J Jornal Eletrônico de Ensino e Pesquisa de Matemática
(1s.) **v. 1**, 2 (2017): 30–33. ©Jeepema – ISSN 2594-6323
www.dma.uem.br/kit/jeepema

O Teorema de Dini

Doherty Andrade – E-mail:doherty200@hotmail.com

Resumo: O teorema de Dini apresenta condições para que uma sequência (f_n) de funções contínuas que converge pontualmente para f contínua, também convirja uniformemente para a mesma f.

Palavras-chave: Teorema de Dini. Convergência pontual. Convergência uniforme. *

Sumário

1. Introdução

Para o estudante de Cálculo, a convergência de funções, surge quando estudamos polinomios de Taylor, sequências e séries de funções. Nessa ocasião é muito comum os estudantes utilizarem o que conhecem de convergencia de sequências numéricas para deduzirem resultados, muitas vezes errôneos, sobre convergência de funções. Um dos resultados mais esclarecedores a esse respeito é o Teorema de Dini, esse teorema deixa bem claro que não se pode confundir a convergência pontual com a convergência uniforme de funções.

2. Enunciado

Nesta seção vamos apresentar a demonsrtraçãodo Teorema de Dini. É uma demonstração simples e bastante utilizada, facilmente encontrada em livros de Cálculo ou introdução à Análise. O estudante pode

* Publicado em 14-12-2017.

ignorar, em uma primeira leitura, os detalhes da demonstração do teorema. Mas deve empenhar-se em entender os diferentes conceitos envolvidos, tais como, convergência pontual e convergência uniforme. Deve também valorizar as hipóteses, sem as quais não se obtém a implicação.

Teorema 2.1 (Dini)**.** *Seja $K \subset \mathbb{R}$ um conjunto compacto não vazio e seja $f_n : K \to \mathbb{R}$ uma sequência de funções contínuas que converge pontualmente para a função contínua $f : K \to \mathbb{R}$. Se a sequência (f_n) é monótona, então a sequência (f_n) converge uniformente para f.*

Lembramos que uma sequência monótona de funções (f_n) pode ser:

1. não-decrescente se – $f_{n+1}(x) \geq f_n(x), \forall x \in K, \forall n \in \mathbb{N}$;
2. não-crescente se – $f_{n+1}(x) \leq f_n(x), \forall x \in K, \forall n \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Para fixar as ideias, suponha que a sequência (f_n) seja não-decrescente: $f_{n+1}(x) \geq f_n(x), \forall x \in K, \forall n \in \mathbb{N}$. O caso em que a sequência (f_n) seja não-crescente pode ser tratado de modo análogo.

Como (f_n) é não-decrescente temos que

$$f_n(x) \leq f_m(x) \leq f(x), \forall x \in K, \forall n, m \in \mathbb{N}, n \leq m. \tag{1}$$

Como f e as funções f_n são contínuas com domínio compacto K, segue que todas são uniformemente contínuas. Assim, para $\epsilon > 0$ dado temos:

(i) existe $\delta > 0$ tal que

$$x, y \in K, |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

(ii) usando a continuidade uniforme de f_n, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $\delta_n > 0$ tal que

$$x, y \in K, |x - y| < \delta_n \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| < \epsilon.$$

(iii) como (f_n) converge pontualmente para f, para cada $x \in K$ existe $n(x) \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \in \mathbb{N}, n \geq n(x) \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

(iv) Para cada $x \in K$, definimos

$$d_n = \min\{\delta, \delta_{n(x)}\} > 0.$$

(v) Como K é compacto e $(x - \delta_x, x + \delta_x)$, em que $x \in K$, forma uma cobertura aberta de K, e dela podemos extrair uma subcobertura finita. Seja

$$(x_j - \delta_{x_j}, x_j + \delta_{x_j}), j = 1, 2, 3, \ldots, k,$$

essa cobertura.

(vi) Defina,

$$n_0 = \max\{n_{x_j}, j = 1, 2, \ldots, k\}$$

Segue de (i), (ii) e (iii) que vale a seguinte implicação:

$$x \in K, n \in \mathbb{N}, n \geq n(x), y \in K, |y - x| < \delta_x \Rightarrow |f_n(y) - f(y)| < 3\epsilon.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
|f_n(y) - f(y)| &= f(y) - f_n(y) \\
&\leq f(y) - f_{n(x)}(y) \\
&= f(y) - f(x) + f(x) - f_{n(x)}(x) + f_{n(x)}(x) - f_{n(x)}(y) \\
&\leq |f(y) - f(x)| + |f(x) - f_{n(x)}(x)| + |f_{n(x)}(x) - f_{n(x)}(y)| \\
&\leq 3\epsilon.
\end{aligned}$$

Portanto, para $n \geq n_0$ tem-se que dado $y \in K$ existe $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ tal que $y \in (x_j - \delta_{x_j}, x_j + \delta_{x_j})$; como $n \geq n_0 \geq n(x_j)$, vale a propriedade

$$x \in K, n \in \mathbb{N}, n \geq n(x), y \in K, |y - x| < \delta_x \Rightarrow |f_n(y) - f(y)| < 3\epsilon,$$

com $x = x_j$, obtemos que $|f_n(y) - f(y)| < 3\epsilon$. Como $\epsilon > 0$ é arbitrário, seque que (f_n) converge uniformemente para f. $\square$

3. Exemplos

(a) A sequência de funções contínuas dada por $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = \sqrt{x}, \ldots, f_n(x) = \sqrt{x f_{n-1}(x)}$, definida no compacto $[0,1]$.

Notemos que a sequência de funções (f_n) pode ser dada por $f_n(x) = x^{\frac{2^n-1}{2^n}}$. Como a sequência $a_n = \frac{2^n-1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$ é crescente e $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$, segue que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = x = f(x)$. Logo, (f_n) converge pontualmente para f.

Além disso, as funções $f_n(x) = x^{\frac{2^n-1}{2^n}}$ são contínuas e a sequência é decrescente.

Pelo teorema de Dini a sequência (f_n) converge uniformemente para f.

(b) A sequência $f_n(x) = x^n, x \in (0,1)$ é sequência de funções contínuas que decresce pontualmente para a função nula f. Mas a convergência não pode ser uniforme. De fato, se $f_n(x) \to f(x)$, então $g_n(x) = f_n(x) - f(x)$ é sequência contínua que converve pontualmente para zero e teríamos necessariamente que $\sup\{g_n(x), x \in (0,1)\} = 0$. Mas $\sup\{x^n, 0 < x < 1\} = 1$.

Nesse exemplo, uma das hipóteses do Teorema de Dini foi propositalmente ignorada: o domínio K não é compacto.

Referências

1. Avner Friedman, Foundations of Modern Analysis. Holt, Reinehart and Winston, Inc., 1970.