



Números de Bernoulli e o Problema da Basileia Generalizado

Marcos Calçada – Email: mcalcada@uepg.br

Maikon Luiz Mirkoski – Email: maikon.mirkoski@ifpr.edu.br

Marciano Pereira – Email: marciano@uepg.br

Resumo: Neste trabalho, os polinômios de Bernoulli são introduzidos por meio de uma caracterização simples e, posteriormente, definimos os números de Bernoulli. A seguir estudamos as séries de Fourier dos polinômios de Bernoulli. Os diversos resultados obtidos nos permitem resolver (parcialmente) o que chamamos de *Problema da Basileia generalizado*, qual seja, encontrar uma fórmula fechada para a soma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, com p inteiro maior do que 1. A função zeta de Riemann é introduzida e mostramos a sua conexão mais elementar com a teoria dos números primos. Também procuramos apresentar algumas informações históricas com o intuito de mostrar a relevância do problema considerado.

Palavras-chave: números de Bernoulli, polinômios de Bernoulli, séries de Fourier, função zeta de Riemann.

1. Introdução

Os números de Bernoulli estão entre as sequências numéricas mais interessantes e importantes da Matemática. Historicamente, os números de Bernoulli surgiram na obra póstuma *Ars Conjectandi*¹, em 1713, do suíço Jacob Bernoulli (1654-1705), na descrição de uma forma de calcular a soma de potências de inteiros consecutivos

$$S_p(n) = 1^p + 2^p + \cdots + n^p, \quad (1)$$

para inteiros $n > 0$ e $p > 0$. De forma mais precisa, os números de Bernoulli nos permitem calcular os coeficientes do polinômio de grau $p + 1$ na variável n que é o valor de $S_p(n)$. A Figura 1, com fórmulas fechadas para soma de potências, com p de 1 a 10, estava na obra de Bernoulli. Ele usou o símbolo \int , um S alongado, para indicar a somatória. Na notação moderna, as três primeiras somas seriam:

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n(n+1),$$

¹A arte de Conjeturar.

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1),$$

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2.$$

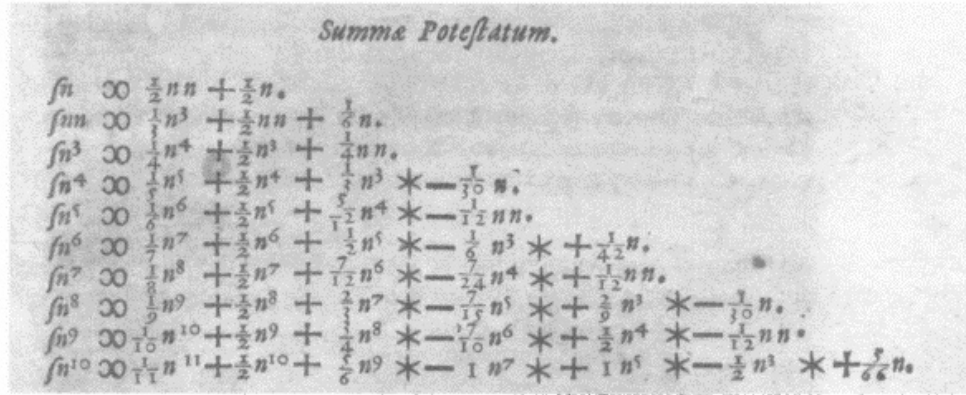


Figura 1: Reprodução da lista de fórmulas do livro *Ars Conjectandae* p. 97

A fórmula geral para calcular a soma de p -ésimas potências não foi explicitada por Bernoulli (APOSTOL, 2008), mas sabemos que

$$\sum_{k=1}^{m-1} k^p = \frac{B_{p+1}(m) - B_{p+1}}{p+1}, \quad p \geq 1, m \geq 2, \quad (2)$$

sendo $B_n(x)$ um polinômio em x de grau n , chamado **polinômio de Bernoulli**, dado por

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k x^{n-k}, \quad n \geq 0, \quad (3)$$

em que os B_k são os **números de Bernoulli**. Podemos defini-los recursivamente como:

$$B_0 = 1, \quad \text{e} \quad \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k = 0, \quad \text{para } n \geq 2. \quad (4)$$

Por meio da equação (4) verificamos que:

B_0	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8	B_9	B_{10}	B_{11}	B_{12}
1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{5}{66}$	0	$-\frac{691}{2730}$

Tabela 1: Números de Bernoulli

Da equação (3), vemos que $B_n = B_n(0) = B_n(1)$, para todo $n \geq 2$. Os B_n , com n ímpar

e maior que 2, são todos iguais a zero. Assim, usando a equação (3) obtemos os polinômios de Bernoulli:

$$\begin{aligned} B_1(x) &= x - \frac{1}{2}, \\ B_2(x) &= x^2 - x + \frac{1}{6}, \\ B_3(x) &= x^3 - \frac{3x^2}{2} + \frac{x}{2}, \\ B_4(x) &= x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}, \\ B_5(x) &= x^5 - \frac{5x^4}{2} + \frac{5x}{3} - \frac{x}{6}, \\ B_6(x) &= x^6 - 3x^5 + \frac{5x^4}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{42}. \end{aligned}$$

Vale ressaltar que o japonês Takakazu Seki (1642-1708) também definiu os mesmos números de Bernoulli no seu livro póstumo *Katsuyo Sanpo*², em 1712. Este é um caso em que não haverá dúvidas quanto à descoberta independente e praticamente simultânea de um mesmo conceito (ARAKAWA et al., 2014, p. 2-3).

Os números e os polinômios de Bernoulli possuem muitas aplicações na Matemática. Por exemplo, no estudo do último teorema de Fermat (IRELAND; ROSEN, 1990), na expansão de Euler-Maclaurin (APOSTOL, 1999; MARICONDA; TONOLO, 2016), no cálculo de diferenças finitas (MARICONDA; TONOLO, 2016; GRAHAM; KNUTH; PATASHNIK, 1995), em análise combinatória (COMTET, 2011; GRAHAM; KNUTH; PATASHNIK, 1995) ou na teoria de distribuição dos números primos (OLIVEIRA, 2013; STOPPLE, 2003).

