fracionária pode descrever uma modelagem mais precisa do fenômeno de interesse.

O cálculo fracionário é o ramo da matemática que estuda a extensão dos conceitos de derivada e de integral para uma ordem arbitrária (não necessariamente fracionária). Esta definição foge do conceito tradicional de derivada e integral de um curso de cálculo diferencial e integral.

O conceito de cálculo fracionário (derivadas e integrais de ordem arbitrária) não é novo. Em 1695 L'Hospital escreveu uma carta para Leibniz, perguntando: "Qual o significado de $\frac{d^n y}{dx^n}$ se $n = \frac{1}{2}$?". Leibniz respondeu: "Um aparente paradoxo, do qual algum dia, consequências úteis poderão ser feitas". L'Hospital é conhecido como o pai do cálculo fracionário.

Nas últimas décadas vários autores deram seus significados particulares para a expressão $\frac{d^n y}{dx^n}$ com n não necessariamente inteiro positivo. Por este motivo existem várias noções de derivada de ordem não inteira, também chamada derivada de ordem fracionária, mesmo que a ordem não seja necessariamente um número racional. Naturalmente algumas definições se mostraram mais úteis do que outras em virtude de suas melhores propriedades.

Embora existam muitas aplicações para o cálculo fracionário, neste texto estamos interessados apenas em um estudo teórico preliminar. Também nos restringiremos às definições de integral de ordem fracionária de Riemann-Liouville e de derivada de ordem fracionária de Caputo. Para o desenvolvimento da teoria do cálculo fracionário será importante o conhecimento de alguns outros conceitos como a função gama, a função beta e as funções de Mittag-Leffler.

O objetivo deste texto é introduzir ao leitor aspectos do cálculo fracionário, e para isto, está organizado da seguinte maneira. Primeiro estudaremos conceitos importantes para um melhor entendimento das derivadas e integrais de ordem arbitrária. Na sequência apresentamos as noções de integral de ordem fracionária de Riemann-Liouville e derivada fracionária de Caputo. Apresentaremos também algumas propriedades das integrais e derivadas de ordem fracionária. Por fim apresentamos duas equações diferenciais de ordem arbitrária e suas soluções por meio da teoria apresentada.

2. Função Gama

Definição 2.1. A função gama é a função que a cada real positivo $x > 0$ associa o número real representado por $\Gamma(x)$ determinado pela integral

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{(x-1)} e^{-t} dt.$$

Notemos que a função gama é uma integral imprópria. É preciso portanto garantir a convergência desta integral. Pode ser provado que a integral converge qualquer que seja $x \in (0, \infty)$. Mais ainda, a integral converge se $x \in \mathbb{C}$ com $Re(x) > 0$. Neste texto entretanto não temos o interesse na definição desta função a valores complexos.

Dentre as importantes propriedades da função gama podemos citar que para qualquer $x > 0$,

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \tag{1}$$

e que $\Gamma(1) = 1 = 0!$. Estas duas propriedades fazem a função gama ser chamada de fatorial generalizado. De outra forma, a função gama é definida para todo $x \in (0, \infty)$, mas quando restrita ao conjunto dos naturais, se resume ao fatorial.

De fato, para qualquer $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\Gamma(n+1) &= n\Gamma(n) \\
&= n(n-1)\Gamma(n-2) \\
&= n(n-1)(n-2)\Gamma(n-3) \\
&\ \ \vdots \\
&= n(n-1)(n-2)\cdots\Gamma(1) \\
&= n(n-1)(n-2)\cdots 1 = n!.
\end{aligned}$$

Para as demonstrações das afirmações dadas acima, outras informações e propriedades sobre a função gama ou a sua definição a valores complexos, sugerimos Oliveira (2012).

3. Função Beta

A função Beta é definida em geral a dois parâmetros complexos z e w, com $Re(z) > 0$ e $Re(w) > 0$. Entretanto, neste texto não estamos interessados no trato com números complexos e portanto faremos a definição da função beta a dois parâmetros reais.

Definição 3.1. A função beta é a função que a cada par de números reais u e v positivos faz corresponder o número $B(u,v)$ dado por

$$B(u,v) = \int_0^\infty t^{u-1}(1+t)^{-u-v}dt.$$

Pode-se provar que a integral imprópria da definição anterior converge para quaisquer que sejam $u, v \in (0,\infty) \subset \mathbb{R}$. A seguir veremos alguns resultados importantes sobre esta função. Em particular estamos interessados em uma propriedade que relaciona a função Beta com a função Gama.

Proposição 3.2. *Se u e v são dois números reais positivos, então*

$$\int_0^\infty t^{u-1}(1+t)^{-u-v}dt = \int_0^1 s^{u-1}(1-s)^{v-1}ds.$$

Demonstração. Fazendo a mudança de variáveis $s = \frac{t}{t+1}$, temos que $\frac{ds}{dt} = \frac{1}{(t+1)^2}$. Também quando $t \to \infty$ temos $s \to 1$ e quando $t = 0$ temos $s = 0$. Segue que

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty t^{u-1}(1+t)^{-u-v}dt &= \int_0^\infty \left(\frac{t}{1+t}\right)^{u-1}(1+t)^{-u-v}(1+t)^{u-1}dt \\
&= \int_0^\infty \left(\frac{t}{1+t}\right)^{u-1}(1+t)^{-v-1}dt \\
&= \int_0^\infty \left(\frac{t}{1+t}\right)^{u-1}(1+t)^{-v+1}\frac{1}{(t+1)^2}dt
\end{aligned}$$

$$= \int_0^\infty s^{u-1} \left(\frac{1}{1-s}\right)^{-v+1} \frac{ds}{dt} dt = \int_0^1 s^{u-1}(1-s)^{v-1} ds.$$

□

A última proposição nos dá uma forma alternativa para a função beta. Deste ponto em diante, para quaisquer u e v positivos,

$$B(u,v) = \int_0^1 t^{u-1}(1-t)^{v-1} dt = \int_0^\infty t^{u-1}(1+t)^{-u-v} dt, \tag{2}$$

sendo que escolheremos a integral a ser utilizada, dependendo do interesse. Como por exemplo fica evidente que a integral em $[0,1]$, com a mudança de variável $t = (1-s)$, nos conduz à igualdade $B(u,v) = B(v,u)$ para quaisquer reais positivos u e v. Esta propriedade não ficaria tão evidente se utilizada a integral em $[0,\infty)$. Também para provarmos a relação entre a função Beta e a função Gama usaremos a integral em $[0,1]$. A próxima proposição trata desta relação, e para ela precisamos de um lema auxiliar.

Lema 3.3. *Se u e v são números reais positivos, então*

$$B(u,v) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2u-1}\theta \operatorname{sen}^{2v-1}\theta d\theta.$$

Demonstração. De fato, da definição

$$B(u,v) = \int_0^1 t^{u-1}(1-t)^{v-1} dt,$$

fazendo a mudança de variáveis $t = \cos^2\theta$, temos $\frac{dt}{d\theta} = -2\cos\theta \operatorname{sen}\theta$, e então

$$\begin{aligned}
B(u,v) &= \int_0^1 t^{u-1}(1-t)^{v-1} dt \\
&= -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 (\cos\theta)^{2u-2}(1-\cos^2\theta)^{v-1} 2\cos\theta \operatorname{sen}\theta d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^{2u-2}(\operatorname{sen}\theta)^{2v-2} 2\cos\theta \operatorname{sen}\theta d\theta \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^{2u-1}(\operatorname{sen}\theta)^{2v-1} d\theta.
\end{aligned}$$

□

Proposição 3.4. *Se u e v são dois números reais positivos, então*

$$B(u,v) = \frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)}.$$

Demonstração. Da definição da função gama, temos que

$$\begin{aligned}\Gamma(u)\Gamma(v) &= \int_0^\infty t^{(u-1)}e^{-t}dt \int_0^\infty s^{(v-1)}e^{-s}ds \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-t-s}t^{(u-1)}s^{(v-1)}dtds.\end{aligned}$$

Fazemos a mudança das variáveis t e s para as variáveis ρ e θ pelas expressões

$$t = \rho\cos^2\theta \qquad \text{e} \qquad s = \rho\,\mathrm{sen}^2\,\theta,$$

e temos que quando $t \in (0,\infty)$ e $s \in (0,\infty)$ então $\rho \in (0,\infty)$ e $\theta \in (0,\frac{\pi}{2})$ e além disso,

$$\left|\frac{\partial(t,s)}{\partial(\rho,\theta)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial t}{\partial\rho} & \frac{\partial t}{\partial\theta} \\ \frac{\partial s}{\partial\rho} & \frac{\partial s}{\partial\theta}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos^2\theta & -2\rho\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}^2\,\theta & 2\rho\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\end{vmatrix} = 2\rho\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta,$$

donde

$$\left|\frac{\partial(\rho,\theta)}{\partial(t,s)}\right| = \frac{1}{2\rho\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta}.$$

