Jornal Eletrônico de Ensino e Pesquisa de Matemática
(1s.) **v. 4** 1 (2020): 17–26. ©Jeepema–ISSN-2594-6323.
www.dma.uem.br/kit/jeepema

Teorema de Stokes e Formas diferenciais no $\mathbb{R}^3$

Doherty Andrade – Email: doherty200@hotmail.com

Resumo: Neste trabalho faremos uma introdução às formas diferenciais no $\mathbb{R}^3$ e apresentamos os teoremas fundamentais do Cálculo, Teorema de Green, Torema de Stokes e o Teorema de Gauss, neste enfoque.

1. Introdução

O Teorema Fundamental do Cálculo é o resultado mais importante e mais conhecido do cálculo de uma variável. Mas existe uma dificuldade em reconhecer que este teorema é a versão mais simples do mesmo resultado existente no cálculo vetorial. Neste texto, baseado em [1–3], esperamos tornar claro a relação entre os teoremas de Green, Gauss e Stokes com o Teorema Fundamental do Cálculo.

Inicialmente recordemos da definição de integral de linha. Consideremos um campo vetorial $F(x,y,z) = (F_1, F_2, F_3)$ definido sobre a região $D \subseteq \mathbb{R}^3$ e um caminho $\gamma : [a,b] \to D \subseteq \mathbb{R}^3$ dado por $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ com componentes de classe C^1. A integral de linha do campo vetorial $F(x,y,z) = (F_1, F_2, F_3)$ ao longo do caminho γ é dada por

$$\int_a^b F \cdot d\gamma = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma\prime(t)dt = \int_a^b \left[F_1(\gamma(t))x'(t) + F_2(\gamma(t))y'(t) + F_3(\gamma(t))z'(t)\right] dt. \quad (1)$$

É comum abreviarmos a expressão acima (1), que define a integral de linha, por

$$\int_a^b F \cdot d\gamma = \int_\gamma F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz. \quad (2)$$

Desta forma o integrando $F_1dx + F_2dy + F_3dz$ fica mais destacado e podemos dar uma interpretação com base no conceito de forma diferencial. Este modo de considerar a integral de linha abre a possibilidade de estender o Teorema Fundamental do Cálculo para outras dimensões.

Antes de fazermos isso, o que faremos com apenas duas e três variáveis, precisamos de alguns conceitos.

2. Iniciando com 1-Formas Diferenciais

Tomemos o espaço $\mathbb{R}^n$ e o vetor $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Definimos para cada $1 \leq k \leq n$, a função projeção dx_k que associa a cada vetor $a \in \mathbb{R}^n$ a sua k-ésima coordenada. Isto é:

$$dx_k(a_1, a_2, \ldots, a_n) = a_k.$$

Geometricamente, dx_k é uma função que projeta um vetor $a \in \mathbb{R}^n$ sobre o eixo x_k.

Como é usual na matemática, podemos fazer combinações lineares dessas funções dx_k utilizando coeficientes constantes ou coeficientes funcionais. O resultado dessas combinações são novas funções. Por exemplo, considere que $F_1, F_2, \ldots, F_n$ são funções reais definidas em uma região $D \subset \mathbb{R}^n$, podemos definir para cada $x \in D$ a combinação linear

$$\omega_x = F_1(x)dx_1 + F_2(x)dx_2 + \cdots + F_n(x)dx_n. \tag{3}$$

Assim, temos que ω_x atua em vetores $a \in \mathbb{R}^n$ do seguinte modo:

$$\omega_x(a) = F_1(x)dx_1(a) + F_2(x)dx_2(a) + \cdots + F_n(x)dx_n(a) \tag{4}$$

Uma função ω_x como definida em (4) é chamada de 1-forma diferencial ou apenas 1-forma.