Uma importante aplicação dos números de Bernoulli é no estudo da distribuição dos números primos e da função zeta de Riemann $\zeta(s)$ (APOSTOL, 2008), definida para $s > 1$ pela série

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}. \quad (5)$$

Há bastante tempo essa função atrai a atenção de vários matemáticos de renome. Ela foi, na verdade, introduzida por Leonhard Euler, apesar do nome. Já no século XVII, ela estava ligada ao famoso **problema da Basileia**. Para compreender o problema, convém recuar a 1650, ano em que foi publicado o livro *Novæ quadraturæ arithmeticae sev de additione*

²Fundamentos da Arte do Cálculo.

fractionum, de Pietro Mengoli. É um livro sobre soma de séries, duas das quais são:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \quad (6)$$

e

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots \quad (7)$$

No livro é demonstrado que a primeira série, a série harmônica, diverge. O autor também levantou a questão de qual é o valor da soma da segunda série. Este problema também foi discutido por Jacob Bernoulli em 1689. O problema só foi resolvido em 1735 por Leonhard Euler. Ele mostrou que, de forma surpreendente,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots = \frac{\pi^2}{6}. \quad (8)$$

Variações dessa série são desde então muito estudadas, sendo que a equação (8) é na verdade $\zeta(2)$. Assim, o que estamos chamando de Problema da Basileia generalizado consiste em obter uma fórmula explícita para os valores da função zeta para inteiros maiores do que 1. O próprio Euler calculou mais valores da função zeta, chegando inclusive a calcular $\zeta(26)$ (DUNHAM, 1999).

Neste trabalho pretendemos apresentar uma solução (parcial) do problema da Basileia generalizado, ou seja, encontrar uma fórmula explícita para os valores da função zeta nos inteiros positivos pares. Esta fórmula envolve os números de Bernoulli. Para tanto, fazemos uso da teoria das séries de Fourier e seguimos um caminho totalmente diferente do caminho histórico.

2. Números e Polinômios de Bernoulli

Nesta seção introduzimos os polinômios de Bernoulli mostrando que são os únicos polinômios que satisfazem três condições simples. Já os números de Bernoulli são definidos como sendo os valores em $x = 0$ dos correspondentes polinômios de Bernoulli. A seguir mostramos como a sequência dos números de Bernoulli pode ser obtida de maneira recursiva. Por fim ilustramos esse resultado calculando os primeiros números de Bernoulli.

Proposição 2.1 *Existe uma única sequência de polinômios $B_m(x)$, $m \in \mathbb{N}$, tal que $B_0(x) = 1$ e, para todo inteiro $m \geq 1$,*

$$(i) \quad B'_m(x) = mB_{m-1}(x),$$

$$(ii) \quad \int_0^1 B_m(x) dx = 0.$$

Antes de fazermos a prova da Proposição 2.1, observe que as condições (i) e (ii) são equivalentes às condições:

$$(i) \quad B'_m(x) = mB_{m-1}(x),$$

$$(ii)' \quad B_m(1) = B_m(0), \quad \forall m \geq 2.$$

De fato, se $m \geq 1$, então

$$\int_0^1 B_m(x)dx = \int_0^1 \frac{B'_{m+1}(x)}{m+1} dx = \frac{1}{m+1} [B_{m+1}(1) - B_{m+1}(0)].$$

Demonstração: (da **Existência** - Por indução) Se $n = 1$, temos pela condição (i)

$$B'_1(x) = 1 \cdot B_0(x) = 1,$$

e assim,

$$B_1(x) = x + c_1,$$

para alguma constante c_1 . Mas pela condição (ii) obtemos

$$0 = \int_0^1 (x + c_1)dx = \frac{x^2}{2} + c_1x \Big|_0^1 = \frac{1}{2} + c_1.$$

Portanto, $c_1 = -\frac{1}{2}$ e $B_1(x) = x - \frac{1}{2}$.

Suponhamos agora por indução que para algum $n \geq 2$ existem $B_0(x), B_1(x), \dots, B_n(x)$ polinômios que satisfazem (i) e (ii). Vamos então provar que existe um único polinômio $B_{n+1}(x)$ que satisfaz as condições (i) e (ii) com $m = n + 1$, isto é,

$$(a) \quad B'_{n+1}(x) = (n+1)B_n(x),$$

$$(b) \quad \int_0^1 B_{n+1}(x)dx = 0.$$

De fato, como a integral indefinida de um polinômio é um polinômio, temos que

$$B_{n+1}(x) = B_{n+1}(0) + (n+1) \int_0^x B_n(t)dt$$

é um polinômio que satisfaz a condição (a). Além disso,

$$\int_0^1 B_{n+1}(x)dx = (n+1) \int_0^1 B'_n(x)dx = (n+1)n \int_0^1 B_{n-1}(x)dx = 0,$$

pelas condições (a) e (b) e a hipótese de indução. Provamos que existe um polinômio $B_{n+1}(x)$ que satisfaz (a) e (b).

Resta verificar a **unicidade**. Seja $\overline{B}_{n+1}(x)$ outro polinômio que satisfaz (a) e (b). Ou seja,

$$\overline{B}'_{n+1}(x) = (n+1)B_n(x) \quad \text{e} \quad \int_0^1 \overline{B}_{n+1}(x)dx = 0.$$

Então, para todo x ,

$$(B_{n+1} - \overline{B}_{n+1})'(x) = B'_{n+1}(x) - \overline{B}'_{n+1}(x) = (n+1)B_n(x) - (n+1)B_n(x) = 0.$$

Ou seja,

$$B_{n+1}(x) = \overline{B}_{n+1}(x) + c,$$

para alguma constante c . Mas, por (b),

$$0 = \int_0^1 B_{n+1}(x)dx = \int_0^1 \overline{B}_{n+1}(x)dx + \int_0^1 cdx = 0 + c = c.$$

Logo, $c = 0$ e $B_{n+1}(x) = \overline{B}_{n+1}(x), \forall x$. Assim, pelo princípio da indução matemática, vale a proposição. \square

A sequência de polinômios da Proposição 2.1 é chamada de **sequência de polinômios de Bernoulli**.

