J Jornal Eletrônico de Ensino e Pesquisa de Matemática
(1s.) **v. 1**, 1 (2017): 1–7. ©Jeepema – ISSN 2594-6323
www.dma.uem.br/kit/jeepema

Teorema Do Ponto Fixo Para Contrações

Bernadete Maria Suaki Brandão (DMA-UEM)
E-mail:bmsbrandao@uem.br

Resumo: Neste trabalho apresentamos o Teorema do Ponto Fixo para Contrações definidas em compactos $K \subset \mathbb{R}^n$. Como aplicação desse resultado apresentamos o método de Newton-Raphson.

Palavras-chave: Ponto Fixo das Contrações. Método de Newton-Raphson. *

Sumário

1. Introdução

O Teorema do Ponto Fixo para contrações é um resultado bastante importante da Matemática e é usado na resolução de diversos problemas. Apresentaremos aqui a sua versão no espaço $\mathbb{R}^n$ e, em seguida, uma aplicação. Optamos por esta versão devido ao fato de que podemos demonstrá-la usando o Princípio do Max/Min para funções reais, que pode ser considerado de fácil aceitação não exigindo, nesse momento, uma demonstração, embora isso seja perfeitamente possível.

Teorema 1.1 (Princípio Max/Min). *Toda função real contínua* $f : C \to \mathbb{R}$ *definida em um subconjunto não vazio, fechado e limitado* $C \subset \mathbb{R}^n$

* Publicado em 14-08-2017.

atinge seu máximo e seu mínimo em C. Isto é, existem pontos x_0 e $x_1 \in C$ tais que $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1), \forall x \in C$.

Antes de apresentarmos o Teorema do Ponto Fixo vamos lembrar algumas definições importantes.

Definição 1.1. *Seja $C \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto não vazio. Uma aplicação $T : C \to \mathbb{R}^n$ é uma contração se existe uma constante k, com $0 \leq k < 1$ tal que*

$$\| T(x) - T(y) \| \leq k \| x - y \|, \forall x, y \in C \subset \mathbb{R}^n.$$

Caso seja necessário destacar o valor de k podemos dizer que T é uma k-contração.

Definição 1.2. *Um ponto fixo de uma aplicação T é um ponto x^*, que pertence tanto ao domínio quanto ao contradomínio de T, para o qual tem-se $T(x^*) = x^*$.*

2. O Teorema do Ponto Fixo

Teorema 2.1 (Teorema do Ponto Fixo para Contrações)**.** *Seja C um subconjunto não vazio, fechado e limitado do $\mathbb{R}^n$ e $T : C \to C$ uma k-contração. Então, T possui um único ponto fixo em C.*

Demonstração: Consideremos a função real $f : C \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \| x - T(x) \| .$$

Observe que f é uma função real e que todo zero de f é um ponto fixo de T em C. Uma vez que T é uma k-contração, usando a desigualdade triangular, podemos mostrar que

$$|f(x) - f(y)| \leq (1 + k) \| x - y \| .$$

Dessa forma, f é Lipschitziana e, portanto, é contínua em C. Como C é um subconjunto fechado e limitado do $\mathbb{R}^n$, o princípio do Min/Max garante a existência de $x^* \in C$ tal que

$$f(x^*) \leq f(x) \quad \forall x \in C.$$

Como $T(x^*) \in C$ temos, em particular, que $f(x^*) \leq f(T(x^*))$. Além disso,

$$f(T(x)) = \| T(x) - T(T(x)) \| \leq k \| x - T(x) \| .$$

Logo,

$$f(T(x)) \leq kf(x), \forall x \in C.$$

Assim,

$$f(x^*) \leq f(T(x^*)) \leq kf(x^*).$$

Mas como $f(x^*) \geq 0$ e $k < 1$, então $f(x^*) = 0$. Ou seja, x^* é uma raiz de f, sendo também um ponto fixo de T.

Para garantir a unicidade desse ponto fixo suponha que x_0 e x_1 sejam pontos fixos de T. Nesse caso,

$$\| x_0 - x_1 \| = \| T(x_0) - T(x_1) \| \leq k \| x_0 - x_1 \|$$

e, novamente, como $k < 1$ temos $\| x_0 - x_1 \| = 0$ o que significa que $x_0 = x_1$. □

3. Aplicação: método de Newton-Raphson

Uma aplicação bastante interessante do Teorema do Ponto Fixo é o problema de determinar raízes para uma equação do tipo $g(x) = 0$.