Por simplicidade, vamos nos concentrar apenas nas formas diferenciais do $\mathbb{R}^3$. Note que em $\mathbb{R}^3$ existem apenas as 1-formas básicas dx_1, dx_2 e dx_3. Assim, todas as 1-formas do $\mathbb{R}^3$ são combinações lineares destas, o que resulta em formas do tipo:

$$\omega_x = F_1(x)dx_1 + F_2(x)dx_2 + F_3(x)dx_3. \tag{5}$$

Exemplo 2.1

O nosso primeiro exemplo já é conhecido por todo estudante de Cálculo: a diferencial de uma função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é uma 1-forma. É o que este exemplo ilustra.

Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ função diferenciável em uma região $D \subset \mathbb{R}^3$. A diferencial de f em $x \in D$, representada por $d_x f$, é uma 1-forma em D. De fato, como $d_x f$ atua em cada $a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ podemos escrevê-la como:

$$\begin{aligned} d_x f(a) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)a_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x)a_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}(x)a_3 \\ d_x f(a) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)dx_1(a) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x)dx_2(a) + \frac{\partial f}{\partial x_3}(x)dx_3(a). \end{aligned}$$

Por simples comparação com (5) obtemos que as funções coeficientes são $F_k = \frac{\partial f}{\partial x_k}, k = 1, 2, 3$.

É importante lembrar que nem toda 1-froma ω com coeficientes resultando em campo F é diferencial de alguma f. Esta é uma situação especial e ocorre quando $\nabla f = F$.

Exemplo 2.2

Este exemplo procura ilustrar como a integral de linha de um campo F sobre um caminho γ é obtida por meio do conceito de 1-forma. Seja $\omega_x = F_1(x)dx_1 + F_2(x)dx_2 + F_3(x)dx_3$ 1-forma diferencial definida em uma região $D \subset \mathbb{R}^3$. Se $\gamma(t) = (g_1(t), g_2(t), g_3(t)), t \in [a, b]$, é uma curva diferenciável com valores em D, em cada ponto $x = \gamma(t) \in D$ podemos aplicar a função $\omega_{\gamma(t)}$ aos vetores tangentes $\gamma'(t)$. O resultado é um número real que pode ser expresso como:

$$\begin{aligned} \omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) &= F_1(\gamma(t))dx_1(\gamma'(t)) + F_2(\gamma(t))dx_2(\gamma'(t)) + F_2(\gamma(t))dx_3(\gamma'(t)) \\ &= F_1(\gamma(t))g_1'(t) + F_2(\gamma(t))g_2'(t) + F_2(\gamma(t))g_3'(t) \\ &= F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t), \end{aligned}$$

que é precisamente o produto interno entre os vetores $F(\gamma(t))$ e $\gamma'(t)$ que aparece na definição dada em (1).

Assim,

$$\int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt = \int_a^b \omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t))dt,$$

que podemos usar para definir a integral de 1-forma ω_x ao longo de uma curva γ:

$$\int_\gamma \omega_x = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt.$$

Assim, obtemos integral de linha empregando o conceito de 1-formas diferenciais.

3. Produto exterior

Agora definimos um tipo de operação, denominada de produto exterior, entre duas 1-formas dx_i e dx_j, $1 \leq i, j \leq 3$. Observeque que este produto é diferente da multiplicação ponto a ponto de funções.

Sejam $a = (a_1, a_2, a_3)$ e $b = (b_1, b_2, b_3)$ vetores do $\mathbb{R}^3$. Definimos o produto exterior entre dx_i e dx_j por

$$\left(dx_i \wedge dx_j\right)(a, b) = \det \begin{bmatrix} dx_i(a) & dx_i(b) \\ dx_j(a) & dx_j(b) \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Geometricamente, $\left(dx_i \wedge dx_j\right)(a, b)$ é a área, com sinal, do paralelogramo formado pelas projeções de a e de b sobre o plano $x_i x_j$.