Exemplo 2.2 *Vimos que $B_0(x) = 1$ e $B_1(x) = x - \frac{1}{2}$. Agora,*

$$B'_2(x) = 2B_1(x) = 2x - 1,$$

de modo que

$$B_2(x) = x^2 - x + c,$$

para alguma constante c . Mas

$$0 = \int_0^1 B_2(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + cx \Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + c,$$

assim, $c = \frac{1}{6}$ e

$$B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}.$$

Procedendo de forma semelhante podemos verificar que:

$$\begin{aligned}
 B_3(x) &= x^3 - \frac{3x^2}{2} + \frac{x}{2}, \\
 B_4(x) &= x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}, \\
 B_5(x) &= x^5 - \frac{5x^4}{2} + \frac{5x}{3} - \frac{x}{6}, \\
 B_6(x) &= x^6 - 3x^5 + \frac{5x^4}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{42}.
 \end{aligned}$$

Nas figuras 2, 3 e 4 apresentamos os gráficos de alguns polinômios de Bernoulli.

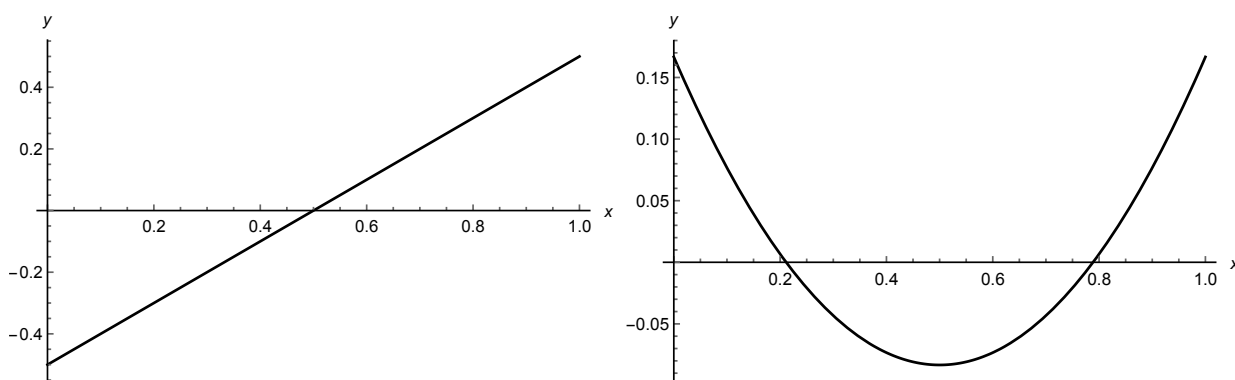


Figura 2: $B_1(x), B_2(x)$

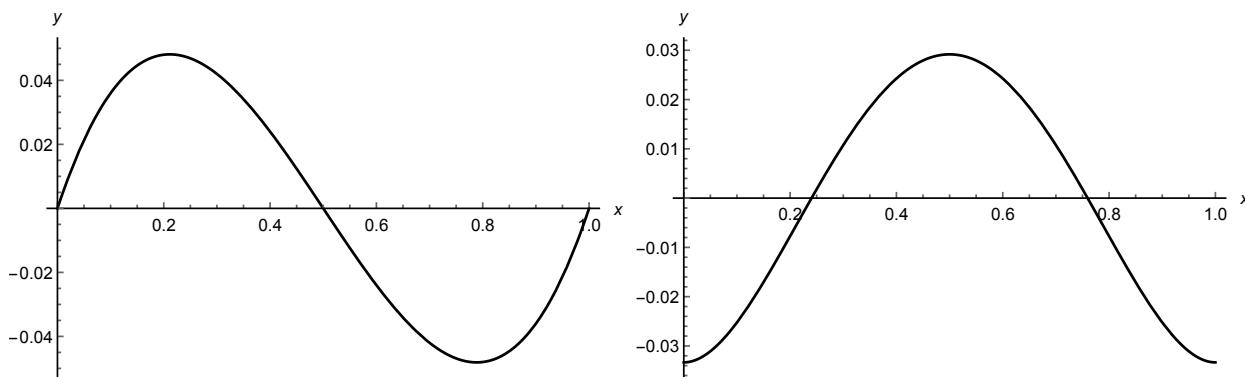


Figura 3: $B_3(x), B_4(x)$

Observe que o m -ésimo polinômio de Bernoulli é um polinômio de grau m , assim podemos escrever

$$B_m(x) = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} c_{k,m} x^{m-k}, \tag{9}$$