Sabemos que, embora pareça um problema simples, somente em situações muito específicas, que seriam tipos muito especiais para a função g, é que se pode resolver tal equação de forma exata. Usando o resultado do teorema podemos estabelecer um método geral para encontrar aproximações para os valores procurados. Vamos formalizar o problema.

Considere uma função real definida e contínua em um intervalo aberto $(a, b) \subset \mathbb{R}$, $g : (a, b) \to \mathbb{R}$, tal que se possa garantir que g possui uma única raiz em (a, b). Isto é, existe um único $x^* \in (a, b)$ tal que $g(x^*) = 0$.

Um método para determinar uma aproximação para x^* consiste em encontrar uma função auxiliar A, que não se anule em algum intervalo fechado $I \subset (a, b)$, no qual a função

$$f(x) = x - A(x) \cdot g(x)$$

seja uma contração de I sobre I.

De fato, isso resolve o problema, pois sendo $f|_I : I \to I$ uma k-contração e $I \subset (a, b)$ um intervalo fechado e limitado, o Teorema do Ponto Fixo para Contrações garante que f possui um único ponto fixo em I.

Denotemos por x^* esse ponto fixo. Observe que como $f(x^*) = x^*$ temos que

$$\begin{aligned} & x^* = x^* - A(x^*) \cdot g(x^*) \\ \Rightarrow \qquad & A(x^*) \cdot g(x^*) = 0. \end{aligned}$$

E como A não se anula em I podemos concluir que deve ocorrer $g(x^*) = 0$. Ou seja, esse ponto fixo de f é a solução procurada da equação $g(x) = 0$.

Além disso, considere um ponto arbitrário $x_0 \in I$ e vamos gerar uma sequência, usando a função f, da seguinte forma:

$$x_n = f(x_{n-1}), \qquad n \geq 1.$$

Toda sequência gerada por f dessa forma será convergente e seu limite será x^*. Vamos demonstrar esta afirmação mostrando que $|x_n - x^*| \to 0$. Usando o fato de que f é uma k-contração temos:

$$\begin{aligned} |x_n - x^*| &= |f(x_{n-1}) - x^*| = |f(x_{n-1}) - f(x^*)| \\ &\leq k|x_{n-1} - x^*| = k|f(x_{n-2}) - f(x^*)| \\ &\leq k^2|x_{n-2} - x^*| \leq \ldots \leq k^n|x_0 - x^*|. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$|x_n - x^*| \leq k^n|x_0 - x^*|.$$

Como $0 \leq k < 1$ temos que $\lim_{n\to\infty} k^n = 0$ e daí $|x_n - x^*| \to 0$.

Consequentemente, podemos usar algum termo de uma sequência gerada como acima para aproximar o valor de x^*, que é a solução procurada para a equação $g(x) = 0$.

Além disso, podemos escolher o termo da sequência de forma que a aproximação seja satisfatória dentro de nossos propósitos, isto é, estabelecida uma tolerância $\varepsilon > 0$ pode-se determinar o índice n_0 de modo de $|x_{n_0} - x^*| < \varepsilon$.

Para vermos como se faz esta escolha vamos definir no intervalo I uma função auxiliar, análoga à usada na demonstração do teorema do ponto fixo, da seguinte forma:

$$h(x) = |x - f(x)|.$$

Observe que, se $x \in I$ e x^* é o ponto fixo de f, e lembrando que f é uma k-contração, então:

$$|x - x^*| \leq |x - f(x)| + |f(x) - f(x^*)| \leq h(x) + k|x - x^*|.$$

Logo, para todo $x \in I$,

$$|x - x^*| \leq \frac{1}{1-k} h(x).$$

Em particular,

$$|x_n - x^*| \leq \frac{1}{1-k} h(x_n).$$

Mas $h(f(x)) = |f(x) - f(f(x))| \leq k|x - f(x)| = kh(x), \quad \forall x \in I.$ Donde segue que:

$$\begin{aligned} h(x_n) &= h(f(x_{n-1}) \leq h(x_{n-1}) \\ &\leq k^2 h(x_{n-2}) \leq \ldots \leq k^n h(x_0). \end{aligned}$$

Então,

$$|x_n - x^*| \leq \frac{k^n}{1-k} h(x_0).$$

Basta então, escolher n_0 de forma que

$$\frac{k^{n_0}}{1-k} h(x_0) < \varepsilon$$

para termos que x_{n_0} aproxima adequadamente a solução da equação $g(x) = 0$.