Desta forma,

$$\begin{aligned}\Gamma(u)\Gamma(v) &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-t-s}t^{(u-1)}s^{(v-1)}dtds \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\rho\cos^2\theta-\rho\,\mathrm{sen}^2\,\theta}\rho^{u-1}(\cos\theta)^{2u-2}\rho^{v-1}(\mathrm{sen}\,\theta)^{2v-2}dtds \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty 2e^{-\rho}\rho^{u+v-1}(\cos\theta)^{2u-1}(\mathrm{sen}\,\theta)^{2v-1}\frac{1}{2\rho\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta}dtds \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty 2e^{-\rho}\rho^{u+v-1}(\cos\theta)^{2u-1}(\mathrm{sen}\,\theta)^{2v-1}\left|\frac{\partial(\rho,\theta)}{\partial(t,s)}\right|dtds \\ &= \int_0^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2e^{-\rho}\rho^{u+v-1}(\cos\theta)^{2u-1}(\mathrm{sen}\,\theta)^{2v-1}d\theta d\rho \\ &= \int_0^\infty e^{-\rho}\rho^{u+v-1}2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta)^{2u-1}(\mathrm{sen}\,\theta)^{2v-1}d\theta d\rho \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta)^{2u-1}(\mathrm{sen}\,\theta)^{2v-1}d\theta \int_0^\infty e^{-\rho}\rho^{u+v-1}d\rho.\end{aligned}$$

Para a primeira integral do último membro levamos em conta o lema anterior. Já a segunda integral é exatamente $\Gamma(u+v)$. Segue que

$$\Gamma(u)\Gamma(v) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^{2u-1}(\operatorname{sen}\theta)^{2v-1}d\theta \int_0^{\infty} e^{-\rho}\rho^{u+v-1}d\rho = B(u,v)\Gamma(u+v),$$

e disto temos a igualdade desejada. □

O leitor interessado na definição da função beta a parâmetros complexos ou outras propriedades sobre a função Beta, pode consultar Oliveira (2012) ou Kilbas et al. (2006).

4. Funções de Mittag-Leffler

As funções de Mittag-Leffler foram propostas inicialmente pelo próprio Magnus Gösta Mittag-Leffler (1903) tendo introduzido a sua função $E_\alpha(x)$ a um parâmetro $\alpha > 0$. Humbert e Agarwal (1953) consideraram uma generalização da função de Mittag-Leffler propondo a função $E_{\alpha,\beta}(x)$ com um segundo parâmetro $\beta > 0$ que coincide com a função $E_\alpha(x)$ quando $\beta = 1$. Atualmente são conhecidas muitas generalizações da original função de Mittag-Leffler todas ainda conhecidas como funções de Mittag-Leffler.

Vamos agora apresentar as funções de Mittag-Leffler a um e a dois parâmetros e algumas de suas propriedades. Neste texto, estamos interessados somente nestas definições envolvendo a variável x e os parâmetros α e β reais.

Definição 4.1. A função de Mittag-Leffler a um parâmetro real $\alpha > 0$ é a função que a cada $x \in \mathbb{R}$, associa o número real $E_\alpha(x)$ dado por

$$E_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}.$$

É importante observamos que a série que define esta função é (absolutamente) convergente qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$. Além disso, note que se $\alpha = 1$ temos que

$$E_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x,$$

e por este motivo a função de Mittag-Leffler a um parâmetro é conhecida como função exponencial generalizada. Também podemos ver que,

$$E_2(-ax^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-ax^2)^k}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\sqrt{a}x)^{2k}}{(2k)!} = \cos(\sqrt{a}x), \tag{3}$$

e que

$$E_2(ax^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ax^2)^k}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{a}x)^{2k}}{(2k)!} = \cosh(\sqrt{a}x), \tag{4}$$

para qualquer que seja $a \in \mathbb{R}$ com $a \geq 0$.

Definição 4.2. A função de Mittag-Leffler a dois parâmetros reais, $\alpha > 0$ e $\beta > 0$, é a função que a cada $x \in \mathbb{R}$, associa o número real $E_{\alpha,\beta}(x)$ dado por

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}.$$

Claramente

$$E_{\alpha,1}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} = E_\alpha(x),$$

e desta forma a função de Mittag-Leffler a dois parâmetros é uma generalização da função de Mittag-Leffler a um parâmetro. Também

$$xE_{2,2}(-ax^2) = x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-ax^2)^k}{\Gamma(2k+2)} = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\sqrt{a}x)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{sen}(\sqrt{a}x), \tag{5}$$

e

$$xE_{2,2}(ax^2) = x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ax^2)^k}{\Gamma(2k+2)} = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{a}x)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{senh}(\sqrt{a}x), \tag{6}$$

qualquer que seja $a \in \mathbb{R}$ com $a > 0$. Também, fica claro das Definições 4.1 e 4.2 que

$$E_\alpha(0) = 1 \qquad \text{e} \qquad E_{\alpha,\beta}(0) = \frac{1}{\Gamma(\beta)}, \tag{7}$$

quaisquer que sejam $\alpha, \beta \in (0, \infty)$.

Dentre as muitas propriedades destas funções, para nosso estudo temos particular interesse na Transformada de Laplace das funções de Mittag-Leffler. Faremos isto na próxima seção.

O leitor interessado em um estudo mais aprofundado sobre as funções de Mittag-Leffler, suas propriedades ou ainda suas definições a valores e parâmetros complexos pode consultar Kilbas et al. (2006) ou Oliveira (2012).

5. Transformada de Laplace

Nesta seção apresentaremos a definição de Transformada de Laplace e algumas propriedades importantes desta Transformada. A Transformada de Laplace, conforme apresentada em Raimbault (2008), pertence a uma família muito vasta de transformadas integrais, que estabelecem uma relação entre uma função f e a sua transformada F, da forma

$$F(s) = \int_I K(s,t) f(t) dt. \tag{8}$$

Uma transformada particular necessita então da definição do núcleo $K(s,t)$ e do intevalo de integração I, sendo estes escolhidos dependendo do interesse ou da aplicação. As transformadas mais utilizadas são a de Fourier, que requer

$$I = \mathbb{R} = (-\infty, \infty) \qquad \text{e} \qquad K(s,t) = e^{-ist}, \quad s \in \mathbb{R}$$

e a de Laplace, que requer

$$I = [0, \infty) \qquad \text{e} \qquad K(s,t) = e^{-st}, \quad s = a + ib \in \mathbb{C}.$$

Já que s é complexo nesta última expressão, a Transformada de Laplace é uma generalização da Transformada de Fourier. Neste texto entretanto, não estamos interessados no trato com os números complexos, e portanto consideraremos a Transformada de Laplace quando $s \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Nestes termos, segue a definição de Transformada de Laplace que utilizaremos.

Definição 5.1. Seja f uma função definida para $t \geq 0$. A integral imprópria

$$F(s) = \mathcal{L}(f)(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt, \tag{9}$$

quando existir, será chamada de Transformada de Laplace de f.

Quando a integral imprópria acima existir, a integral dependerá de s, e portanto será uma função da variável independente s. É natural pensarmos que a convergência da integral depende também de s. Os valores de s para os quais a integral existe constituem o domínio de definição da função $F(s)$, a Transformada de Laplace de $f(t)$. Iremos omitir todas as restrições sobre s e entendemos que s seja considerado no conjunto em que a integral em (9) converge.

Usaremos a expressão "f admite Transformada de Laplace" ou "a Transformada de Laplace de f existe" para dizer que a integral da definição converge. Usaremos geralmente letras minúsculas para denotar uma função e a letra maiúscula correspondente para denotar a sua transformada de Laplace. Isto significa que $F(s) = \mathcal{L}(f)(s)$. É comum também escrever $\mathcal{L}(f(t))(s)$ ou $(\mathcal{L}f)(s)$ para denotar a Transformada de Laplace de f. Por padronização, usaremos sempre, salvo menção em contrário, t a variável da função e s a variável da Transformada de Laplace desta função.