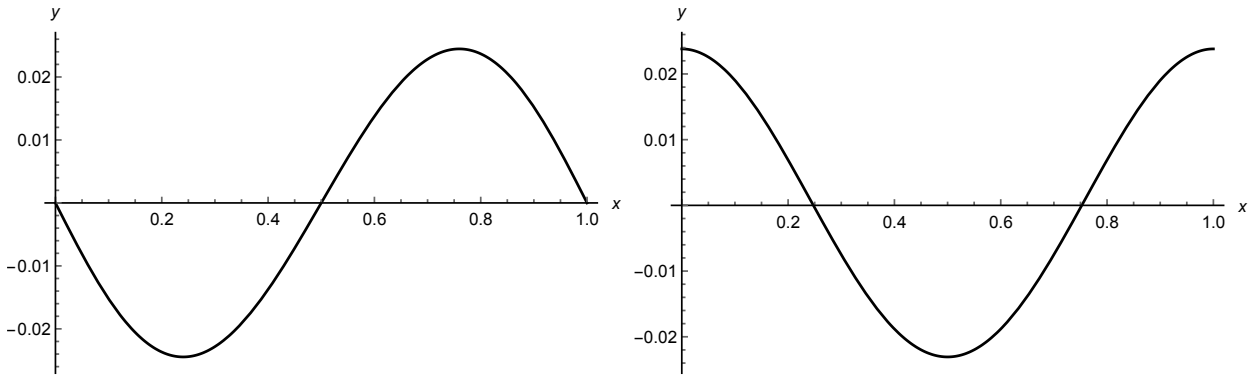


Figura 4: $B_5(x), B_6(x)$

para certos escalares $c_{0,m}, c_{1,m}, \dots, c_{m,m}$. Daí,

$$\begin{aligned} B'_m(x) &= \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m}{k} c_{k,m} (m-k) x^{m-k-1} = \sum_{k=0}^{m-1} m \binom{m-1}{k} c_{k,m} x^{m-k-1} \\ &= m \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m-1}{k} c_{k,m} x^{m-1-k}. \end{aligned}$$

Mas, pela condição (i) da proposição 2.1, temos $B'_m(x) = mB_{m-1}(x)$, se $m \geq 1$. Logo, se $m \geq 1$ temos

$$m \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m-1}{k} c_{k,m} x^{m-1-k} = m \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m-1}{k} c_{k,m-1} x^{m-k-1}.$$

Portanto, para $k = 0, 1, 2, \dots, m-1$,

$$c_{k,m} = c_{k,m-1}.$$

Quer dizer, os coeficientes $c_{k,m}$ não dependem de m , apenas de k . Assim, podemos reescrever a equação (9) como

$$B_m(x) = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} c_k x^{m-k}. \quad (10)$$

Note que $B_m(0) = \binom{m}{m} c_m = c_m$, para todo $m \in \mathbb{N}$.

Os números $B_m(0)$ são chamados **números de Bernoulli** e denotados por B_m . Logo, pelo Exemplo 2.2, temos

$$B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_3 = 0, B_4 = -\frac{1}{30}, B_5 = 0, B_6 = \frac{1}{42}.$$

Nosso raciocínio anterior provou a seguinte proposição.

Proposição 2.3 *Seja $m \in \mathbb{N}$. Então,*

$$B_m(x) = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} B_k x^{m-k}. \quad (11)$$

A próxima proposição nos fornece uma fórmula recursiva para calcular os números de Bernoulli e, conseqüentemente, os polinômios de Bernoulli.

Proposição 2.4 *Os números de Bernoulli satisfazem a relação de recorrência*

$$\begin{aligned} (i) \quad & B_0 = 1, \\ (ii) \quad & B_m = -\frac{1}{m+1} \sum_{j=0}^{m-1} \binom{m+1}{j} B_j, \quad m \geq 1. \end{aligned}$$

Demonstração: Já que

$$\int_0^1 B_m(x) dx = 0,$$

se $m \geq 1$, pela Proposição 2.3,

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} B_k \int_0^1 x^{m-k} dx = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} B_k \frac{1}{m-k+1} = \sum_{k=0}^m \binom{m+1}{k} B_k \frac{1}{m+1} \\ &= \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^m \binom{m+1}{k} B_k. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\sum_{k=0}^{m-1} \binom{m+1}{k} B_k + \binom{m+1}{m} B_m = 0,$$

ou ainda, de forma equivalente,

$$B_m = -\frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m+1}{k} B_k.$$

□

Exemplo 2.5 *Vamos calcular os 4 primeiros números de Bernoulli usando a relação de recorrência a Proposição 2.4.*

Para $m = 1$,

$$B_1 = -\frac{1}{2} \sum_{k=0}^0 \binom{2}{k} B_k = -\frac{1}{2} B_0 = -\frac{1}{2}.$$

Para $m = 2$,

$$B_2 = -\frac{1}{3} \sum_{k=0}^1 \binom{3}{k} B_k = -\frac{1}{3} \left(\binom{3}{0} B_0 + \binom{3}{1} B_1 \right) = -\frac{1}{3} \left(\frac{-1}{2} \right) = \frac{1}{6}.$$

Para $m = 3$,

$$B_3 = -\frac{1}{4} \sum_{k=0}^2 \binom{4}{k} B_k = -\frac{1}{4} \left(\binom{4}{0} B_0 + \binom{4}{1} B_1 + \binom{4}{2} B_2 \right) = -\frac{1}{4} (1 - 2 + 1) = 0.$$

Para $m = 4$,

$$\begin{aligned} B_4 &= -\frac{1}{5} \sum_{k=0}^3 \binom{5}{k} B_k = -\frac{1}{5} \left(\binom{5}{0} B_0 + \binom{5}{1} B_1 + \binom{5}{2} B_2 + \binom{5}{3} B_3 \right) \\ &= -\frac{1}{5} \left(1 - \frac{5}{2} + \frac{5}{3} \right) = -\frac{1}{30}. \end{aligned}$$

Podemos facilmente continuar aplicando a proposição 2.4 até obter a tabela abaixo.

B_0	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8	B_9	B_{10}	B_{11}	B_{12}	B_{13}	B_{14}	B_{15}
1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{5}{66}$	0	$-\frac{691}{2730}$	0	$\frac{7}{6}$	0

Tabela 2: Números de Bernoulli

3. Polinômios de Bernoulli e Séries de Fourier

Nesta seção calculamos as séries de Fourier para os polinômios de Bernoulli no intervalo $[0, 1]$. A seguir definimos a função zeta de Riemann e provamos a equação de Euler que relaciona esta função com os números primos. Por fim, utilizamos as séries de Fourier obtidas anteriormente para expressar o valor da função zeta nos pares positivos em termos de números de Bernoulli.