Segue das propriedades de determinantes que:

$$dx_i \wedge dx_i = 0 \tag{7}$$

$$dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i. \tag{8}$$

Das três formas básicas dx_1, dx_2 e dx_3 e usando o produto exterior obtemos apenas as 2-formas básicas

$$dx_2 \wedge dx_3, dx_3 \wedge dx_1 \text{ e } dx_1 \wedge dx_2.$$

Qualquer outra 2-forma no $\mathbb{R}^3$ é combinação linear destas.

Assim, combinações lineares com as diferentes 2-formas diferenciais $dx_2 \wedge dx_3, dx_3 \wedge dx_1$ e $dx_1 \wedge dx_2$ resultam em

$$\omega_x = F_1(x)(dx_2 \wedge dx_3) + F_2(x)(dx_3 \wedge dx_1) + F_3(x)(dx_1 \wedge dx_2). \tag{9}$$

Se $F = (F_1, F_2, F_3)$ é um campo vetorial definido sobre uma região $D \subset \mathbb{R}^3$, podemos definir para cada $x \in D$ a função

$$\omega_x = F_1(x)(dx_2 \wedge dx_3) + F_2(x)(dx_3 \wedge dx_1) + F_3(x)(dx_1 \wedge dx_2) \tag{10}$$

que a cada par de vetores a e b do $\mathbb{R}^3$ associa o número real

$$\omega_x(a, b) = F_1(x)(dx_2 \wedge dx_3)(a, b) + F_2(x)(dx_3 \wedge dx_1)(a, b) + F_3(x)(dx_1 \wedge dx_2)(a, b). \tag{11}$$

Uma função ω_x como definida acima em (11) é denominada de 2-forma diferencial ou apenas 2-forma.

Exemplo 3.1

Seja $\omega_x = -2(dx_2 \wedge dx_3) + 1(dx_3 \wedge dx_1) + 3(dx_1 \wedge dx_2)$ 2-forma diferencial definida em $\mathbb{R}^3$. Esta 2-forma associa a cada $x \in \mathbb{R}^3$ o mesmo valor real pois seus coeficientes são constantes. Assim, podemos escrever $\omega = \omega_x$ e para $a = (1,2,3)$ e $b = (0,1,1)$ temos

$$\begin{aligned} \omega(a,b) &= -2\det\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} + 1\det\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 3\det\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \\ &= -2(-1) + 1(-1) + 3(1) \\ &= (-2,1,3)\cdot(a \times b), \end{aligned}$$

pois os determinantes parciais são exatamente as coordenadas do vetor obtido do produto vetorial $a \times b$. Assim, $\omega(a,b)$ é a coordenada do vetor $v = (-2,1,3)$ na direção perpendicular ao paralelogramo P, multiplicada pela área de P.

Agora passamos a definir o produto exterior de duas 1-forma quaisquer como sendo a 2-forma obtida mulplicando as 1-formas como se fossem polinômios nas variáveis dx_1, dx_2 e dx_3 e depois simplificando com o uso das propriedades (7) e (8). Veja o exemplo a seguir.

Exemplo 3.2

Consideremos o produto exterior das duas 1-formas $\left(xdx + y^2dy\right)$ e $(ydx + xdy)$:

$$\begin{aligned} \left(xdx + y^2dy\right) \wedge (ydx + xdy) &= xydx \wedge dx + x^2dx \wedge dy + y^3dy \wedge dx + xy^2dy \wedge dy \\ &= x^2dx \wedge dy - y^3dx \wedge dy \\ &= (x^2 - y^3)dx \wedge dy. \end{aligned}$$

4. 3-formas diferenciais no $\mathbb{R}^3$

As 3-formas diferenciais são resultado do produto exterior de uma 2-forma por uma 1-forma. No $\mathbb{R}^3$ existe apenas a 3-forma básica $dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$ e múltiplos desta.