Notemos ainda que ao afirmar que a Transformada de uma função $f(t)$ existe, então a integral da definição converge, e sendo uma integral imprópria, é obrigatório que $e^{-st}f(t) \to 0$ quando $t \to \infty$.

A seguir veremos algumas propriedades envolvendo a Transformada de Laplace. Estas propriedades são de interesse imediato para aplicarmos esta transformada na obtenção de soluções de EDOs lineares de ordem n a coeficientes constantes.

Proposição 5.2. *A Transformada de Laplace é um operador linear. De outra forma, se f e g são funções que admitem Transformadas de Laplace e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, então $(\alpha f + \beta g)$ admite Transformada de Laplace e, além disso,*

$$\mathcal{L}(\alpha f + \beta g) = \alpha(\mathcal{L}f) + \beta(\mathcal{L}g).$$

Proposição 5.3 (Transformada de uma derivada)**.** *Se f e f' forem contínuas em $[0, \infty)$ e tais que as transformadas de Laplace existem, então*

$$(\mathcal{L}f')(s) = s(\mathcal{L}f)(s) - f(0).$$

As demonstrações destas duas últimas proposições podem ser encontradas em Zill (2016).

Podemos usar esta última proposição repetidamente para obter expressões que envolvem a Transformada de Laplace das derivadas de ordem superior de uma função f. Admitindo que f, f' e f'' são funções cuja Transformada de Laplace existem, então

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}f'')(s) &= s(\mathcal{L}f')(s) - f'(0)\\ &= s(s(\mathcal{L}f)(s) - f(0)) - f'(0) = s^2(\mathcal{L}f)(s) - sf(0) - f'(0),\end{aligned}$$

e assim sucessivamente. O próximo corolário resume a expressão para o caso de uma derivada de ordem $n \in \mathbb{N}^*$ arbitrária. Não apresentaremos sua demonstração que segue da proposição anterior e do princípio de indução finita.

Corolário 5.4. *Seja $n \in \mathbb{N}^*$. Se $f, f', f'', \dots, f^{(n)}$ forem contínuas em $[0, \infty)$ e tais que as Transformadas de Laplace existem, então*

$$(\mathcal{L}f^{(n)})(s) = s^n(\mathcal{L}f)(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-1-k} f^{(k)}(0),$$

sendo que $f^{(0)}$ é entendida como sendo f.

Definição 5.5. Se $F(s) = (\mathcal{L}f)(s)$ representa a Transformada de Laplace de uma função $f(t)$, dizemos então que $f(t)$ é a Transformada inversa de Laplace de $F(s)$ e escrevemos $f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s))(t) = (\mathcal{L}^{-1}F)(t)$.

A transformada inversa de Laplace é também um operador linear, isto é, $\mathcal{L}^{-1}(\alpha F(s) + \beta G(s))(t) = \alpha\mathcal{L}^{-1}(F(s))(t) + \beta\mathcal{L}^{-1}(G(s))(t)$. Os próximos exemplos ilustram com mais detalhes a ideia da definição anterior.

Exemplo 1. Se $a \in \mathbb{R}$, então para a função $f(t) = e^{at}$ temos

$$(\mathcal{L}f)(s) = \mathcal{L}(e^{at})(s) = \frac{1}{s-a},$$

para todo $s > a$. De fato,

$$\mathcal{L}(e^{at})(s) = \int_0^\infty e^{-st}e^{at}dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}dt = -\frac{e^{-(s-a)t}}{(s-a)}\bigg|_{t=0}^{\infty} = \frac{1}{s-a},$$

desde que $s > a$. Fica claro que, quando $s = a$ então $e^{-(s-a)t} = 1$ e a integral diverge e também, quando $s < a$, então $e^{-(s-a)t} \to \infty$ quanto $t \to \infty$. Então a integral diverge se $s \leq a$.

Nestes termos se $F(s) = \frac{1}{s-a}$ então

$$(\mathcal{L}^{-1}F)(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\tfrac{1}{s-a}\right) = e^{at}.$$

Exemplo 2. Se $a \in \mathbb{R}$, então para $f(t) = \cos(at)$, temos

$$(\mathcal{L}f)(s) = \mathcal{L}(\cos(at))(s) = \frac{s}{s^2+a^2},$$

desde que $s > 0$. Para provar isto, seja então $a \in \mathbb{R}$. Temos que

$$\mathcal{L}(\cos(at))(s) = \int_0^\infty e^{-st}\cos(at)dt.$$

Vamos determinar a integral do segundo membro usando integração por partes. Escolhendo $u = e^{-st}$ e $\frac{dv}{dt} = \cos(at)$, temos que $\frac{du}{dt} = (-s)e^{-st}$ e $v = \frac{1}{a}\operatorname{sen}(at)$. Assim,

$$\int_0^\infty e^{-st}\cos(at)dt = \frac{1}{a}e^{-st}\operatorname{sen}(at)\Big|_{t=0}^{\infty} - \int_0^\infty (-s)e^{-st}(\tfrac{1}{a})\operatorname{sen}(at)dt.$$

Analisando $e^{-st}\operatorname{sen}(at)$ quando $t \to \infty$, verificamos que $e^{-st} \to 0$ pois $s > 0$, e sendo a função seno limitada temos que $e^{-st}\operatorname{sen}(at) \to 0$ quando $t \to \infty$. Logo

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-st}\cos(at)dt &= \frac{1}{a}e^{-st}\operatorname{sen}(at)\Big|_{t=0}^{\infty} - \int_0^\infty (-s)e^{-st}(\tfrac{1}{a})\operatorname{sen}(at)dt \\ &= \frac{s}{a}\int_0^\infty e^{-st}\operatorname{sen}(at)dt.\end{aligned}$$

Novamente integrando por partes, colocamos $u = e^{-st}$ e $\frac{dv}{dt} = \operatorname{sen}(at)$ e com isto, $\frac{du}{dt} = (-s)e^{-st}$ e $v = -\frac{1}{a}\cos(at)$. Assim,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-st}\cos(at)dt &= \frac{s}{a}\int_0^\infty e^{-st}\operatorname{sen}(at)dt \\ &= -\frac{s}{a^2}e^{-st}\cos(at)\Big|_{t=0}^{\infty} - \frac{s}{a}\int_0^\infty (-s)e^{-st}(-\tfrac{1}{a})\cos(at)dt.\end{aligned}$$

Novamente $e^{-st}\cos(at) \to 0$ quando $t \to \infty$ pois $s > 0$ e cosseno é uma função limitada. Então segue que

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-st}\cos(at)dt &= -\frac{s}{a^2}e^{-st}\cos(at)\Big|_{t=0}^{\infty} + \frac{s}{a}\int_0^\infty (-s)e^{-st}\tfrac{1}{a}\cos(at)dt \\ &= \frac{s}{a^2} - \frac{s^2}{a^2}\int_0^\infty e^{-st}\cos(at)dt.\end{aligned}$$

Multiplicando ambos os membros por a^2, e reorganizando vem

$$(s^2 + a^2)\int_0^\infty e^{-st}\cos(at)dt = s,$$

donde temos que

$$\mathcal{L}(\cos(at))(s) = \int_0^\infty e^{-st}\cos(at)dt = \frac{s}{s^2+a^2},$$

desde que $s > 0$.

Sendo assim, se $F(s) = \frac{1}{s^2+a^2}$ então

$$(\mathcal{L}^{-1}F)(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+a^2}\right) = \cos(at).$$

O próximo exemplo ilustra o uso dos dois exemplos anteriores na solução de um problema de valor inicial.