Esse método aqui apresentado é a justificativa para a eficiência de uma conhecida técnica de aproximação de zeros de funções reais, que é o Método de Newton (ou Newton-Raphson), o qual propõe que se use a função auxiliar $A(x) = \frac{1}{g'(x)}$, que obviamente só pode ser utilizado sob certas condições sobre a função g. Vamos colocar o problema e as condições necessárias para a garantia de convergência do método.

Queremos resolver a equação

$$g(x) = 0$$

quando $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua com um único zero $x^* \in (a, b)$. Suponha ainda que as funções g' e g'' sejam contínuas em (a, b) e que $g'(x) \neq 0, \quad \forall x \in (a, b)$.

Se considerarmos a função auxiliar $A(x) = \frac{1}{g'(x)}$ temos que $A(x) \neq 0, \quad \forall x \in (a, b)$. Vamos mostrar que, nesse caso, existe um intervalo fechado $I^* \subset (a, b)$, com $x^* \in I^*$, tal que a função definida por

$$f(x) = x - A(x) \cdot g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

é uma contração de I^* em I^*.

Ora, f assim definida é contínua e diferenciável em (a, b) e

$$f'(x) = \frac{g''(x) \cdot g(x)}{[g'(x)]^2}.$$

Sendo então, f' uma função contínua em (a, b) com $f'(x^*) = 0$. Logo, para qualquer $k \in \mathbb{R}, k > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que $|f'(x)| \leq k, \quad \forall x \in I^* = [x^* - \delta, x^* + \delta] \subset [a, b]$.

Sendo $k < 1$, usando o Teorema do Valor Médio para derivadas, podemos garantir que $\forall x, y \in I^*$ existe $\xi \in I^*$ tal que

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)||x - y|.$$

Daí, temos que

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|, \quad \forall x, y \in I^*.$$

Ou seja, f é uma k-contração em I^*.

Para garantir que f leva I^* em I^*, tomemos $x \in I^*$. Então, $|x - x^*| \leq \delta$, logo

$$|f(x) - x^*| = |f(x) - f(x^*)| \leq k|x - x^*| < k|x - x^*| < |x - x^*| \leq \delta.$$

Portanto,

$$|f(x) - x^*| < \delta \Rightarrow f(x) \in I^*.$$

Assim, temos que, se $A(x) = \frac{1}{g'(x)}$, então existe $\delta > 0$ tal que , se $I^* = [x^* - \delta, x^* + \delta]$ a função $f(x) = x - A(x) \cdot g(x)$ é uma k-contração de I^* em I^*. Pela discussão feita anteriormente temos demonstrado o seguinte resultado.

Teorema 3.1 (Método de Newton-Raphson)**.** *Se a equação $g(x) = 0$ tem uma única raiz x^* em um intervalo aberto J no qual g' e g'' são contínuas e g' não se anula, então J contém um intervalo fechado I^* tal que:*

(i) $x^* \in I^*$.

(ii) a raiz x^* é o limite de toda sequência gerada por

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n \geq 0$$

tal que $x_0 \in I^*$.

Referências

1. Burden, R. L., Faires, J. D. and Burden, A. M.. Análise Numérica, 3. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2015.

2. Lima, E. L.. Curso de Análise, v.2, 2. ed. Rio de Janeiro, IMPA, 1981.

3. Drager, L. D. and Foote, R. L..The Contraction Mapping Lemma and the Inverse Function Theorem in Advanced Calculus. The Amercican Mathetical Monthly, vol 93, no. 1, 1986, pp. 52-54.

4. Wagner, C. H. Generic Approach to Iterative Methods. Mathematics Magazine, vol. 55, no. 5, 1982, pp. 259-273.