J Jornal Eletrônico de Ensino e Pesquisa de Matemática
(1s.) **v. 1**, 1 (2017): 8–17. ©Jeepema – ISSN 2594-6323
www.dma.uem.br/kit/jeepema

Um espaço métrico incompleto

Alyssa de Oliveira Costa – DMA - UEM

Resumo: O objetivo deste texto é apresentar um exemplo de espaço métrico incompleto diferente de $\mathbb{Q}$. Para tanto, definiremos alguns conceitos prévios necessários para nossa melhor compreensão. Indicamos a referência [1], para o leitor que queira se aprofundar mais sobre espaços métricos.

Palavras-chave: Espaço Métrico Completo, Sequências de Cauchy, Convergência. *

Sumário

1. Introdução

Os espaços métricos estudados em Análise Funcional vão além de conjuntos envolvendo números reais, com frequência encontramos conjuntos mais gerais, como, por exemplo, o conjunto de todas as sequências convergentes de números reais ou o conjunto todas as sequências convergentes de números complexos, o conjunto de todas as funções a valores reais contínuas e definidas em um intervalo fechado, entre outros. A métrica nesses conjuntos é definida de forma que satisfaça algumas propriedades, que iremos definir logo

* Publicado em 14-08-2017.

abaixo. Podemos construir, então, vários espaços métricos com métricas diferentes e, assim, podemos investigar quando eles são completos ou incompletos.

Definição 1.1. *Um espaço métrico é um par* (X, d)*, onde* X *é um conjunto não vazio e* d *é uma função definida em* $X \times X$ *que satisfaz, para todos* $x, y, z \in X$*, as seguintes propriedades*

(M1) $d(x, y)$ *é um valor real, finito e não negativo;*

(M2) $d(x, y) = 0$ *se, e somente se,* $x = y$*;*

(M3) $d(x, y) = d(y, x)$*;*

(M4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ *(Desigualdade Triangular).*

A função d *é chamada métrica em* X*.*

Para simplificarmos, escreveremos X para indicar (X, d). Também, indicaremos por $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais, ou seja,

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

O conjunto dos números reais é denotado por $\mathbb{R}$.

A seguir, vejamos alguns exemplos de espaços métricos.

Exemplo 1.2. Consideremos em $\mathbb{R}$ a métrica usual $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$d(x, y) = |x - y|,$$

para quaisquer números $x, y \in \mathbb{R}$. O conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ é um espaço métrico.

Exemplo 1.3. O espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, onde cada ponto $x \in \mathbb{R}^n$ é da forma $x = (x_1, \dots x_n)$, com $x_i \in \mathbb{R}$, dotado da métrica definida por

$$d(x,y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$$

é um espaço métrico.

Para encontrar as demontrações dos exemplos acima e conhecer mais exemplos de espaços métricos, veja [1] ou [2].

Antes de falarmos em um espaço métrico incompleto, precisamos entender o que é um espaço métrico completo e, para isso, é primordial a definição de sequência de Cauchy.

Definição 1.4. *Uma sequência (x_n) em um espaço métrico $X = (X, d)$ é dita convergente se existe um $x \in X$ tal que*

$$\lim_{n \to \infty} d(x_n, x) = 0.$$

O elemento x é chamado limite de (x_n) em X.

Conhecendo a Definição 1.4, agora podemos definir sequência de Cauchy.

Definição 1.5. *Uma sequência (x_n) em um espaço métrico X é dita sequência de Cauchy em X, se para todo $\epsilon > 0$ existe um $N \in \mathbb{N}$ tal que*

$$d(x_m, x_n) < \epsilon, \quad \textit{para todo} \quad m, n > N.$$

Com essas definições, podemos entender o conceito de espaço métrico completo.

Definição 1.6. *Um espaço métrico (X, d) é dito completo se toda sequência de Cauchy em X converge em X, ou seja, o limite de uma sequência de Cauchy em X é um elemento de X.*

Exemplo 1.7. Nem toda sequência de Cauchy em X é convergente em X. De fato, consideremos o espaço métrico $(\mathbb{Q}, d)$, com a métrica usual dada por $d(x,y) = |x-y|$, onde $x, y \in \mathbb{Q}$.

Consideremos a sequência (x_n) gerada por $x_0 = 1$ e $x_{n+1} = N(x_n), n \geq 0$, onde $N(x) = \frac{x^2+1}{2x}$. Note que os primeiros elementos dessa sequência são:

$$(1, 1.5, 1.416666666, 1.414215686, 1.414213562, , \ldots).$$

Essa sequência foi construída por meio do método de Newton-Raphson
(veja em http://www.dma.uem.br/kit/) e, assim, é fácil ver que a sequência é convergente para $\sqrt{2}$ e, portanto, é de Cauchy. Como a sequência (x_n) converge para um número irracional, segue que $(\mathbb{Q}, d)$ não é um espaço métrico completo.