Exemplo 3. Consideremos o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y''' - y'' + y' - y = 4e^{-t} \\ y(0) = -1, \quad y'(0) = 3, \quad y''(0) = 3. \end{cases}$$

e vamos usar a Transformada de Laplace para determinar a solução $y(t)$ deste sistema. Aplicando a Transformada de Laplace em ambos os membros da equação diferencial temos que

$$\mathcal{L}(y''' - y'' + y' - y)(s) = \mathcal{L}(4e^{-t})(s),$$

e usando as proposições 5.2 e 5.3 e os resultados dos dois exemplos anteriores, temos que

$$(s^3Y(s) + s^2 - 3s - 3) - (s^2Y(s) + s - 3) + (sY(s) + 1) - Y(s) = 4\frac{1}{s+1},$$

sendo que $Y(s) = (\mathcal{L}y)(s)$. Podemos reorganizar os termos e reescrevemos,

$$(s^3 - s^2 + s - 1)Y(s) + (s^2 - 4s + 1) = \frac{4}{s+1},$$

e portanto

$$(s^3 - s^2 + s - 1)Y(s) = \frac{4}{s+1} - (s^2 - 4s + 1) = \frac{3 + 3s + 3s^2 - s^3}{s+1},$$

donde obtemos

$$Y(s) = \frac{3 + 3s + 3s^2 - s^3}{(s+1)(s^3 - s^2 + s - 1)} = \frac{3 + 3s + 3s^2 - s^3}{(s+1)(s-1)(s^2+1)}.$$

O que temos que fazer agora, antes de aplicar a Transformada de Laplace Inversa, é organizar o segundo membro para podermos aplicar os resultados dos exemplos anteriores. Então usando a técnica de separação de frações parciais obtemos que

$$Y(s) = \frac{3 + 3s + 3s^2 - s^3}{(s+1)(s-1)(s^2+1)} = \frac{-1}{s+1} + \frac{2}{s-1} + \frac{-2s}{s^2+1},$$

e aplicando em ambos os membros a transformada inversa, temos que

$$\begin{aligned} y(t) &= (\mathcal{L}^{-1}Y)(t) \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{-1}{s+1} + \frac{2}{s-1} + \frac{-2s}{s^2+1}\right)(t) \\ &= -\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right)(t) + 2\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right)(t) - 2\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+1}\right)(t) \\ &= -e^{-t} + 2e^{t} - 2\cos(t). \end{aligned}$$

Agora estamos interessados em determinar as Transformadas de Laplace das funções de Mittag-Leffler. Queremos então obter $\mathcal{L}(E_\alpha(t))$ e $\mathcal{L}(E_{\alpha,\beta}(t))$, ou alguma outra expressão que nos permita estabelecer uma relação entre as funções de Mittag-Leffler e suas Transformadas de Laplace. Em verdade, vamos determinar as Transformadas de Laplace das funções $f(t) = E_\alpha(t^\alpha)$ e $f(t) = t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(t^\alpha)$. As próximas proposições tratam isto.

Proposição 5.6. *Para quaisquer $a, \alpha \in \mathbb{R}$ com $\alpha > 0$, tem-se*

$$\mathcal{L}(E_\alpha(at^\alpha))(s) = \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha - a},$$

para $s > a^{\frac{1}{\alpha}}$.

Demonstração. Da definição de Transformada de Laplace, temos que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(E_\alpha(at^\alpha))(s) &= \int_0^\infty e^{-st} E_\alpha(at^\alpha)dt \\ &= \int_0^\infty e^{-st} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k+1)} dt = \int_0^\infty \sum_{k=0}^{\infty} e^{-st} \frac{a^k t^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k+1)} dt.\end{aligned}$$

Como a série é convergente e a integral imprópria também converge, podemos comutar o sinal de integral com o sinal do somatório, e então

$$\mathcal{L}(E_\alpha(at^\alpha))(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^\infty e^{-st} \frac{a^k t^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k+1)} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{\Gamma(\alpha k+1)} \int_0^\infty e^{-st} t^{\alpha k} dt.$$

Vamos agora olhar para a integral do último membro. Fazendo nela a mudança de variável $u = st$ temos que $\frac{du}{dt} = s$, e assim

$$\int_0^\infty e^{-st} t^{\alpha k} dt = \int_0^\infty e^{-st} t^{\alpha k} \frac{1}{s} s dt = \int_0^\infty e^{-u} \left(\frac{u}{s}\right)^{\alpha k} \frac{1}{s} du = \frac{1}{s^{\alpha k+1}} \int_0^\infty e^{-u} u^{\alpha k} du.$$

Da definição da função gama, temos que a última integral é precisamente $\Gamma(\alpha k + 1)$. Segue que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(E_\alpha(at^\alpha))(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{\Gamma(\alpha k+1)} \int_0^\infty e^{-st} t^{\alpha k} dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{\Gamma(\alpha k+1)} \frac{1}{s^{\alpha k+1}} \int_0^\infty e^{-u} u^{\alpha k} du \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{\Gamma(\alpha k+1)} \frac{1}{s^{\alpha k+1}} \Gamma(\alpha k+1) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{s^{\alpha k+1}} = \frac{1}{s} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a}{s^\alpha}\right)^k.\end{aligned}$$

Levando em conta que $s > a^{\frac{1}{\alpha}}$ então $\frac{a}{s^\alpha} < 1$. Desta forma, a série do último membro é uma série geométrica convergente para o número

$$\frac{1}{1 - \frac{a}{s^\alpha}} = \frac{s^\alpha}{s^\alpha - a},$$

e portanto

$$\mathcal{L}(E_\alpha(at^\alpha))(s) = \frac{1}{s} \frac{s^\alpha}{s^\alpha - a} = \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha - a}.$$

□

Proposição 5.7. *Para quaisquer $a, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ com $\alpha, \beta > 0$, tem-se*

$$\mathcal{L}(t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(at^{\alpha}))(s) = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^{\alpha}-a},$$

para $s > a^{\frac{1}{\alpha}}$.

Demonstração. Começando com a definição de Transformada de Laplace, temos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(at^{\alpha}))(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st}t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(at^{\alpha})dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-st}t^{\beta-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(at^{\alpha})^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}dt = \int_0^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} e^{-st}\frac{a^k t^{\alpha k+\beta-1}}{\Gamma(\alpha k+\beta)}dt.\end{aligned}$$

Novamente, como a série e a integral imprópria do último membro são convergentes, podemos comutar o sinal de integral com o sinal do somatório, e então

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(at^{\alpha}))(s) &= \sum_{k=0}^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-st}\frac{a^k t^{\alpha k+\beta-1}}{\Gamma(\alpha k+\beta)}dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}\int_0^{\infty} e^{-st}t^{\alpha k+\beta-1}dt.\end{aligned}$$

Tomando a integral do último membro, fazemos a mudança de variável $u = st$. Temos que $\frac{du}{dt} = s$ e quando $t = 0$ então $u = 0$ e quando $t \to \infty$ também $u \to \infty$ já que $s > 0$. Assim

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} e^{-st}t^{\alpha k+\beta-1}dt &= \int_0^{\infty} e^{-st}t^{\alpha k+\beta-1}\frac{1}{s}sdt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-u}\left(\frac{u}{s}\right)^{\alpha k+\beta-1}\frac{1}{s}du = \frac{1}{s^{\alpha k+\beta}}\int_0^{\infty} e^{-u}u^{\alpha k+\beta-1}du.\end{aligned}$$

A última integral agora é igual a $\Gamma(\alpha k+\beta)$, donde segue que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(at^{\alpha}))(s) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}\int_0^{\infty} e^{-st}t^{\alpha k+\beta-1}dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}\frac{1}{s^{\alpha k+\beta}}\int_0^{\infty} e^{-u}u^{\alpha k+\beta-1}du\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \frac{1}{s^{\alpha k + \beta}} \Gamma(\alpha k + \beta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{s^{\alpha k + \beta}} = \frac{1}{s^\beta} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a}{s^\alpha}\right)^k.$$

Como $s > a^{\frac{1}{\alpha}}$ então $\frac{a}{s^\alpha} < 1$ e então a última série é uma série geométrica convergente e a sua soma é $\frac{s^\alpha}{s^\alpha - a}$. Portanto

$$\mathcal{L}(t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(at^\alpha))(s) = \frac{1}{s^\beta} \frac{s^\alpha}{s^\alpha - a} = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha - a},$$

como desejado. $\square$

Segue portanto que

$$\mathcal{L}(E_\alpha(at^\alpha))(s) = \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha - a} \qquad \text{e} \qquad \mathcal{L}(t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(at^\alpha))(s) = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha - a},$$

e nestes termos

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha - a}\right)(t) = E_\alpha(at^\alpha) \qquad \text{e} \qquad \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha - a}\right)(t) = t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(at^\alpha),$$

para quaisquer $a \in \mathbb{R}$ e $\alpha, \beta \in (0, \infty) \subset \mathbb{R}$.

6. Integral fracionária (de Riemann-Liouville)

Nesta seção discutiremos a definição de integral fracionária dada por Riemann-Liouville. Discutiremos ainda algumas propriedades desta definição.