Se $a = (a_1, a_2, a_3), b = (b_1, b_2, b_3)$ e $c = (c_1, c_2, c_3)$ então definimos

$$(dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3)(a,b,c) = \det\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}.$$

Para definir a integral de uma p-forma ω^p sobre o $\mathbb{R}^n$, tomemos $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ continuamente diferenciável sobre $R \subset \mathbb{R}^p$. Seja $S = g(R)$. Podemos aplicar ω^p em um ponto $g(u)$ aos vetores $\left(\frac{\partial g}{\partial u_k}\right), k = 1, 2, \ldots, p$. O resultado é:

$$\omega^p_{g(u)}\left(\frac{\partial g(u)}{\partial u_1}, \frac{\partial g(u)}{\partial u_2}, \ldots, \frac{\partial g(u)}{\partial u_p}\right). \tag{12}$$

Definimos a integral de w^p sobre S por

$$\int_S w^p = \int_R \omega^p_{g(u)}\left(\frac{\partial g(u)}{\partial u_1}, \frac{\partial g(u)}{\partial u_2}, \ldots, \frac{\partial g(u)}{\partial u_p}\right) dV.$$

Exemplo 4.1

Sejam $\omega_x^2 = F_1(x)dx_2 \wedge dx_3 + F_2(x)dx_3 \wedge dx_1 + F_3(x)dx_1 \wedge dx_2$ e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ diferenciável em $R \subset \mathbb{R}^2$ com funções componentes g_1, g_2 e g_3. Note que ω_x^2 tem coeficientes contínuos em $\mathbb{R}^3$. Então,

$$\omega^2_{g(u)}\left(\frac{\partial g(u)}{\partial u_1}, \frac{\partial g(u)}{\partial u_2}\right) = (F_1 \circ g)\frac{\partial(g_2, g_3)}{\partial(u_1, u_2)} + (F_2 \circ g)\frac{\partial(g_3, g_1)}{\partial(u_1, u_2)} + (F_3 \circ g)\frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(u_1, u_2)}.$$

De onde segue que

$$\begin{aligned}\int_S w^p &= \int_S F_1 dx_2 \wedge dx_3 + F_2 dx_3 \wedge dx_1 + F_3 dx_1 \wedge dx_2 \\ &= \int_R \left[(F_1 \circ g)\frac{\partial(g_2, g_3)}{\partial(u_1, u_2)} + (F_2 \circ g)\frac{\partial(g_3, g_1)}{\partial(u_1, u_2)} + (F_3 \circ g)\frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(u_1, u_2)}\right] du_1 du_2\end{aligned}$$

que é a integral de superfície do campo vetorial $F = (F_1, F_2, F_3)$.

5. Derivada Exterior

O Teorema Fundamental do Cálculo estabelece que se $\left(\frac{d}{dx}\right) f$ é integrável em $[a, b]$, então

$$\int_a^b \frac{df}{dx} dx = f(b) - f(a).$$

As fórmulas de Stokes e de Gauss

$$\begin{aligned}\int_S \mathrm{rot} F \cdot d\mathbf{S} &= \int_{\partial S} F \cdot \mathbf{t} ds \\ \int_R (\mathrm{div} F) dV &= \int_{\partial S} F \cdot \mathbf{n} d\sigma\end{aligned}$$

são análogas no sentido de que elas exprimem a integral de uma função em termos da própria função em um subconjunto do domínio de integração de dimensão inferior.

Usando as formas diferenciais, definiremos a derivada exterior, que unifica as formulações acima.

A operação derivada exterior, é definida indutivamente, nas formas diferenciais como se segue:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x)dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)dx_n.$$

Assim, a derivada exterior de uma função f coincide com a diferencial de f.

Continuando, se $\omega^1 = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \cdots + f_n dx_n$ é 1-forma com coeficientes diferenciáveis, definimos

$$d\omega^1 = (df_1) \wedge dx_1 + (df_2) \wedge dx_2 + \cdots + (df_n) \wedge dx_n.$$

Portanto, $d\omega^1$ é uma 2-forma diferencial.