Exemplo 1.8. Consideremos o conjunto $C[a,b]$ constituído pelas funções a valores reais definidas em um intervalo fechado $[a,b]$ e contínuas. Em $C[a,b]$, defina

$$d(f,g) = \max_{t \in [a,b]} |f(t) - g(t)|, \tag{1}$$

onde $f, g \in C[a,b]$. O espaço $C[a,b]$ dotado dessa métrica é um espaço métrico completo. Para mais detalhes e conhecer outros exemplos, veja [1].

2. Espaço métrico incompleto

Existem vários exemplos de espaços métricos completos, por exemplo, o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, o espaço dos números complexos, o espaço das funções contínuas com a métrica definida por (1), entre outros. Pela Definição 1.6, para um espaço métrico ser incompleto devemos exibir uma sequência de Cauchy contida no espaço X que convirja para um certo elemento que não pertença a X. No Exemplo 1.7, vimos que o conjunto dos números racionais não é um espaço métrico completo.

Neste trabalho, destacamos um exemplo de espaço métrico incompleto, como segue abaixo.

Exemplo 2.1. Consideremos o espaço métrico (X, d), onde $X = C[0,1]$, com a seguinte métrica

$$d(f,g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)| dt,$$

onde $f, g \in X$. Vamos provar que o espaço (X, d) é incompleto.

Incialmente, mostraremos que a função d é uma métrica em X. Sejam f, g e $h \in X$, vamos verificar que as propriedades (M1) – (M4) da Definição 1.1 estão satisfeitas. Para tanto, utilizaremos as propriedades de módulo de um número real e de funções contínuas, por exemplo, sabemos que a soma de duas funções contínuas definidas em $[0,1]$ é uma função contínua e integrável em $[0,1]$.

É fácil ver que a propriedade (M1) é válida, pois

$$|f(t) - g(t)| \geq 0, \quad \text{para todo} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Então,

$$\int_0^1 |f(t) - g(t)| \, dt \geq 0.$$

Sejam f, $g \in X$. Para mostrarmos a propriedade (M2), primeiramente, verificaremos que, se $d(f,g) = 0$, então $f = g$. De

$$d(f,g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)| \, dt = 0,$$

segue que $|f(t) - g(t)| \equiv 0$ (identicamente nula). Caso contrário, teríamos $|f(t) - g(t)| = c(t) \geq 0$, com $c(t) > 0$ em pelo menos algum ponto t_0. Pela continuidade de c, teríamos $c(t) > 0$ em alguma vizinhança de t_0. E assim,

$$\int_0^1 |f(t) - g(t)|\, dt = \int_0^1 c(t)\, dt > 0.$$

Reciprocamente, se tivermos $f = g$, então

$$\int_0^1 |f(t) - g(t)|\, dt = \int_0^1 |f(t) - f(t)|\, dt = 0.$$

Logo, a propriedade (M2) está satisfeita.

Vamos mostrar a propriedade (M3), para isso notemos que

$$d(f,g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)|\, dt \quad \text{e} \quad d(g,f) = \int_0^1 |g(t) - f(t)|\, dt.$$

Ainda $|f(t) - g(t)| = |-1|\,|g(t) - f(t)| = |g(t) - f(t)|$, assim, vale (M3), como queríamos demonstrar.

Só nos resta mostrar a propriedade (M4). Pela desigualdade triangular (para módulos de números reais),

$$|f(t)-g(t)| = |f(t)-h(t)+h(t)-g(t)| \leq |f(t)-h(t)|+|h(t)-g(t)|.$$

Logo,

$$\int_0^1 |f(t) - g(t)|\, dt \leq \int_0^1 |f(t) - h(t)|\, dt + \int_0^1 |h(t) - g(t)|\, dt.$$

Desta maneira, vale a Desigualdade Triangular. Provamos, assim, que valem as propriedades (M1) – (M4). Portanto, (X,d) é um espaço métrico.

Mostraremos, a seguir, que (X,d) não é um espaço métrico completo, ou seja, exibiremos uma sequência de Cauchy em X e mostraremos que ela converge para um elemento que não está em X.

Para tal feito, consideremos a sequência de funções contínuas (f_m), $m \in \mathbb{N}$. Cada função $f_m : [0,1] \to [0,1]$ é dada por

$$f_m(t) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \\ m(t - \frac{1}{2}), & \text{se} \quad t \in [\frac{1}{2}, a_m] \\ \\ 1, & \text{se} \quad t \in [a_m, 1], \end{cases}$$

onde $a_m = \frac{1}{2} + \frac{1}{m}$, com $m \in \mathbb{N}$. Observemos a Figura 1.