Durante toda esta seção, usaremos o símbolo $\frac{d}{dt}$ para designar o operador derivada de uma função (derivável) e o operador J para designar o operador integral de uma função (integrável) em um certo intervalo $[a, b]$. Desta forma, para todo $t \in [a, b]$, temos

$$\frac{d}{dt} f(t) = \frac{df}{dt}(t) = f'(t),$$

e

$$(Jf)(t) = J(f)(t) = \int_a^t f(s) ds.$$

Derivações e integrações sucessivas são portanto definidas recursivamente por

$$f^{(n)}(t) = \frac{d^n f}{dt^n}(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d^{n-1} f}{dt^{n-1}}\right)(t) \qquad \text{e} \qquad (J^n f)(t) = (J(J^{n-1} f))(t),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ com $n > 1$. Consideramos ainda que $f^{(0)}(t) = (J^0 f)(t) = f(t)$.

O estudante do curso de cálculo diferencial e integral está familiarizado com a ideia de derivada de ordem superior mas não com a ideia de integral de ordem superior. A próxima proposição expressa um resultado do cálculo diferencial e integral, conhecido como identidade de Cauchy para integrais repetidas ou integrais de ordem superior. Este resultado motivará a definição de integral fracionária de Riemann-Liouville.

Proposição 6.1 (Identidade de Cauchy)**.** *Se f é uma função integrável em um intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$, e $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 1$, então*

$$(J^n f)(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-s)^{n-1} f(s) ds.$$

Demonstração. Usaremos indução finita sobre $n \in \mathbb{N}$. Para $n = 1$ temos imediatamente de acordo com a nossa notação que

$$(J^1 f)(t) = (Jf)(t) = \int_a^t f(s) ds = \frac{1}{0!} \int_a^t (t-s)^{1-1} f(s) ds.$$

Supomos então o resultado válido para n, isto é,

$$(J^n f)(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-s)^{n-1} f(s) ds.$$

Assim, para $n+1$ temos que

$$\begin{aligned}(J^{n+1} f)(t) &= J(J^n f)(t) = \int_a^t (J^n f)(s) ds \\ &= \int_a^t \frac{1}{(n-1)!} \int_a^s (s-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau ds\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t \int_a^s (s-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau ds.$$

Vamos agora mudar a ordem de integração. Notemos que enquanto $a \leq s \leq t$ temos $a \leq \tau \leq s$. Para mudarmos a ordem de integração sem mudar a região de integração, faremos $a \leq \tau \leq t$ e $\tau \leq s \leq t$. Temos então

$$\begin{aligned}
(J^{n+1}f)(t) &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t \int_a^s (s-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau ds \\
&= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t \int_\tau^t (s-\tau)^{n-1} f(\tau) ds d\tau \\
&= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t \left[\frac{1}{n} (s-\tau)^n f(\tau) \right]_{s=\tau}^t d\tau \\
&= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t \frac{1}{n} (t-\tau)^n f(\tau) d\tau = \frac{1}{n!} \int_a^t (t-\tau)^n f(\tau) d\tau,
\end{aligned}$$

como queríamos. □

A identidade de Cauchy que acabamos de apresentar é válida para todo $n \in \mathbb{N}$. Entretanto, olhando para o termo à direita da igualdade vemos que não há nenhum impedimento em considerar que $n \in \mathbb{R}$, exceto pela presença do fatorial. Substituimos então $(n-1)!$ pela sua generalização $\Gamma(n)$ e não há mais problemas em considerar $n \in (0, \infty) \subset \mathbb{R}$. Esta ideia é a base da definição da integral de Riemann-Liouville.

Definição 6.2. Suponha que $f(t)$ seja contínua em $[a, b] \subset \mathbb{R}$. A integral de Riemann-Liouville de ordem $\alpha > 0$ da função f é a função denotada por ${}_{RL}J_{a+}^{\alpha}(f)(t)$ ou por $({}_{RL}J_{a+}^{\alpha} f)(t)$ e definida por

$${}_{RL}J_{a+}^{\alpha}(f)(t) = ({}_{RL}J_{a+}^{\alpha} f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds.$$

A notação ${}_{RL}J_{a+}^{\alpha}$ será utilizada apenas quando houver possibilidade de confusão com alguma outra noção de integral de ordem fracionária. Em toda esta seção, como não estamos interessados em outra definição de integral de ordem fracionária, omitiremos a expressão RL e usaremos somente a notação simplificada J^{α}_{a+} para representar a integral fracionária de Riemann-Liouville.

Notemos que a integral da definição anterior está bem definida pois $f(s)$ e $(t-s)^{\alpha-1}$ são integráveis em $[a,t]$ qualquer que seja $\alpha > 0$. A hipótese de continuidade de f parece ser mais forte do que o necessário. Bastaria que f fosse integrável no intervalo $[a,b]$. Entretanto a hipótese de continuidade nos permite outros resultados importantes. Se f é contínua pode-se provar que quando $\alpha \to 0^+$ então $J^{\alpha}_{a+}(f) \to f$ uniformemente. Fato este que permite definir J^{0}_{a+} como limite de J^{α}_{a+} quando $\alpha \to 0^+$. Para mais detalhes ou a demonstração desta propriedade indicamos Podlubny (1999). Note também que se $\alpha = 1$ então o operador J^{α}_{a+} se reduz ao caso clássico.

O leitor pode achar que a definição deveria admitir $\alpha < 0$ também. O caso $\alpha < 0$ nos remete ao inverso da integral (em um certo sentido), ou seja, à derivada de ordem fracionária que será apresentada mais adiante. No que se segue apresentamos duas propriedades básicas do operador J^{α} para $\alpha > 0$. A primeira propriedade, a linearidade, não será demonstrada pois é uma consequência imediata da linearidade do operador integral clássico.

Proposição 6.3. *Se f e g são duas funções integráveis em $[a,b]$ e $\alpha \in (0,\infty)$, então*

$$J^{\alpha}_{a+}(c_1 f + c_2 g) = c_1(J^{\alpha}_{a+} f) + c_2(J^{\alpha}_{a+} g),$$

para quaisquer que sejam $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ constantes.

Teorema 6.4 (Lei dos expoentes)**.** *Se f é uma função contínua em $[a,b] \subset \mathbb{R}$ e $\alpha, \beta \in (0,\infty)$, então*

$$J^{\alpha}_{a+}(J^{\beta}_{a+} f) = J^{\alpha+\beta}_{a+} f = J^{\beta}_{a+}(J^{\alpha}_{a+} f).$$

Demonstração. Da definição de integral de ordem fracionária, temos para qualquer $t \in [a,b]$,

$$J^{\alpha}_{a+}(J^{\beta}_{a+} f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} \left[(J^{\beta}_{a+} f)(s) \right] ds$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^s (s-u)^{\beta-1} f(u) du ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t \int_a^s (t-s)^{\alpha-1} (s-u)^{\beta-1} f(u) du ds.
\end{aligned}
$$

Invertendo a ordem de integração no último membro temos que a região de integração $s \in [a,t]$ e $u \in [a,s]$ fica reescrita colocando $u \in [a,t]$ e $s \in [u,t]$ e portanto temos

$$
\begin{aligned}
J_{a+}^{\alpha}(J_{a+}^{\beta} f)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t \int_u^t (t-s)^{\alpha-1} (s-u)^{\beta-1} f(u) ds du \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(u) \int_u^t ((t-u)-(s-u))^{\alpha-1} (s-u)^{\beta-1} ds du \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(u) \int_u^t (t-u)^{\alpha-1} \left(1 - \tfrac{(s-u)}{(t-u)}\right)^{\alpha-1} (s-u)^{\beta-1} ds du.
\end{aligned}
$$

Fazendo agora a mudança de variáveis $w = \frac{1}{(t-u)}(s-u)$ temos que $\frac{dw}{ds} = \frac{1}{(t-u)}$ e portanto

$$
\begin{aligned}
J_{a+}^{\alpha}(J_{a+}^{\beta} f)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(u) \int_0^1 (t-u)^{\alpha-1} (1-w)^{\alpha-1} \left((t-u)w\right)^{\beta-1} (t-u) dw du \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(u) \int_0^1 (t-u)^{\alpha-1+\beta-1+1} (1-w)^{\alpha-1} w^{\beta-1} dw du \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t (t-u)^{\alpha+\beta-1} f(u) \int_0^1 (1-w)^{\alpha-1} w^{\beta-1} dw du \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t (t-u)^{\alpha+\beta-1} f(u) B(\alpha,\beta) du \\
&= \frac{B(\alpha,\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t (t-u)^{\alpha+\beta-1} f(u) du.
\end{aligned}
$$

Usando agora a relação $B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$, obtemos finalmente que

$$
J_{a+}^{\alpha}(J_{a+}^{\beta} f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^t (t-u)^{\alpha+\beta-1} f(u) du = (J_{a+}^{\alpha+\beta} f)(t).
$$

Segue que $J_{a+}^{\alpha}(J_{a+}^{\beta} f) = J_{a+}^{\alpha+\beta} f$ e a segunda igualdade é consequência da comutatividade da adição de números reais. $\square$

7. Derivada fracionária (de Caputo)

A noção de derivada de ordem fracionária segundo Caputo, leva em conta a definição de integral fracionária de Riemann-Liouville. O leitor deve portanto estar familiarizado pela seção anterior com a noção de integral fracionária de Riemann-Liouville e suas propriedades.

