Jornal Eletrônico de Ensino e Pesquisa de Matemática
(1s.) **v. 3** 1 (2019): 5–13. ©Jeepema–ISSN-2594-6323.
www.dma.uem.br/kit/jeepema

Variação dos Parâmetros para EDOs de segunda ordem

Doherty Andrade[1]

Resumo: Neste trabalho deduzimos a epxressão geral para a solução de EDO's lineares de segunda ordem lineares não homogêneas a coeficientes constantes.

Sumário

1. O método de variação dos Parâmetros

Consideremos a EDO de segunda ordem não homogênea a coeficientes constantes

$$ay'' + by' + cy = G(x), \tag{1}$$

[1] Email: doherty200@hotmail.com

onde $a \neq 0, b, c$ são constantes reais e $G(x)$ é uma função contínua.

Vamos precisar ainda da equação homogênea associada:

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{2}$$

que desempenha um papel importante na obtenção da solução da equação (1).

Teorema 1.1 *Seja $y_p(x)$ uma solução particular da equação (1). Se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções linearmente independentes (LI) da EDO homogênea associada (2), então a solução geral da EDO (1) é dada por:*

$$y(x) = y_p(x) + C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

onde C_1 e C_2 são constantes reais.

Portanto, para achar a solução geral da EDO não homogênea (1) precisamos de uma solução particular da não homogênea e de duas soluções LI da EDO homogênea associada (2).

Determinar a solução geral da EDO homogênea não é problema. A novidade é determinar a solução particular $y_p(x)$ da EDO não homogênea e é aqui que entra o método da variação dos parâmteros.

Suponha que, após resolver a equação homogênea

$$ay'' + by' + cy = 0, \tag{3}$$

obtivemos a sua solução geral como

$$y_c(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x), \tag{4}$$

onde $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções linearmente independentes. Vamos substituir as constantes c_1 e c_2 (ou parâmetros) da (4) pelas funções arbitrárias e $u(x)$ e $v(x)$. Assim, procuramos uma solução particular da EDO não homogênea

$$ay'' + by' + cy = G(x) \tag{5}$$

da seguinte forma

$$y_p(x) = u(x)y_1(x) + v(x)y_2(x). \tag{6}$$

Esse método é chamado de método da variação dos parâmetros.

Como y_p deve ser solução da EDO (5), derivando y_p obtemos

$$y_p'(x) = u'(x)y_1(x) + u(x)y_1'(x) + v'(x)y_2(x) + v(x)y_2'(x). \tag{7}$$

Vamos supor que

$$u'y_1 + v'y_2 \;=\; 0. \tag{8}$$

Assim, $y_p''(x)$ fica mais simples:

$$y_p'' \;=\; u'y_1' + uy_1'' + v'y_2' + vy_2''. \tag{9}$$

Substituindo em (5) e reorganizando, obtemos

$$u(ay_1'' + by_1' + cy_1) + v(ay_2'' + by_2' + cy_2) + a(u'y_1' + v'y_2') = G(x). \tag{10}$$

Como y_1 e y_2 são soluções da EDO homogênea os dois primeiros termos do lado esquerdo da equação acima se anulam, segue que

$$a(u'y_1' + v'y_2') = G(x). \tag{11}$$

Assim, devemos determinar duas funções $u(x)$ e $v(x)$ que satisfaçam às condições (8)-(11):

$$\begin{cases} u'y_1 + v'y_2 = 0 \\ a\,(u'y_1' + v'y_2') = G. \end{cases} \tag{12}$$

Ou equivalentemente,

$$\begin{cases} y_1 u' + y_2 v' = 0 \\ y_1' u' + y_2' v' = \frac{G}{a}. \end{cases} \tag{13}$$

O sistema (13) é um sistema de incógnitas u' e v'. Após obtermos u' e v', usamos integração para obter u e v, e, assim a solução particular $y_p(x)$ é obtida.

Exemplo 1.2

Determinar a solução geral da EDO $y'' + y = \sin(x)$.

A EDO homogênea tem equação auxiliar igual a $r^2 + 1 = 0$, cujas soluções são $r_1 = i$ e $r_2 = -i$. Segue que a solução geral da EDO homogênea é

$$y_c(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x),$$

onde c_1 e c_2 são constantes.

Usando o método da variação dos parâmetros, devemos procurar uma solução particular da EDO não homogênea da forma

$$y_p(x) = u(x)\cos(x) + v(x)\sin(x).$$

Usando o sistema 12, de incógnitas u' e v', obtemos que

$$u' \cos(x) + v' \sin(x) = 0 \tag{14}$$

$$-u' \sin(x) + v' \cos(x) = \sin(x) \tag{15}$$

Resolvendo o sistema, obtemos

$$\begin{aligned} u' &= -\frac{1}{2} + \frac{\cos(2x)}{2} \\ &\Rightarrow u(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{\sin(2x)}{4} \\ v' &= \sin(x)\cos(x) \\ &\Rightarrow v(x) = \frac{\sin^2(x)}{2}. \end{aligned}$$

Logo, a solução particular $y_p(x)$ é:

$$y_p(x) = \left(-\frac{1}{2}x + \frac{\sin(2x)}{4}\right)\cos(x) + \frac{\sin^2(x)}{2}\sin(x).$$

Usando identidades trigonométricas para simplificar, podemos reescrever

$$y_p(x) = \frac{1}{2}\sin(x) - \frac{1}{2}x\cos(x).$$

Segue que a solução geral da EDO não homogênea é:

$$y(x) = c_1\cos(x) + c_2\sin(x) + \frac{1}{2}\sin(x) - \frac{1}{2}x\cos(x) + c.$$

2. Fórmula Fechada para a solução

Podemos determinar as soluções do sistema dado em 13 e obter uma fórmula fechada para a solução da EDO não homogênea. É o que vamos fazer a partir daqui. O sistema pode ser reescrito como,

$$\begin{cases} u'y_1 + v'y_2 = 0 \\ u'y_1' + v'y_2' = \frac{G}{a}. \end{cases} \tag{16}$$

pode ser resolvido, usando a regra de Cramer.

