J Jornal Eletrônico de Ensino e Pesquisa de Matemática
(1s.) **v. 7** 1 (2023): 1–9. ©JEEPEMA–ISSN-2594-6323.
www.dma.uem.br/kit/jeepema

Uma demonstração detalhada do Teorema de Gauss-Bonnet

Felipe Gabriel Bogo – Email: felipegbogo@gmail.com

Resumo: O teorema de Gauss-Bonnet traz uma ligação entre a geometria diferencial e a topologia. Sua importância se dá na relação da informação geométrica de uma superfície e de suas características puramente topológicas. Neste artigo apresentamos uma demonstração cautelosa e com todos os pré-requisitos do teorema de Gauss-Bonnet. Por fim, apresentamos algumas aplicações deste resultado.
Palavras-chave: Teorema de Gauss-Bonnet, Característica de Euler, Aplicações.

1. Introdução

No século XVIII Carl Friedrich Gauss expandiu de forma expressiva a teoria de geometria, publicando seu renomado texto *disquisitiones generales circa superficies curvas* (DOMBROWSKI, 1979). Neste texto, Gauss analisa antigos resultados da geometria Euclidiana clássica para a geometria das curvas e superfícies. Um desses resultados afirma que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é π radianos. Gauss propôs que em uma superfície geral S, se considerarmos um triângulo T formado por caminhos de menor comprimento, i.e., geodésicas, a soma das medidas dos seus ângulos internos é dada pela equação

$$\int_T K dT + \pi = \alpha + \beta + \gamma,$$

em que K é a curvatura Gaussiana de S e α, β, γ são as medidas dos ângulos internos do triângulo. Podemos observar que se T é um triângulo num plano, as geodésicas são retas, implicando que $\int_T K dT = 0$. Logo, $\pi = \alpha + \beta + \gamma$, condizendo com o teorema clássico.

Em (DOMBROWSKI, 1979, p. 55), Gauss forneceu uma demonstração concreta para este fato. A generalização mais natural deste resultado, surgiu graças ao seguinte teorema de Hopf:

Teorema 1.1 (Hopf's Umlaufsatz) *Sejam $\alpha : [0, l] \to \mathbb{R}^2$ uma curva regular e parametrizada pelo comprimento de arco por partes, simples e fechada. Sejam também $0 = t_1 < \cdots < t_k = l$ uma partição de $[0, l]$, com os vértices de α dados por $\alpha(t_1), \ldots, \alpha(t_k)$ e os ângulos* *exteriores dados por $\phi_1, \ldots, \phi_k$, respectivamente. Então,*

$$\sum_{i=1}^{k} \int_{t_i}^{t_{i+1}} k(s)ds + \sum_{i=1}^{k} \phi_i = \pm 2\pi,$$

em que $k(s)$ é a curvatura de α.

Observação 1.2 *Note que a integral $\displaystyle\int_{t_i}^{t_{i+1}} k(s)ds$ está bem definida no intervalo $[t_i, t_{i+1}]$ e como $\alpha'(t) \in S^1$ para todo $t \in [t_i, t_{i+1}]$, existe uma função angular suave $\theta_i : [0, l] \to \mathbb{R}$ tal que $\alpha'(t) = (\cos\theta_i(t), \sin\theta_i(t))$. Assim, podemos traduzir a equação acima como:*

$$\sum_{i=1}^{k} (\theta_i(t_i^-) - \theta_i(t_{i-1}^+)) + \sum_{i=1}^{k} \phi_i = \pm 2\pi.$$

Mais ainda, o resultado desta equação é 2π quando α é orientada de modo que a normal aponta para dentro da região que ela delimita e -2π caso contrário.

2. Teorema de Gauss-Bonnet

O Teorema de Hopf's Umlaufsatz implica uma generalização do resultado de Gauss para regiões simples de S, isto é, subconjuntos compactos de S contidos em uma vizinhança coordenada e com o bordo sendo o traço de uma curva parametrizada regular por partes, fechada e simples de S. Esta generalização será enunciada e demonstrada a seguir:

Teorema 2.1 (Teorema Local de Gauss-Bonnet) *Sejam S uma superfície regular e orientada de $\mathbb{R}^3$ e $\Omega \subset X(U)$ uma região simples de S, em que $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to V \cap S \subset \mathbb{R}^3$ é uma parametrização ortogonal de S. Seja $\alpha : I \to S$ uma curva parametrizada regular por partes, fechada e simples de S tal que $\alpha(I) = \partial\Omega$. Assuma que α é positivamente orientada e que $0 < t_1 < \cdots < t_k = 1$ é uma partição de I. Com a notação do Teorema de Hopf's Umlaufsatz, temos que*

$$\sum_{i=1}^{k} \int_{t_i}^{t_{i+1}} k_g(s)ds + \int_{\Omega} K d\Omega + \sum_{i=1}^{k} \phi_i = 2\pi,$$

em que k_g é a curvatura geodésica da curva α e K a curvatura Gaussiana de S.