Definição 7.1. Seja $\alpha > 0$ um número real e $n \in \mathbb{N}$ de forma que $n-1 \leq \alpha < n$. Se f é uma função contínua em $[a,b] \subset \mathbb{R}$ com n derivadas contínuas em (a,b), então a derivada fracionária de Caputo de ordem α de f, definida em $[a,b]$ é a função dada por

$$_{C}D^{\alpha}_{a+}(f)(t) = ({_{C}D^{\alpha}_{a+}}f)(t) = (J^{n-\alpha}_{a+}f^{(n)})(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1}\frac{d^n f}{ds^n}(s)ds,$$

sendo que J_{a+} se refere à integral fracionária de Riemann-Liouville e $f^{(n)}$ se refere à clássica derivada de ordem n de f.

Note então que derivar na ordem $\alpha > 0$ uma função f, segundo Caputo, significa derivar no sentido clássico a função f n vezes com $n-1 \leq \alpha < n$ e depois integrar na ordem $(n-\alpha)$ segundo Riemann-Liouville.

A notação $_{C}D^{\alpha}_{a+}$ somente será usada quando houver possibilidade de confusão com alguma outra noção de derivada de ordem fracionária. Em toda esta seção, estamos exclusivamente nos referindo à noção de derivada de Caputo e portanto omitiremos a expressão C e usaremos apenas D^{α}_{a+}.

A definição de derivada de ordem fracionária de Caputo, em geral, **não** coincide com a definição usual quando α é um inteiro positivo. Se $\alpha = n-1 \in \mathbb{N}^*$, então $n-\alpha = 1$ e então,

$$\begin{aligned}(D^{n-1}_{a+}f)(t) &= (J_{a+}f^{(n)})(t) = \int_a^t f^{(n)}(s)ds \\ &= \int_a^t \frac{d}{ds}\left(f^{(n-1)}(s)\right)ds = f^{(n-1)}(t) - f^{(n-1)}(a).\end{aligned}$$

Se a escolha de a for feita de forma que $f^{(n-1)}(a) = 0$, então recupera-se o resultado clássico.

Uma das principais propriedades da derivada fracionária de Caputo é a linearidade. Vamos enunciar isto na próxima proposição, mas não provaremos pois é uma consequência imediata da linearidade da integral de Riemann-Liouville e da derivada de ordem inteira (positiva).

Proposição 7.2. *Seja $\alpha > 0$. Se f e g são duas funções α deriváveis no sentido de Caputo, então $(c_1 f + c_2 g)$ é α derivável no sentido de Caputo e além disso*

$$(D^{\alpha}_{a+}(c_1 f + c_2 g))(t) = c_1(D^{\alpha}_{a+} f)(t) + C_2(D^{\alpha}_{a+} g)(t),$$

quaisquer que sejam c_1 e c_2 constantes reais.

É conhecido que em geral não vale a lei dos expoentes para a derivada de Caputo, isto é, não é válido que $D^{\alpha}_{a+}(D^{\beta}_{a+} f) \neq D^{\alpha+\beta}_{a+} f$ para quaisquer $\alpha > 0$ e $\beta > 0$, mesmo que a função f seja β derivável e $(D^{\beta}_{a+} f)$ seja α derivável. Ou seja não é válida a lei dos expoentes para a derivada fracionária de Caputo. O próximo contra-exemplo ilustra isto.

Exemplo 4. Vamos considerar a função $f(t) = t$ contínua em $[0, \infty)$ e com derivadas de ordem $n \in \mathbb{N}$ contínuas em $(0, \infty)$. Queremos determinar $(D^{\frac{1}{2}}_{0+}(D^{\frac{1}{2}}_{0+} f))(t)$, e para isto comecemos com $(D^{\frac{1}{2}}_{0+} f)(t)$. Temos então

$$\begin{aligned}
(D^{\frac{1}{2}}_{0+} f)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} f'(s) ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \left[-2(t-s)^{\frac{1}{2}} \right]_{s=0}^{t} = \frac{2}{\Gamma(\frac{1}{2})} t^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Para prosseguir, como a derivada de Caputo é linear, basta agora determinar $(D^{\frac{1}{2}}_{0+} t^{\frac{1}{2}})(t)$. Então

$$(D^{\frac{1}{2}}_{0+} t^{\frac{1}{2}})(t) = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{d}{ds}(s^{\frac{1}{2}}) \right) ds$$

$$= \frac{1}{2\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} s^{-\frac{1}{2}} ds$$
$$= \frac{1}{2\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^t \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{s}{t}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{t} ds.$$

Fazendo a mudança de variáveis $u = \frac{s}{t}$ temos que $\frac{du}{ds} = \frac{1}{t}$ e então

$$(D_{0+}^{\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2}})(t) = \frac{1}{2\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^1 (1-u)^{-\frac{1}{2}} u^{-\frac{1}{2}} du$$

e usando a igualdade (2) e a Proposição 3.4 obtemos

$$(D_{0+}^{\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2}})(t) = \frac{1}{2\Gamma(\frac{1}{2})} B(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) = \frac{1}{2\Gamma(\frac{1}{2})} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(1)} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{2}.$$

Segue que

$$(D_{0+}^{\frac{1}{2}} (D_{0+}^{\frac{1}{2}} t))(t) = \frac{2}{\Gamma(\frac{1}{2})} \left(D_{0+}^{\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2}} \right)(t) = 1.$$

No entanto temos da definição de derivada de Caputo que

$$(D_{0+}^{1} t)(t) = \left(J^1 \frac{d^2}{dt^2} t \right)(t) = (J^1 0)(t) = 0,$$

e com isto temos claramente que

$$(D_{0+}^{\frac{1}{2}} (D_{0+}^{\frac{1}{2}} t))(t) = 1 \neq 0 = (D_{0+}^{1} t)(t),$$

mostrando que em geral não é válida a lei dos expoentes para a derivada de ordem fracionária.

Embora não seja válida a lei dos expoentes se k for um inteiro positivo então é verdade que $D_{a+}^{\alpha}(\frac{d^k}{dt^k} f) = D_{a+}^{\alpha}(f^{(k)}) = D_{a+}^{\alpha+k} f$ para qualquer $\alpha > 0$, desde que f tenha derivadas de ordem k e que $f^{(k)}$ seja α derivável no sentido de Caputo. Este resultado será útil para nós e portanto é o alvo da próxima Proposição.

Proposição 7.3. *Seja $\alpha \in (0,\infty) \subset \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ o natural que satisfaz $\alpha \in [n-1,n)$. Se $k \in \mathbb{N}$ e f é uma função derivável até a ordem $n+k$, então*

$$\left(D^{\alpha}_{a+} f^{(k)}\right) = \left(D^{\alpha}_{a+} \frac{d^k f}{dt^k}\right) = D^{\alpha+k}_{a+} f.$$

Demonstração. Basta provar para $k=1$ e usar o fato que

$$D^{\alpha}_{a+}(f^{(k)}) = D^{\alpha}_{a+}\left(\frac{d}{dt}\frac{d}{dt}\cdots\frac{d}{dt}f\right),$$

sendo que o segundo membro possui k operadores derivada $\frac{d}{dt}$. Para o caso geral basta eliminar uma derivada por vez.

O caso $k=1$ por sua vez é imediato. Suponha então que n é o natural que satisfaz $\alpha \in [n-1,n)$. Então $(\alpha+1) \in [n,n+1)$. Da definição de derivada fracionária de Caputo, temos que

$$\begin{aligned}(D^{\alpha+1}_{a+} f)(t) &= (J^{(n+1)-(\alpha+1)}_{a+} f^{(n+1)})(t) \\ &= \left(J^{(n-\alpha)}_{a+} \frac{d^n}{dt^n} f'\right)(t) = (D^{\alpha}_{a+} f')(t),\end{aligned}$$

para qualquer $t > a$. □

Muito cuidado para não confundir a ordem das derivadas da Proposição anterior. Em geral $\frac{d^k}{dt^k}(D^{\alpha}_{a+} f)(t) \neq (D^{k+\alpha}_{a+} f)(t)$. Para mais detalhes sobre esta propriedade pode-se consultar Oliveira (2012) ou Kilbas et al. (2006).