Inicialmente, precisamos relembrar alguns fatos básicos sobre séries de Fourier: (FIGUEIREDO, 2018)

1) A Série de Fourier de um função periódica localmente integrável $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de período 1 é a série

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(2\pi kx) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(2\pi kx),$$

em que os **coeficientes de Fourier** de f são dados por

$$a_k = 2 \int_0^1 f(x) \cos(2\pi kx) dx, \quad k \geq 0,$$

$$b_k = 2 \int_0^1 f(x) \sin(2\pi kx) dx, \quad k \geq 1,$$

Note que, como f é periódica de período 1, $a_k = 0$ se f é ímpar, e $b_k = 0$ se f é par.

2) O Teorema de Fourier de Convergência Pontual afirma que a série de Fourier de f converge para $f(x)$ em todo ponto x no qual f é contínua e tem derivadas à esquerda e à direita (não necessariamente iguais).

Fazendo uso desses fatos podemos provar a seguinte proposição.

Proposição 3.1 *As seguintes identidades são válidas:*

(i)

$$B_1(x) = -\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi kx)}{k}, \quad \forall x \in (0, 1).$$

(ii) Se m é par,

$$B_m(x) = 2(-1)^{\frac{m}{2}+1} \frac{m!}{(2\pi)^m} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi kx)}{k^m}, \quad \forall x \in [0, 1].$$

(iii) Se m é ímpar,

$$B_m(x) = 2(-1)^{\frac{m+1}{2}} \frac{m!}{(2\pi)^m} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi kx)}{k^m}, \quad \forall x \in [0, 1].$$

Demonstração: Para todo $m \geq 1$, seja $B_m^p(x)$ a extensão periódica para \mathbb{R} da restrição de $B_m(x)$ a $[0, 1]$. Assim, $B_m^p(x) = B_m(x)$ para $x \in [0, 1]$, de modo que no cálculo dos coeficientes de Fourier de $B_m^p(x)$ podemos trocar $B_m^p(x)$ por $B_m(x)$. Assim, os coeficientes de Fourier de $B_m^p(x)$ são dados por

$$a_k^m = 2 \int_0^1 B_m(x) \cos(2\pi kx) dx, \quad k \geq 0,$$

$$b_k^m = 2 \int_0^1 B_m(x) \sin(2\pi kx) dx, \quad k > 0.$$

Primeiramente, vamos calcular a série de Fourier de $B_1(x)$. Temos

$$a_0^1 = 2 \int_0^1 B_1(x) dx = 0,$$

e se $k > 0$, usando integração por partes obtemos

$$\begin{aligned} a_k^1 &= 2 \int_0^1 B_1(x) \cos(2\pi kx) dx = 2B_1(x) \frac{\sin(2\pi kx)}{2\pi k} \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 B_1'(x) \frac{\sin(2\pi kx)}{2\pi k} dx \\ &= 0 - \frac{2}{2\pi k} \int_0^1 B_0(x) \sin(2\pi kx) dx = -\frac{1}{\pi k} \int_0^1 \sin(2\pi kx) dx = 0, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} b_k^1 &= 2 \int_0^1 B_1(x) \sin(2\pi kx) dx = -\frac{2B_1(x) \cos(2\pi kx)}{2\pi k} \Big|_0^1 + 2 \int_0^1 B_1'(x) \frac{\cos(2\pi kx)}{2\pi k} dx \\ &= -\frac{(2x-1) \cos(2\pi kx)}{2\pi k} \Big|_0^1 + \frac{1}{\pi k} \int_0^1 \cos(2\pi kx) dx = -\frac{1}{\pi k}. \end{aligned}$$

Como $B_1^p(x)$ é diferenciável em $[0, 1]$, segue-se do Teorema de Fourier de Convergência Pontual que

$$B_1(x) = -\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi kx)}{k}, \quad \forall x \in (0, 1).$$

Suponhamos agora que $m > 1$. Temos, para $k \geq 1$,

$$\begin{aligned} a_k^m &= 2 \int_0^1 B_m(x) \cos(2\pi kx) dx = 2B_m(x) \frac{\sin(2\pi kx)}{2\pi k} \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 B_m'(x) \frac{\sin(2\pi kx)}{2\pi k} dx \\ &= -\frac{1}{2\pi k} 2 \int_0^1 m B_{m-1}(x) \sin(2\pi kx) dx = -\frac{m}{2\pi k} b_k^{m-1}, \quad \text{e} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_k^m &= 2 \int_0^1 B_m(x) \sin(2\pi kx) dx = -2B_m(x) \frac{\cos(2\pi kx)}{2\pi k} \Big|_0^1 + 2 \int_0^1 B_m'(x) \frac{\cos(2\pi kx)}{2\pi k} dx \\ &= -\frac{(B_m(1) - B_m(0))}{\pi k} + 2 \int_0^1 m B_{m-1}(x) \frac{\cos(2\pi kx)}{2\pi k} dx \\ &= \frac{m}{2\pi k} 2 \int_0^1 B_{m-1}(x) \cos(2\pi kx) dx = \frac{m}{2\pi k} a_k^{m-1}. \end{aligned}$$

Para $k = 0$ temos

$$a_0^m = 2 \int_0^1 B_m(x) dx = 0.$$

Verificamos então, que

$$a_k^m = -\frac{m}{2\pi k} b_k^{m-1}, \quad (12)$$

$$b_k^m = \frac{m}{2\pi k} a_k^{m-1}, \quad (13)$$

se $m > 1$. Logo, se $m > 2$,

$$a_k^m = -\frac{m(m-1)}{(2\pi k)^2} a_k^{m-2},$$

$$b_k^m = -\frac{m(m-1)}{(2\pi k)^2} b_k^{m-2}.$$

Se $m \geq 2$ e ímpar, podemos escrever

$$a_k^m = (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{m!}{(2\pi k)^{m-1}} a_k^1,$$

$$b_k^m = (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{m!}{(2\pi k)^{m-1}} b_k^1.$$

Como $a_k^1 = 0$ para todo $k \geq 0$ e, $b_k^1 = -\frac{1}{\pi k}$ para todo $k > 0$, temos

$$a_k^m = 0, \quad \forall k \geq 0, \quad (14)$$

$$b_k^m = (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{m!}{(2\pi k)^{m-1}} \frac{(-1)}{\pi k} = 2(-1)^{\frac{m+1}{2}} \frac{m!}{(2\pi k)^m}, \quad \forall k \geq 1. \quad (15)$$

Como $B_m^p(x)$ é contínua e possui derivadas laterais em todos os pontos, temos pelo Teorema de Fourier que se $m > 1$ e ímpar:

$$B_m(x) = 2(-1)^{\frac{m+1}{2}} \frac{m!}{(2\pi)^m} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi kx)}{k^m},$$

para todo $x \in [0, 1]$.

