Jornal Eletrônico de Ensino e Pesquisa de Matemática
(1s.) **v. 3** 1 (2019): 1–4. ©Jeepema–ISSN-2594-6323.
www.dma.uem.br/kit/jeepema

Regra de Cramer: por que funciona?

Doherty Andrade[1]

Resumo: Neste trabalho apresentamos uma demonstração bastante elementar o teorema de Cramer. A demonstração utiliza apenas propriedades dos determinantes e matrizes.

Sumário

1. Introdução

A regra de Cramer é um dos métodos diretos de resolução de sistemas de equações lineares mais conhecidos. Embora, bastante restritivo na sua aplicação (exige matriz quadrada com determinante não nulo), desempenha um papel importante dentro dessa teoria. Neste trabalho apresentamos uma demonstração bastante elementar o teorema de Cramer. A demonstração utiliza apenas propriedades dos determinantes e matrizes. A regra de Cramer é devido a Gabriel Cramer (1704 –1752) que publicou este resultado em 1750. Veja [4].

2. Regra de Cramer

Consideremos o sistema de equações lineares $Ax = b$. Suponha que A seja uma matriz $n \times n$ invertível (portanto, $\det(A) \neq 0$) e $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ são elementos do $\mathbb{R}^n$. A regra de Cramer apresenta a solução do sistema por

$$x_i = \frac{\det(M_i)}{\det(A)}, i = 1, 2, \ldots, n$$

[1] FEITEP – Email: doherty200@hotmail.com

onde M_i é a matriz obtida de A pela substituição da i-ésima coluna pelo vetor coluna b.

Vamos demonstrar este resultado. Como $\det(A) \neq 0$, $Ax = b$ tem uma única solução que é $x = A^{-1}b$. Seria suficiente obter A^{-1} utilizando o método de eliminação de Gauss e em seguida obter a solução x. Mas Cramer foi além disso, utilizou propriedades de determinates e matrizes para obter a solução.

Vamos iniciar a nossa demonstração estabelecendo alguma notação. Vamos denotar por a_i a i-ésima coluna de A, $i = 1, 2 \ldots, n$. Por e_i vamos denotar o i-ésimo vetor da base canônica, ou equivalentemente, a i-ésima coluna da matriz indentidade I_n. Seja X_i a matriz obtida de I_n pela substituição da i-ésima coluna pelo vetor coluna x.

Sabemos que no produto de matrizes, a k-ésima coluna de AB é o exatamente o produto de A pela k-ésima coluna de B. Note também que $Ae_k = a_k$ para $k = 1, \ldots, n$, a k-ésima coluna de A.

Assim, por multiplicação, temos que:

$$\begin{aligned}
AX_i &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & x_1 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & x_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_i & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & x_n & \ldots & 1 \end{bmatrix} \\
&= [Ae_1, \ldots, Ae_{i-1}, Ax, Ae_{i+1}, \ldots, Ae_n] \\
&= [a_1, \ldots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \ldots, a_n] \\
&= M_i.
\end{aligned}$$

Isto prova que $AX_i = M_i$.

Como X_i é a matriz I_n com a i-ésima coluna substituída por x, calculando o determinante de X_i por cofatores, temos:

$$\det(X_i) = (-1)^{(i+i)} x_i \det(I_{n-1}) = 1 \cdot x_i \cdot 1 = x_i.$$

Logo,

$$\det(M_i) = \det(AX_i) = \det(A)\det(X_i) = \det(A)x_i.$$

Segue que

$$x_i = \frac{\det(M_i)}{\det(A)}, i = 1, 2, \dots, n.$$

Pode ser interessante, veja [1], reescrever a demonstração de outro modo. Com a notação estabelecida anteriormente, temos:

$$\begin{aligned}
\det(M_k) &= \det[a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, b, a_{k+1}, \dots, a_n] \\
&= \det[a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, Ax, a_{k+1}, \dots, a_n] \\
&= \det[a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, x_1a_1 + x_2a_2 + \cdots + x_na_n, a_{k+1}, \dots, a_n] \\
&= \det[a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, x_1a_1, a_{k+1}, \dots, a_n] \\
&+ \det[a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, x_2a_2, a_{k+1}, \dots, a_n] \\
&+ \cdots + \det[a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, x_na_n, a_{k+1}, \dots, a_n] \\
&= x_k \det[a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n] \\
&= x_k \det(A),
\end{aligned}$$

pois cada termo $\det[a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, x_ia_i, a_{k+1}, \dots, a_n]$, com $i \neq k$ é nulo, uma vez que possuem duas colunas que diferem apenas pelo fator x_i. Logo,

$$x_k = \frac{\det(M_k)}{\det(A)}, k = 1, 2, \dots, n.$$

Exemplo 2.1

Consideremos o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 6 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$$

Colocando-o na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Primeiramente, vamos escrever as matrizes $M_i, i = 1, 2, 3$, onde cada coluna i de A é substituída por $b = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$:

$$M_1 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}, M_2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 6 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, M_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 6 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Calculando os determinantes:

$$\det(A) = 3, \ \det(M_1) = 9, \ \det(M_2) = 6, \ \det(M_3) = 15.$$

Segue que a solução é:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\det(M_1)}{\det(A)} = \frac{9}{3} = 3, \\ x_2 &= \frac{\det(M_2)}{\det(A)} = \frac{6}{3} = 2, \\ x_3 &= \frac{\det(M_3)}{\det(A)} = \frac{-15}{3} = -5. \end{aligned}$$

3. Conclusão

O Cálculo de determinantes pela definição, não é computacionalmente eficiente, pois exige muito tempo de máquina. Portanto, a utilização da regra de Cramer para resolver sistemas de equações lineares não é computacionalmente bom. É adequado apenas para sistemas de pequeno porte. Pode-se provar que o número de operações necessárias para resolver um sistema de n equações e n variáveis, pela regra de Cramer, é igual a $n(n+1)! - 1$. Ou seja, cresce muito rapidamente com n, veja [2]. Mas sua importância como ferramenta teórica da Matemática é inegável. É também um importante resultado que deve ser explorado no Ensino Fundamental e Médio.

Referências

1. ANDRADE, D. *Geometria Analítica*. 2. ed. Florianópolis: UFSC, 2010. 3
2. S. D. CONTE, *Elementary Numerical Analysis*. MacGraw-Hill, 1965. 4
3. CRAMER, Gabriel. *Introduction à l'Analyse des lignes Courbes algébriques*. Geneva: Europeana. pp. 656 –659.
4. BOYER, Carl B. *A History of Mathematics*. 2nd ed., 1968 . Wiley.

1