Um outro resultado importante para nós é a Transformada de Laplace da derivada de ordem fracionária. Para ser mais preciso queremos generalisar a Proposição 5.3 para $y^{(\alpha)}$, a derivada fracionária de ordem $\alpha > 0$ da função y. Para estabelecer este resultado, usaremos indução finita sobre o natural n que satisfaz $\alpha \in (n-1,n)$. Faremos o caso $n=1$ como lema preliminar.

Lema 7.4. *Se $\alpha \in (0,1) \subset \mathbb{R}$ e y é uma função α derivável cujas Transformadas de Laplace de y e de $D^{\alpha}_{0+} y$ existem, então*

$$\mathcal{L}(D^{\alpha}_{0+} y)(s) = s^{\alpha}(\mathcal{L}y)(s) - s^{\alpha-1}y(0),$$

para todo $s > 0$.

Demonstração. Comecemos pelas definições da Transformada de Laplace e da derivada de Caputo de ordem $\alpha \in (0,1)$. Temos então

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(D_{0+}^{\alpha}y)(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st}(D_{0+}^{\alpha}y)(t)dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-st}(J_{0+}^{\alpha}y')(t)dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-st}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t (t-u)^{-\alpha}y'(u)dudt \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^{\infty}\int_0^t e^{-st}(t-u)^{-\alpha}y'(u)dudt.\end{aligned}$$

Vamos agora mudar a ordem de integração. A região de integração $0 \le t < \infty$ e $0 \le u \le t$ pode ser reescrita colocando $0 \le u < \infty$ e $u \le t < \infty$. Temos então que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(D_{0+}^{\alpha}y)(s) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^{\infty}\int_0^t e^{-st}(t-u)^{-\alpha}y'(u)dudt \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^{\infty}\int_u^{\infty} e^{-st}(t-u)^{-\alpha}y'(u)dtdu \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^{\infty} y'(u)\int_u^{\infty} e^{-st}(t-u)^{-\alpha}dtdu.\end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variáveis $\tau = t-u$ na integral interna temos que $\frac{d\tau}{dt} = 1$ e então

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(D_{0+}^{\alpha}y)(s) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^{\infty} y'(u)\int_u^{\infty} e^{-st}(t-u)^{-\alpha}dtdu \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^{\infty} y'(u)\int_0^{\infty} e^{-s(\tau+u)}\tau^{-\alpha}d\tau du \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^{\infty} e^{-su}y'(u)\int_0^{\infty} e^{-s\tau}\tau^{-\alpha}d\tau du.\end{aligned}$$

Vamos agora calcular a integral interna. Para isto fazemos a mudança de variáveis $\omega = s\tau$ e portanto $\frac{d\omega}{d\tau} = s$. Assim,

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} e^{-s\tau}\tau^{-\alpha}d\tau &= \frac{1}{s}\int_0^{\infty} e^{-\omega}(\tfrac{\omega}{s})^{-\alpha}d\omega \\ &= \frac{s^{\alpha}}{s}\int_0^{\infty} e^{-\omega}\omega^{-\alpha}d\omega = s^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha).\end{aligned}$$

Voltando então com esta integral calculada, obtemos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(D^{\alpha}_{0+}y)(s) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^{\infty} e^{-su}y'(u)\int_0^{\infty} e^{-s\tau}\tau^{-\alpha}d\tau du\\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^{\infty} e^{-su}y'(u)s^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)du\\ &= s^{\alpha-1}\int_0^{\infty} e^{-su}y'(u)du,\end{aligned}$$

e integrando por partes temos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(D^{\alpha}_{0+}y)(s) &= s^{\alpha-1}\int_0^{\infty} e^{-su}y'(u)du\\ &= s^{\alpha-1}\left(\left[e^{-su}y(u)\right]_{u=0}^{\infty} + s\int_0^{\infty} e^{-su}y(u)du\right).\end{aligned}$$

Notemos agora que como a Transformada de Laplace de y existe então a integral imprópria de $e^{-st}y(t)$ existe e assim a função $e^{-st}y(t)$ tende a zero quando $t \to \infty$. Segue que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(D^{\alpha}_{0+}y)(s) &= s^{\alpha-1}\left(\left[e^{-su}y(u)\right]_{u=0}^{\infty} + s\int_0^{\infty} e^{-su}y(u)du\right)\\ &= s^{\alpha-1}\left(-y(0) + s(\mathcal{L}y)(s)\right)\\ &= s^{\alpha}(\mathcal{L}y)(s) - s^{\alpha-1}y(0),\end{aligned}$$

como desejado. □

Teorema 7.5. *Sejam $\alpha > 0$ e $n \in \mathbb{N}$ satisfazendo $\alpha \in (n-1, n]$. Se y é uma função derivável até a ordem n e cujas Transformadas de Laplace de y e de $y^{(k)} = \frac{d^k y}{dt^k}$ existem para todos $k = 1, 2, \ldots, n-1$, então*

$$(\mathcal{L}D^{\alpha}_{0+}y)(s) = s^{\alpha}(\mathcal{L}y)(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1}y^{(k)}(0).$$

Demonstração. Usaremos o lema anterior e a Proposição 7.3. Da Proposição 7.3 temos que

$$(D^{\alpha}_{0+}y)(s) = (D^{\alpha-n+1}_{0+}y^{(n-1)})(s),$$

e como $\alpha \in (n-1, n]$, então $\alpha - n + 1 \in (0,1]$, e pelo lema anterior

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}D^{\alpha}_{0+}y)(s) &= (\mathcal{L}D^{\alpha-n+1}_{0+}y^{(n-1)})(s) \\
&= s^{\alpha-n+1}(\mathcal{L}y^{(n-1)})(s) - s^{\alpha-n}y^{(n-1)}(0).
\end{aligned}$$

Agora usando a propriedade da Transformada de Laplace de derivadas de ordem inteira positiva, provada na Proposição 5.3, temos que

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}D^{\alpha}_{0+}y)(s) &= s^{\alpha-n+1}(\mathcal{L}y^{(n-1)})(s) - s^{\alpha-n}y^{(n-1)}(0) \\
&= s^{\alpha-n+1}\left(s^{n-1}(\mathcal{L}y)(s) - \sum_{k=0}^{n-2} s^{n-2-k}y^{(k)}(0)\right) - s^{\alpha-n}y^{(n-1)}(0) \\
&= s^{\alpha}(\mathcal{L}y)(s) - \sum_{k=0}^{n-2} s^{\alpha-1-k}y^{(k)}(0) - s^{\alpha-n}y^{(n-1)}(0) \\
&= s^{\alpha}(\mathcal{L}y)(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1}y^{(k)}(0),
\end{aligned}$$

como desejado. □

O leitor interessado em outras propriedades envolvendo a integral fracionária de Riemann-Liouvile e a derivada fracionária de Caputo, ou outras noções de integral e derivada de ordem fracionária, pode consultar Camargo (2015), Kilbas (2006) ou Podlubny (1999).

8. EDOs de ordem fracionária

Nesta seção vamos usar os resultados anteriores em duas aplicações bem simples. Vamos considerar dois problemas de valor inicial envolvendo equações diferenciais ordinárias de ordem fracionária.

Lembremos primeiro do clássico problema de valor inicial de ordem 1,

$$\begin{cases} y'(t) + ay(t) = 0, & t > 0, \\ y(0) = y_0, & y_0 \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

para $a \in \mathbb{R}$, cuja solução é $y(t) = y_0 e^{-at}$.

Vamos generalizar este problema. Consideremos o problema de valor inicial de ordem $\alpha \in (0,1]$,

$$\begin{cases} y^{(\alpha)}(t) + ay(t) = 0, & t > 0, \\ y(0) = y_0, & y_0 \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

sendo $a \in \mathbb{R}$ uma constante e $y^{(\alpha)}(t) = D^{\alpha}_{0+} y(t)$ a derivada fracionária de Caputo de ordem α da função y.