Seja W o determinante principal do sistema, aqui denominado de Wronskiano,

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1y_2' - y_1'y_2 \neq 0,$$

pois as funções y_1 e y_2 são linearmente independentes.

Pela regra de Cramer, obtemos que

$$u' = \frac{\Delta_{u'}}{W} = \frac{-Gy_2}{aW} \Rightarrow u(x) = -\int \frac{Gy_2}{aW}dx$$

$$v' = \frac{\Delta_{v'}}{W} = \frac{Gy_1}{aW} \Rightarrow v(x) = \int \frac{Gy_1}{aW}dx$$

Segue que $y_p(x)$ pode ser escrita como:

$$y_p(x) = -y_1(x)\int \frac{Gy_2}{aW}dx + y_2(x)\int \frac{Gy_1}{aW}dx + c. \tag{17}$$

Vamos usar a fórmula (17) em um exemplo.

Exemplo 2.1

Determinar a solução particular da EDO $y'' + y = \tan(x)$.

Aqui a EDO homogênea tem solução geral $y_c(x) = C_1\cos(x) + C_2\sin(x)$. Assim, devemos procurar solução particular $y_p(x)$ da forma

$$y_p(x) = u(x)y_1(x) + v(x)y_2(x)$$
$$\Rightarrow y_p(x) = u(x)\cos(x) + v(x)\sin(x).$$

Como $a = 1$, $W = 1$ e $G(x) = \tan(x)$, temos da fórmula (17) que

$$
\begin{aligned}
y_p(x) &= -y_1(x)\int \frac{Gy_2}{aW}dx + y_2(x)\int \frac{Gy_1}{aW}dx\\
&= -\cos(x)\int \frac{\tan(x)\sin(x)}{1}dx + \sin(x)\int \frac{\tan(x)\cos(x)}{1}dx\\
&= -\cos(x)\int \frac{\sin^2(x)}{\cos(x)}dx + \sin(x)\int \sin(x)dx\\
&= -\cos(x)\int \frac{1-\cos^2(x)}{\cos(x)}dx - \sin(x)\cos(x) + c\\
&= -\cos(x)\int \left(\frac{1}{\cos(x)} - \cos(x)\right)dx - \sin(x)\cos(x) + c\\
&= -\cos(x)\ln|\sec(x)+\tan(x)|\\
&+ \cos(x)\sin(x) - \sin(x)\cos(x) + c\\
&= -\cos(x)\ln|\sec(x)+\tan(x)| + c.
\end{aligned}
$$

Como $a \neq 0$, dividindo a EDO por a, podemo supor que $a = 1$. Além disso, b e c podem ser funções contínuas quaisquer.

O método pode ser estendido analogamente para EDO's de ordem maior do que 2, neste caso o cálculo do determinante deve ser considerado como uma dificuldade.

3. Sugestão de atividade

Uma boa atividade é utilizar o software Maple, ou outro equivalente, para automatizar a resposta apresentada pelo método. Embora já exista esta solução pronta no software, é sempre instrutivo para o aluno refazer os passos do método computacionalmente. Veja um exemplo do Maple para obter uma solução particular da EDO de segunda ordem $y'' + y = \sin(t)$.

Notemos que $y_1(t) = \cos(t)$ e $y_2 = \sin(t)$ são soluções imediatas da EDO homogênea associada. Assim, podemos buscar por uma solução particular utilizando o método da variação dos parâmetros. Veja a seguir os comandos Maple na worksheet.

```
> restart : with(linalg) :
> eq := diff(y(t), t$2) + y(t) = sin(t);
> simplify(eq);
> y[1] := t→ cos(t);
  y[2] := t→ sin(t); a := 1;
  G := t→sin(t);
  W := t→det(wronskian([y[1](t), y[2](t)], t));
  simplify(W(t));
> u(t) =-int( G(t)·y[2](t) / (a·W(t)), t );
> v(t) = int( G(t)·y[1](t) / (a·W(t)), t );
> -y[1](t)·int( G(t)·y[2](t) / (a·W(t)), t ) + y[2](t)·int( G(t)·y[1](t) / (a·W(t)), t ) + c;
> solparticular = simplify(%);
>
```

Figura 1: comandos Maple para o exemplo

Assim, após executar os comando, obtemos que a solução particular é $y_p(t) = -\frac{t}{2}\cos(t) + c$. Segue que a solução geral é:

$$y(t) = c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t) - \frac{1t}{2}\cos(t) + c.$$

4. Conclusão

Deve-se sugerir aos estudantes a adoção e utilização de um software de matemática simbólica, isto trará mais autonomia e reforço no seu aprendizado. Existem atualmente vários softwares de computação algébrica gratuitos como, por exemplo, SciLab e SymPy do Python.

Referências

1. E. KREYSZIG, H. Kreyszig, and E. Norminton. Advanced Engineering Mathematics. Wiley, Hoboken, NJ, Tenth edition, (2011)

2. ANDRADE, D. *Geometria Analítica*. 2. ed. Florianópolis: UFSC, 2010.

3. BOYER, Carl B. *A History of Mathematics*. 2nd ed., 1968 . Wiley.