Agora se m é par e $m \geq 4$ obtemos, usando as equações (12), (13), (14) e (15).

$$a_k^m = -\frac{m}{2\pi k} b_k^{m-1} = -\frac{m}{2\pi k} 2(-1)^{\frac{m}{2}} \frac{(m-1)!}{(2\pi k)^{m-1}} = 2(-1)^{\frac{m}{2}+1} \frac{m!}{(2\pi k)^m},$$

e

$$b_k^m = \frac{m}{2\pi k} a_k^{m-1} = 0.$$

Se $m = 2$ temos pelas equações (12) e (13):

$$\begin{aligned} a_k^2 &= -\frac{2}{2\pi k} b_k^1 = -\frac{2}{2\pi k} \left(\frac{-1}{\pi k} \right) = \frac{2 \cdot 2!}{(2\pi k)^2}, \\ b_k^2 &= \frac{2}{2\pi k} a_k^1 = 0. \end{aligned}$$

Em suma, se $m \geq 2$ e par temos:

$$\begin{aligned} a_k^m &= 2(-1)^{\frac{m}{2}+1} \frac{m!}{(2\pi k)^2}, & k \geq 1, \\ a_0^m &= 0, \\ b_k^m &= 0, & k \geq 1. \end{aligned}$$

Como $B_m^p(x)$ é contínua e possui derivadas laterais em todos os pontos, temos pelo teorema de Fourier, que se $m \geq 2$ e par:

$$B_m(x) = 2(-1)^{\frac{m}{2}+1} \frac{m!}{(2\pi)^m} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi kx)}{k^m},$$

para todo $x \in [0, 1]$. □

Observação 3.2 Note que pelo item (iii) da Proposição 3.1 obtemos para $n \geq 1$,

$$B_{2n+1} = B_{2n+1}(0) = 0.$$

Ou seja, todos os números de Bernoulli com índices ímpares são nulos, exceto o primeiro.

Nas figuras 5, 6 e 7 estão os gráficos de séries truncadas com 5 e 10 termos para alguns polinômios de Bernoulli.