Para resolver este problema consideremos que y seja suficientemente regular para que possamos usar qualquer um dos resultados vistos nas seções anteriores. Tomando a Transformada de Laplace da equação diferencial, obtemos

$$(\mathcal{L}(y^{(\alpha)} + ay))(s) = 0. \tag{10}$$

Levando em conta a Proposição 5.2 e o Teorema 7.5, temos que

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}(y^{(\alpha)} + ay))(s) &= (\mathcal{L}y^{(\alpha)})(s) + a(\mathcal{L}y)(s) \\ &= s^{\alpha}(\mathcal{L}y)(s) - s^{\alpha-1}y(0) + a(\mathcal{L}y)(s) \\ &= (s^{\alpha} + a)(\mathcal{L}y)(s) - s^{\alpha-1}y_0, \end{aligned}$$

e assim podemos reescrever a igualdade (10) como

$$(s^{\alpha} + a)(\mathcal{L}y)(s) = s^{\alpha-1}y_0,$$

ou ainda,

$$(\mathcal{L}y)(s) = y_0 \frac{s^{\alpha-1}}{(s^{\alpha} + a)}.$$

Para determinar a função y, solução do problema de valor inicial, usamos o resultado da Proposição 5.6, obtendo

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(y_0 \frac{s^{\alpha-1}}{(s^{\alpha} + a)} \right)(t) = y_0 E_{\alpha}(-at^{\alpha}),$$

a solução explícita do problema de valor inicial.

Note que quando $\alpha = 1$ então o problema de valor inicial e sua solução recuperam o caso clássico.

Vamos agora considerar um Problema de Valor Inicial de ordem maior. Lembremos do clássico problema de valor inicial de ordem 2,

$$\begin{cases} y''(t) + ay(t) = 0, & t > 0, \\ y'(0) = y_1, \quad y(0) = y_0, & y_1, y_0 \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

com $a \in \mathbb{R}$ constante, cuja solução (que depende de a) é dada por uma das expressões

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0 \cos(\sqrt{a}t) + \frac{y_1}{\sqrt{a}} \operatorname{sen}(\sqrt{a}t) \qquad (\text{se } a > 0), \\ y(t) &= y_0 + y_1 t \qquad (\text{se } a = 0), \\ y(t) &= \frac{y_0\sqrt{-a} + y_1}{2\sqrt{-a}} e^{\sqrt{-a}t} + \frac{y_0\sqrt{-a} - y_1}{2\sqrt{-a}} e^{-\sqrt{-a}t} \qquad (\text{se } a < 0). \end{aligned}$$

Vamos generalizar este problema considerando o problema de valor inicial de ordem $\alpha \in (1, 2]$, dado por

$$\begin{cases} y^{(\alpha)}(t) + ay(t) = 0, & t > 0, \\ y'(0) = y_1, \quad y(0) = y_0, & y_1, y_0 \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

com $a \in \mathbb{R}$ constante e $y^{(\alpha)}(t) = D_{0+}^{(\alpha)} y(t)$ a derivada de Caputo de y.

Vamos considerar que y seja suficientemente regular para podermos aplicar todos os resultados das seções anteriores. Aplicando a Transformada de Laplace em ambos os membros da EDO, obtemos

$$(\mathcal{L}(y^{(\alpha)} + ay))(s) = 0.$$

Usando a Proposição 5.2 e o Teorema 7.5 obtemos

$$(\mathcal{L}(y^{(\alpha)} + ay))(s) = (\mathcal{L}y^{(\alpha)})(s) + a(\mathcal{L}y)(s)$$

$$
\begin{aligned}
&= s^{\alpha}(\mathcal{L}y)(s) - s^{\alpha-1}y(0) - s^{\alpha-2}y'(0) + a(\mathcal{L}y)(s) \\
&= (s^{\alpha}+a)(\mathcal{L}y)(s) - s^{\alpha-1}y_0 - s^{\alpha-2}y_1.
\end{aligned}
$$

Segue que

$$(s^{\alpha}+a)(\mathcal{L}y)(s) = s^{\alpha-1}y_0 + s^{\alpha-2}y_1,$$

e então

$$(\mathcal{L}y)(s) = \frac{s^{\alpha-1}y_0 + s^{\alpha-2}y_1}{s^{\alpha}+a} = y_0\frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha}+a} + y_1\frac{s^{\alpha-2}}{s^{\alpha}+a}.$$

Usando os resultados obtidos nas Proposições 5.6 e 5.7 obtemos

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left(y_0\frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha}+a} + y_1\frac{s^{\alpha-2}}{s^{\alpha}+a}\right)(t) \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left(y_0\frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha}+a}\right)(t) + \mathcal{L}^{-1}\left(y_1\frac{s^{\alpha-2}}{s^{\alpha}+a}\right)(t) \\
&= y_0E_{\alpha}(-at^{\alpha}) + y_1tE_{\alpha,2}(-at^{\alpha}),
\end{aligned}
$$

a solução explícita desejada para o Problema de Valor Inicial de ordem $\alpha \in (1,2]$.

Analisemos esta solução no caso particular $\alpha = 2$. Esta análise dependerá também do valor de a. Se $a > 0$ então diretamente das identidades (3) e (5) temos que

$$y(t) = y_0E_2(-at^2) + y_1tE_{2,2}(-at^2) = y_0\cos(\sqrt{a}t) + \frac{y_1}{\sqrt{a}}\operatorname{sen}(\sqrt{a}t).$$

Se $a = 0$ então das duas igualdades em (7), segue que

$$y(t) = y_0E_2(0) + y_1tE_{2,2}(0) = y_0 + y_1t\Gamma(2) = y_0 + y_1t.$$

Finalmente, se $a < 0$ então das identidades (4) e (6) temos que

$$y(t) = y_0E_2(-at^2) + y_1tE_{2,2}(-at^2)$$

$$
\begin{aligned}
&= y_0 \cosh(\sqrt{-a}t) + \frac{y_1}{\sqrt{-a}} \operatorname{senh}(\sqrt{-a}t) \\
&= y_0 \frac{e^{\sqrt{-a}t} + e^{-\sqrt{-a}t}}{2} + \frac{y_1}{\sqrt{-a}} \frac{e^{\sqrt{-a}t} - e^{-\sqrt{-a}t}}{2} \\
&= \left(y_0 + \frac{y_1}{\sqrt{-a}}\right) \frac{e^{\sqrt{-a}t}}{2} + \left(y_0 - \frac{y_1}{\sqrt{-a}}\right) \frac{e^{-\sqrt{-a}t}}{2} \\
&= \frac{y_0\sqrt{-a} + y_1}{2\sqrt{-a}} e^{\sqrt{-a}t} + \frac{y_0\sqrt{-a} - y_1}{2\sqrt{-a}} e^{-\sqrt{-a}t}.
\end{aligned}
$$

Em qualquer um dos casos (para a constante a) notemos que as soluções recuperam as soluções do clássico Problema de Valor Inicial de ordem 2.

9. Considerações finais

A ideia principal deste texto foi trazer ao leitor um pouco de conhecimento sobre assuntos relacionados com o cálculo fracionário. Cada um destes assuntos pode ter seu estudo aprofundado, já que mencionamos apenas as definições e as propriedades necessárias ao entendimento deste texto.

Deixamos aqui registrado que vários destes assuntos podem render muitas horas e muitas páginas de estudo. Para mais informações sobre a teoria do cálculo fracionário, suas propriedades ou suas consequências, recomendamos principalmente Kilbas (2006) e Podlubny (1999).

Referências

1. Camargo, Rubens Figueiredo e Oliveira, Edmundo Capelas de. *Cálculo fracionário*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2015. p.

2. Kilbas, Anatoly A., Srivastava, Hari M. & Trujillo, Juan J. *Theory and applications of fractional differential equations*. North-Holland Mathematics studies. Amsterdam: Jan van Mill, 2006.

3. Humbert, P. e Agarwal, R. P. *Sur la fonction de Mittag-Leffler et quelques-unes de ses généralisations*. Bull. Sci. Mathématiques, **77**, 180-185, (1953).

4. Mittag-Leffer, Magnus G. *Sur la nouvelle fonction* $E_\alpha(x)$. Comp. Rend. Acad. Sci. Paris. **137**. 554-558, 1903.

5. Oliveira, Edmundo Capelas de. *Funções especiais com aplicações*. 2^a ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2012. 326p.

6. Podlubny, Igor. *Fractional differential equations*. Mathematics in science and engineering, vol 198. Academic press, 1999.

7. Raimbault, J. L. *Transformées de Laplace des fonctions et des distributions: Cours et exercices*. Universitée de Paris-Sud, 2008.

8. Zill, Denis G. *Equações diferenciais com aplicações em modelagem*. Tradução da 10^a edição norte-americana. 3^a ed. São Paulo: Cengage Learning, 2016.