Em geral, se ω^p é uma p-forma, então a sua derivada exterior $d\omega^p$ é uma $(p+1)$-forma obtida substituindo cada função coeficiente de ω^p pela 1-forma que é a sua derivada exterior.

Para manter a terminologia consistente podemos nos referir a uma função real $f : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ como sendo uma 0-forma sobre o aberto D.

Exemplo 5.1

Se $f(x,y) = x^3 + y^3$, então $df = 3x^3dx + 3y^2dy$.

No caso da 1-forma dada por $\omega^1(x,y) = xydx + (x^2+y^2)dy$, então sua derivada exterior é

$$\begin{aligned} d\omega^1_{(x,y)} &= d\left(xydx + (x^2+y^2)dy\right) \\ &= (ydx + xdy) \wedge dx + (2xdx + 2ydy) \wedge dy \\ &= xdy \wedge dx + 2xdx \wedge dy = xdx \wedge dy. \end{aligned}$$

No caso da 2-forma sobre o $\mathbb{R}^3$ dada por $\omega^2(x,y,z) = xyz(dx \wedge dy)$, sua derivada exterior é

$$\begin{aligned} d\omega^2_{(x,y,z)} &= d\left(xyz(dx \wedge dy)\right) \\ &= (yzdx) \wedge (dx \wedge dy) + (xzdy) \wedge (dx \wedge dy) + (xydz) \wedge (dx \wedge dy) \\ &= xy\left(dx \wedge dy \wedge dz\right). \end{aligned}$$

A operação d tem as seguintes propriedades:

Propriedades 5.2 *1. Se $f : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é uma 0-forma, então*

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x)dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}(x)dx_3.$$

2. (linear) Se w_1 e w_2 são duas k formas, então

$$d(w_1 + w_2) = dw_1 + dw_2.$$

3. Se w_1 é uma k-forma e w_2 é uma l forma, então

$$d(w_1 \wedge w_2) = (dw_1 \wedge w_2) + (-1)^k(w_1 \wedge dw_2).$$

4. $d(dw) = 0$ e $d(dx) = 0, d(dy) = 0, d(dz) = 0$, ou simplesmente, $d^2 = 0$.

6. Regras de operações

Agora vamos discutir mais detalhadamente as regras de operações entre formas.

Primeiramente, a operação adição de formas é apenas definida para formas de mesmo tipo. Não podemos definir a adição entre k-forma e l-forma quando $k \neq l$.

Sejam dadas as 1-formas $w_1 = F_1dx + F_2dy + F_3dz$ e $w_2 = G_1dx + G_2dy + G_3dz$, então

$$(w_1 + w_2) = (F_1 + G_1)dx + (F_2 + G_2)dy + (F_3 + G_3)dz.$$

Agora no caso da adição de 2- formas, considere as 2-formas $w_1 = F_1(dx \wedge dy) + F_2(dy \wedge dz) + F_3(dz \wedge dx)$ e $w_2 = G_1(dx \wedge dy) + G_2(dy \wedge dz) + G_3(dz \wedge dx)$, então

$$(w_1 + w_2) = (F_1 + G_1)(dx \wedge dy) + (F_2 + G_2)(dy \wedge dz) + (F_3 + G_3)(dz \wedge dx).$$

Do mesmo modo efetuamos a adição de 3-formas. Considere as 3-formas $w_1 = F(dx \wedge dy \wedge dz)$ e $w_2 = G(dx \wedge dy \wedge dz)$, então

$$(w_1 + w_2) = (F + G)(dx \wedge dy \wedge dz).$$

O produto exterior satisfaz as seguintes regras:

1. Para cada k-forma w existe uma 0-forma, representada por 0, tal que $w + 0 = 0 + w = w$, $0 \leq k \leq 3$.
2. Para todas as k-formas tem-se $0 \wedge w = 0$, $0 \leq k \leq 3$.
3. (linear) Se f é uma 0-forma, então
$$(fw_1 + w_2) \wedge w_3 = (fw_1 \wedge w_3) + (w_2 \wedge w_3).$$
4. Se w é uma k-forma e η é uma l-forma, então
$$w \wedge \eta = (-1)^{kl}(\eta \wedge w).$$
5. (associatividade) Se w_1, w_2, w_3 são k_1, k_2 e k_3-formas, respectivamente, então
$$w_1 \wedge (w_2 \wedge w_3) = (w_1 \wedge w_2) \wedge w_3.$$
6. Se f é uma 0-forma, então
$$w \wedge (f\eta) = (fw) \wedge \eta = f(w \wedge \eta).$$
7. As seguintes regras de mulitplicação valem:
   (a) $dx \wedge dy = dxdy$.
   (b) $dy \wedge dx = -dxdy = (-1)(dx \wedge dy)$.
   (c) $dy \wedge dz = dydz = (-1)(dz \wedge dy)$.
   (d) $dz \wedge dx = dzdx = (-1)(dx \wedge dz)$.
   (e) $dx \wedge dx = 0, (dy \wedge dy) = 0, (dz \wedge dz) = 0$.
   (f) $dx \wedge (dy \wedge dz) = (dx \wedge dy) \wedge dz = dxdydz$.
   (g) Se f é uma 0-forma e w é uma k-forma, então $(f \wedge w) = fw$.

7. Casos Particulares Importantes

Usando a derivada exterior podemos enunciar a fórmula geral de Stokes na forma
$$\int_B d\omega^p = \int_{\partial B} \omega^p, \tag{13}$$
em que B é $(p+1)$-dimensional e ∂B é a sua fronteira p-dimensional.

Vejamos como ficam alguns casos particulares importantes.

1. **Teorema de Green**:
Se $\omega^1 = F_1(x_1, x_2)dx_1 + F_2(x_1, x_2)dx_2$ com componentes P e Q diferenciáveis e de classe C^1, então usando as propriedades da derivada exterior e do produto exterior
$$\begin{aligned} d\omega^1 &= \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial F_1}{\partial x_2}dx_2\right) \wedge dx_1 + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial F_2}{\partial x_2}dx_2\right) \wedge dx_2 \\ &= \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right) dx_1 \wedge dx_2. \end{aligned}$$

Usando (13), temos

$$\int_B \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right) dx_1 \wedge dx_2 = \int_{\partial B} F_1 dx_1 + F_2 dx_2$$

que é a fórmula de Green. Note que como B é bidimensional, então ∂B é uma curva plana fechada orientada positivamente.

2. **Teorema de Stokes**:
Considere a 1-formas ω_1 dada por

$$\omega^1 = F_1(x_1, x_2, x_3)dx_1 + F_2(x_1, x_2, x_3)dx_2 + F_3(x_1, x_2, x_3)dx_3,$$

em que F_1, F_2 e F_3 são diferenciáveis e de classe C^1. Então, usando as propriedades, obtemos que

$$d\omega^1 = \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}\right) dx_2 \wedge dx_3 + \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}\right) dx_3 \wedge dx_1 + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_3}\right) dx_1 \wedge dx_2$$

Observe que os fatores dos parênteses presentes em $d\omega^1$ compõem exatamente o rotacional do campo vetorial $F = (F_1, F_2, F_3)$.

3. **Teorema de Gauss**:
A fórmula de Gauss surge ao considerar a 2-forma

$$\omega^2 = F_1(dx_2 \wedge dx_3) + F_2(dx_3 \wedge dx_1) + F_3(dx_1 \wedge dx_2),$$

em que F_1, F_2 e F_3 são diferenciáveis e de classe C^1. Utilizando as propriedades e fazendo um cálculo simples mostra-se que

$$d\omega^2 = \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_x}\right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3.$$

Observe que o coeficiente desta 3-forma é exatamente o divergente do campo $F = (F_1, F_2, F_3)$.