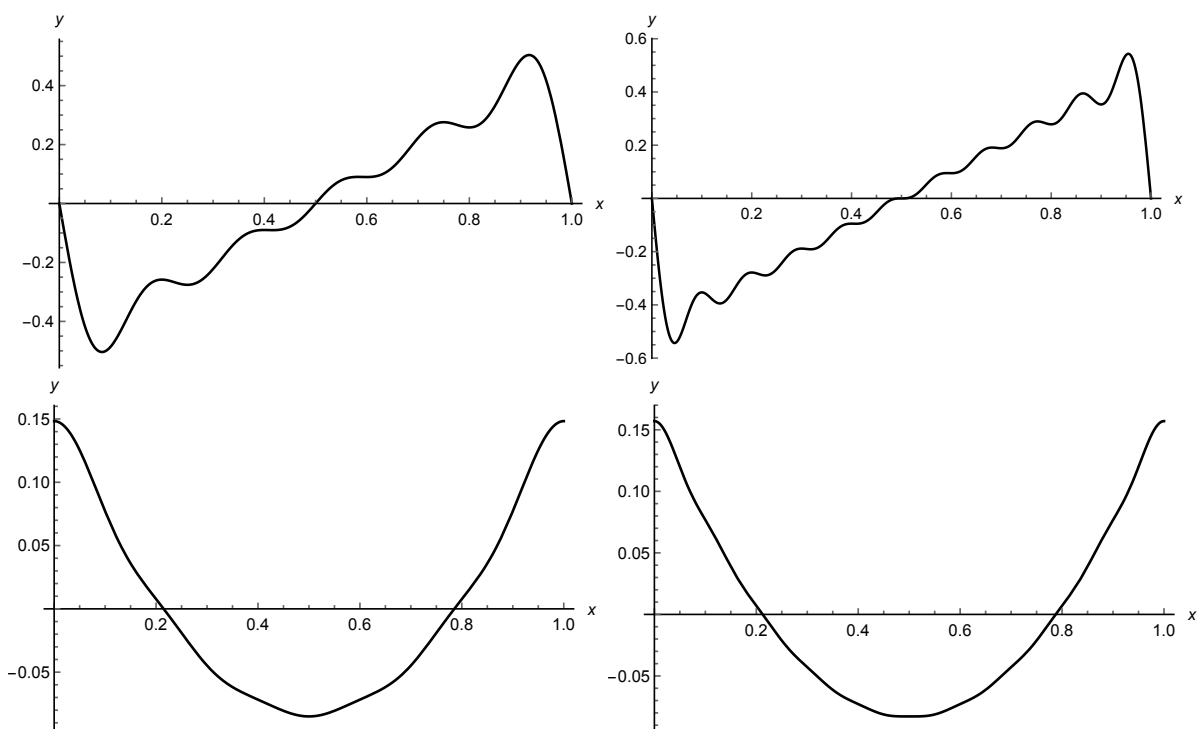


Figura 5: $B_1(x), B_2(x)$

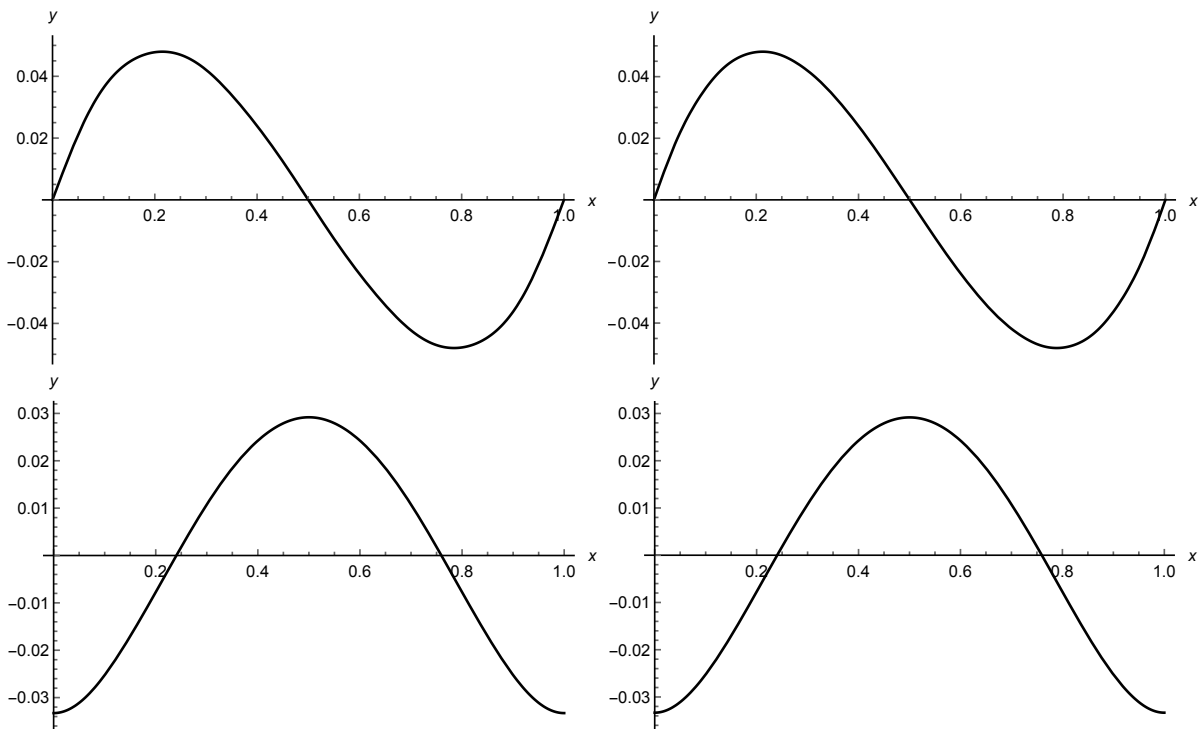


Figura 6: $B_3(x), B_4(x)$

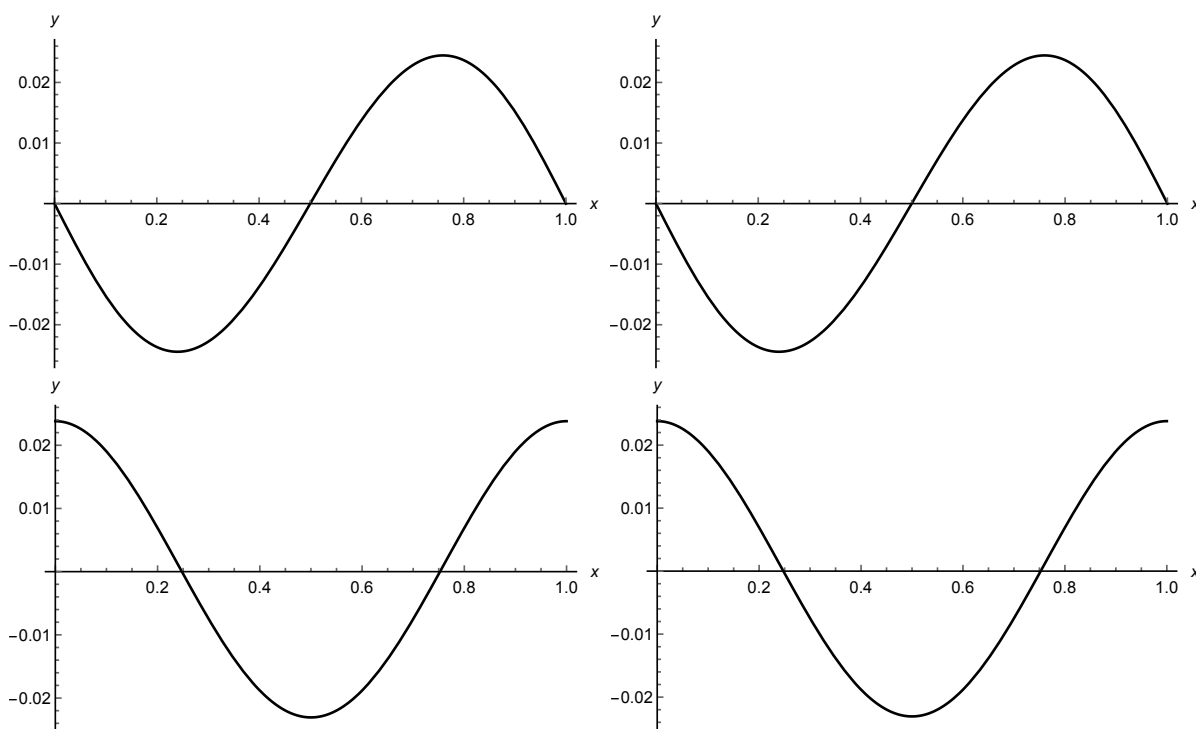


Figura 7: $B_5(x), B_6(x)$

É fácil verificar usando o teste da integral que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ converge se $x > 1$. Portanto, está bem definida a função $\zeta : (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}, \tag{16}$$

a qual é chamada de **função zeta de Riemann**. Trata-se de uma das mais importantes funções da Matemática, pois possui diversas relações fundamentais com os números primos. De fato, a primeira conexão importante entre números primos e a função zeta foi descoberta por Euler e é apresentada no próximo teorema.