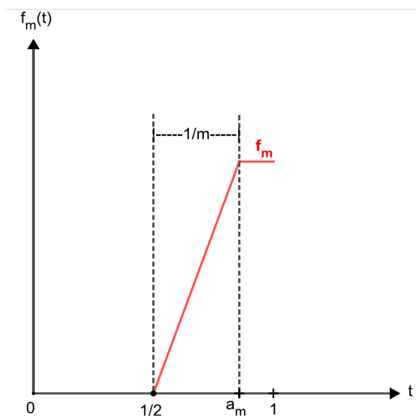

Figura 1: Função f_m

Vamos mostrar que (f_m) é uma sequência de Cauchy em X, ou seja, que para todo $\epsilon \geq 0$, existe um $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(f_m, f_n) < \epsilon, \quad$ para todo $m, n > N$.

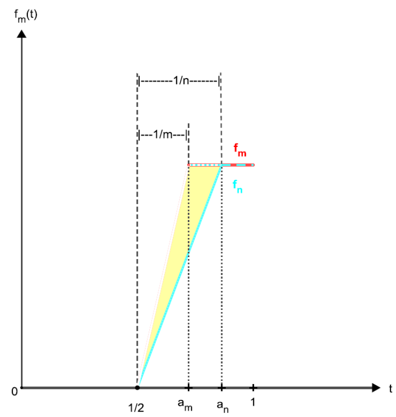

Figura 2: Funções f_m e f_n

Sem perda de generalidade, suponhamos $m, n \in \mathbb{N}$ com $m > n$. A Figura 2 exibe os gráficos de f_m e f_n. Provaremos, a seguir, que (f_m) é uma sequência de Cauchy em X.

Observando o triângulo em amarelo na Figura 2, temos que para $\varepsilon > 0$, existe $N = \dfrac{1}{2\varepsilon}$ tal que, para $m > n > N$,

$$d(f_m, f_n) = \int_0^1 |f_m(t) - f_n(t)|dt = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right) < \frac{1}{2n} < \frac{1}{2N} < \epsilon.$$

Outra maneira de mostrarmos a desigualdade acima é calculando a integral

$$\begin{aligned}
d(f_m, f_n) &= \int_0^1 |f_m(t) - f_n(t)|dt = \int_{\frac{1}{2}}^{a_m} |f_m(t) - f_n(t)|dt + \int_{a_m}^{a_n} |1 - f_n(t)|dt \\
&= \int_{\frac{1}{2}}^{a_m} |m(t - \frac{1}{2}) - n(t - \frac{1}{2})|dt + \int_{a_m}^{a_n} |1 - n(t - \frac{1}{2})|dt \\
&= (m - n)\int_{\frac{1}{2}}^{a_m} (t - \frac{1}{2})dt + \int_{a_m}^{a_n} |1 - n(t - \frac{1}{2})|dt.
\end{aligned}$$

Sabendo que $a_m = \frac{1}{2} + \frac{1}{m}$ e $a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{n}$, resolvendo a integral acima, obtemos

$$\begin{aligned} d(f_m, f_n) &= (m-n)\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{m}} (t - \frac{1}{2})dt + \int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{m}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} (1 - nt + \frac{n}{2})dt \\ &= \left(\frac{m-n}{2m^2}\right) + \frac{1}{n} - \frac{1}{m} - \frac{1}{2n} + \frac{n}{2m^2} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right). \end{aligned}$$

Logo, para $\varepsilon > 0$, existe $N = \dfrac{1}{2\varepsilon}$ tal que, para $m > n > N$,

$$d(f_m, f_n) < \frac{1}{2n} < \frac{1}{2N} < \varepsilon.$$

Dessa forma, mostramos que a sequência (f_m) é de Cauchy em X.

Provaremos agora que (f_m) converge para uma função f que não pertence a X. Para isso, suponhamos que (f_m) convirja para $f \in X$. Então, $d(f_m, f) \to 0$ quando $m \to \infty$. No entanto,

$$\begin{aligned} d(f_m, f) &= \int_0^1 |f_m(t) - f(t)|dt \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} |f(t)|dt + \int_{\frac{1}{2}}^{a_m} |f_m(t) - f(t)|dt + \int_{a_m}^1 |1 - f(t)|dt \qquad (2) \end{aligned}$$

Quando $m \to +\infty$, a sequência (a_m) converge para $\dfrac{1}{2}$, assim, (2) se torna

$$\int_0^{\frac{1}{2}} |f(t)|dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 |1 - f(t)|dt = 0. \qquad (3)$$

A equação (3) só terá solução se

$$\int_0^{\frac{1}{2}} |f(t)|dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 |1 - f(t)|dt = 0.$$

Desta forma, $|f(t)| = 0$, $t \in [0, \frac{1}{2}]$ e $|1 - f(t)| = 0$, para $t \in [\frac{1}{2}, 1]$. Logo,

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \\ 1, & \text{se} \quad t \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

o que é uma contradição, pois por hipótese $f \in X$ e f não é contínua em $[0, 1]$. Portanto, o espaço métrico (X, d) é um espaço métrico incompleto.

Referências

1. KREYSZIG, E. *Introductory Functional Analysis with Applications*, New York: Jonh Wiley & Sons, 1978. 8, 10, 11

2. LIMA, E. L. *Espaços Métricos*, Rio de Janeiro: Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 1993.