Assim, existe uma correspondência entre um campo vetorial $F = (F_1, F_2, F_3)$ no $\mathbb{R}^3$ e uma forma diferencial com funções coeficientes F_1, F_2 e F_3. Podemos resumir como:

$$\begin{aligned}
&\text{se } \omega^2 \text{ está associada ao campo } F, \text{ então } d\omega^2 \to \ \mathrm{div}F,\\
&\text{se } \omega^1 \text{ está associada ao campo } F, \text{ então } d\omega^1 \to \ \mathrm{rot}F,\\
&\text{se } \omega^0 \text{ está associada ao campo escalar } f, \text{ então } d\omega^0 \to \ \mathrm{grad}f,
\end{aligned}$$

onde f é uma função real de três variáveis.

8. Conclusão

Já temos todos os elementos para enunciar os teoremas de Green, de Stokes e de Gauss no contexto de formas.

Teorema 8.1 (Green) *Seja D uma região elementar no plano xy com fronteira ∂D orientada no sentido anti-horário. Seja $\omega = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ 1-forma sobre algum aberto contendo D e com componentes P e Q diferenciáveis de classe C^1. Então*

$$\int_{\partial D} Pdx + Qdy = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$$

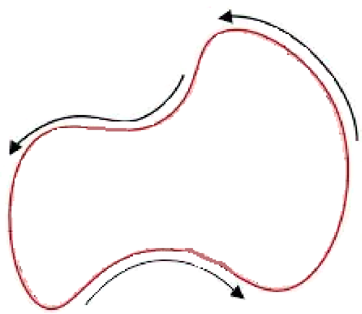

Figura 1: Região D e sua fronteira ∂D

Teorema 8.2 (Stokes) *Seja S uma superfície orientada do espaço $\mathbb{R}^3$ com fronteira ∂S consistindo de uma curva simples fechada orientada como fronteira de S. Se ω é 1-forma sobre algum aberto contendo S, então*

$$\int_{\partial S} \omega = \int_S d\omega.$$

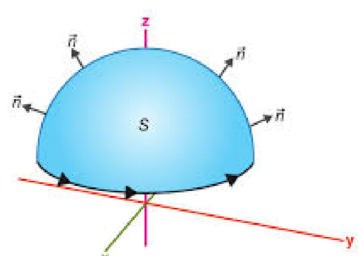

Figura 2: Superfície S e sua fronteira ∂S

Teorema 8.3 (Gauss) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ uma região elementar com fronteira $\partial\Omega$ com orientação positiva (vetor normal apontando para o exterior da superfície). Seja η a 2-forma sobre algum aberto contendo Ω com componentes diferenciáveis de classe C^1. Então,*

$$\int_{\partial\Omega} \eta = \int_\Omega d\eta.$$

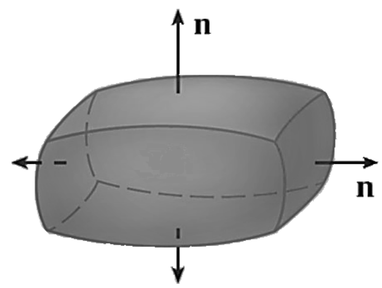

Figura 3: Região Ω e sua fronteira $\partial\Omega$

Referências

1. ANDRADE, D. e Ferreira, J. *Cálculo III*. 2. ed. Florianópolis: UFSC, 2010. 17

2. Williamson, Richar E., Crowell, Richard H., Trotter, Hale F., *Cálculo de Funções Vetoriais*. LTC, 1980. 17

3. Marsden, Jerrold E., Tromba, Anthony J. *Vector Calculus*. W. H. Freeman and Company, 1980.