Teorema 3.3 (Euler) *Para todo $s > 0$, temos que*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ primo}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}. \tag{17}$$

Demonstração: Observe primeiro que

$$\zeta(s) \frac{1}{2^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^s},$$

de modo que

$$\zeta(s) - \frac{1}{2^s} \zeta(s) = \zeta(s) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^s} \implies \left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \zeta(s) = \sum_{\substack{n=1, \\ n \text{ ímpar}}}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Agora note que

$$\left(1 - \frac{1}{3^s}\right) \left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \zeta(s) = \left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \zeta(s) - \frac{1}{3^s} \left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \zeta(s).$$

Ou seja, todos os múltiplos de 3 são removidos de $\left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \zeta(s)$. Logo,

$$\left(1 - \frac{1}{3^s}\right) \left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \zeta(s) = \sum_{\substack{n=1, \\ (n,6)=1}}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Na última somatória $(n, 6) = 1$ indica o mdc de n e 6 que é igual a 1. Quer dizer, todos os múltiplos de 2 e 3 não estão presentes no somatório. Assim, repetindo o mesmo argumento para todos os primos menores que um número x , verificamos que

$$\prod_{p < x} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) \zeta(s) = 1 + \frac{1}{q^s} + \dots,$$

em que foram retirados todos os múltiplos dos primos menores do que x . Além disso, q é o menor primo maior ou igual a x e é o menor termo depois de 1 presente no lado direito da igualdade. Portanto, tomando o limite de x tendendo ao infinito obtemos

$$\prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) \zeta(s) = 1,$$

o que prova o teorema. □

Como uma consequência simples do último teorema temos o seguinte resultado bem conhecido sobre os números primos.

Teorema 3.4 *Existem infinitos números primos.*

Demonstração: Suponhamos por absurdo que existe apenas um número finito de primos. Então, o produtório do lado direito do Teorema de Euler envolve apenas um número finito de termos e, portanto, tem limite quando $s \rightarrow 1$. Porém, o lado esquerdo torna-se a série harmônica no limite quando $s \rightarrow 1$. Isso é uma contradição, já que, como sabemos, a série

$\zeta(2)$	$\zeta(4)$	$\zeta(6)$	$\zeta(8)$	$\zeta(10)$	\dots
$\frac{\pi^2}{6}$	$\frac{\pi^4}{90}$	$\frac{\pi^6}{945}$	$\frac{\pi^8}{9450}$	$\frac{\pi^{10}}{93555}$	\dots

Tabela 3: Alguns valores de $\zeta(2k)$

harmônica é divergente. Logo, existem infinitos números primos. □

O próximo resultado é a solução parcial do que chamamos de problema da Basileia generalizado e é o objetivo principal deste trabalho.

Proposição 3.5 *Seja m par e $m \geq 2$. Então*

$$\zeta(m) = (-1)^{\frac{m}{2}+1} \frac{1}{2} \frac{(2\pi)^m}{m!} B_m,$$

em que B_m é o m -ésimo número de Bernoulli.

Demonstração: De fato, usando (ii) da Proposição 3.1 obtemos

$$\begin{aligned} B_m = B_m(0) &= 2(-1)^{\frac{m}{2}+1} \frac{m!}{(2\pi)^m} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi k0)}{k^m} \\ &= 2(-1)^{\frac{m}{2}+1} \frac{m!}{(2\pi)^m} \zeta(m), \end{aligned}$$

de onde é claro o resultado. □

4. Considerações Finais

Verificamos que os valores da função zeta de Riemann nos inteiros positivos pares são dados em termos de uma expressão simples envolvendo os números de Bernoulli. Todavia, até hoje em dia não se conhece uma fórmula explícita para os valores da função zeta nos inteiros positivos ímpares. O próprio Euler tentou obter tais fórmulas sem lograr sucesso. Algum progresso foi obtido somente em 1978 quando Roger Apéry provou que $\zeta(3)$ é irracional, embora não se possa afirmar o mesmo para $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, e etc (DUNHAM, 1999). Sendo assim, o que chamamos de problema da Basileia generalizado continua em aberto.

Referências

- 1 APOSTOL, Tom M. A Primer on Bernoulli Numbers and Polynomials. **Mathematics Magazine**, Mathematical Association of America, v. 81, n. 3, p. 178–190, 2008.
- 2 _____. An Elementary View of Euler’s Summation Formula. **The American Mathematical Monthly**, Mathematical Association of America, v. 106, n. 5, p. 409–418, 1999.
- 3 ARAKAWA, Tsuneo et al. **Bernoulli Numbers and Zeta Functions**. New York: Springer, 2014. P. 285.
- 4 COMTET, Louis. **Advanced Combinatorics: The Art of Finite and Infinite Expansions**. Paris: Springer, 2011. P. 354.
- 5 DUNHAM, William. **Euler: The Master of Us All**. Washington: The Mathematical Association of America, 1999. P. 185.
- 6 FIGUEIREDO, Djairo Guedes de. **Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais**. 5. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2018. P. 292.
- 7 GRAHAM, Judy; KNUTH, Donald; PATASHNIK, Oren. **Matemática Concreta: Fundamentos para a Ciência da Computação**. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC Editora, 1995. P. 492.
- 8 IRELAND, Kenneth; ROSEN, Michael. **A Classical Introduction to Modern Number Theory**. 2. ed. New York: Springer, 1990. P. 408.
- 9 MARICONDA, Carlo; TONOLO, Alberto. **Discrete Calculus: Methods for Counting**. Switzerland: Springer, 2016. P. 680.
- 10 OLIVEIRA, Willian Diego. **Zeros da Função Zeta de Riemann e o Teorema dos Números Primos**. 2013. F. 134. Mestrado em Matemática – UNESP, São José do Rio Preto.
- 11 STOPPLE, Jeffrey. **A Primer of Analytic Number Theory: From Pythagoras to Riemann**. Cambridge: Cambridge University Press, 2003. P. 400.