Demonstração: Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to V \cap S \subset \mathbb{R}^3$ a parametrização ortogonal contendo a região Ω. Uma vez que $\{X_u(p), X_v(p)\}$ é base de T_pS, para todo $p \in X(U)$, podemos considerar o vetor normal unitário

$$N_S(p) = \frac{X_u(q) \times X_v(q)}{|X_u(q) \times X_v(q)|},$$

em que $p = X(q), q \in U$ (a existência desta normal em todo o ponto decorre de S ser orientada). Como estamos considerando α positivamente orientada, temos que $N_S(\alpha(s)) \times \alpha'(s)$ aponta para dentro da região Ω. Defina

$$e_1(p) := \frac{X_u(q)}{|X_u(q)|} \text{ e } e_2(p) := N_S(p) \times e_1(p).$$

Podemos escrever $\alpha(t) = (X(u(t)), X(v(t)))$, pois $\alpha(I) \subset X(U)$. Como $\{e_1(p), e_2(p)\}$ é base para T_pS e α é regular por partes, temos

$$\alpha'(t) = a(t)e_1(\alpha(t)) + b(t)e_2(\alpha(t)) \text{ em } [t_i, t_{i+1}].$$

Por hipótese α é parametrizada pelo comprimento de arco, e desta forma

$$1 = |\alpha'(t)| = a(t)^2 + b(t)^2.$$

Isso implica que $\alpha'(t) \in S^1$ e que existe uma função angular suave $\theta_i : [t_i, t_{i+1}] \to \mathbb{R}$ tal que $\alpha'(t) = \cos\theta_i(t)e_1(\alpha(t)) + \sin\theta_i(t)e_2(\alpha(t))$, com $t \in [t_i, t_{i+1}]$, para toda partição.

Portanto,

$$\begin{aligned}
\frac{D\alpha'}{dt}(t) &= -\theta_i'(t)\sin\theta_i(t)e_1(\alpha(t)) + \cos\theta_i(t)\frac{De_1}{dt}(\alpha(t)) \\
&+ \theta_i'(t)\cos\theta_i(t)e_2(\alpha(t)) + \sin\theta_i(t)\frac{De_2}{dt}(\alpha(t)) \\
&= \theta_i'(t)(\sin\theta_i(t)e_1(\alpha(t)) + \cos\theta_i(t)e_2(\alpha(t))) \\
&+ \cos\theta_i(t)\frac{De_1}{dt}(\alpha(t)) + \sin\theta_i(t)\frac{De_2}{dt}(\alpha(t)) \\
&= \theta_i'(t)(N_S(\alpha(t) \times \alpha'(t))) \\
&+ \left\langle \frac{De_1}{dt}(\alpha(t)), e_2(\alpha(t)) \right\rangle (-\sin\theta_i(t)e_1(\alpha(t)) + \cos\theta_i(t)e_2(\alpha(t))) \\
&= \left(\theta_i'(t) + \left\langle \frac{De_1}{dt}(\alpha(t)), e_2(\alpha(t)) \right\rangle\right) N_S(\alpha(t) \times \alpha'(t)).
\end{aligned}$$

Note que as igualdades acima são válidas pela natureza da normal ao longo de uma curva regular e da definição da derivada covariante, para todo $t \in [t_i, t_{i+1}]$. Com isso, concluímos que

$$k_g(t) = \langle \alpha''(t), N_S(\alpha(t)) \times \alpha'(t) \rangle = \theta_i'(t) + \left\langle \frac{De_1}{dt}(\alpha(t)), e_2(\alpha(t)) \right\rangle.$$

Como a parametrização que estamos considerando é ortogonal, pelas equações de compatibilidade temos que

$$e_1(\alpha(t)) = \frac{X_u(u(t), v(t))}{\sqrt{E(u(t), v(t))}} \text{ e } e_2(\alpha(t)) = \frac{X_v(u(t), v(t))}{\sqrt{G(u(t), v(t))}}.$$

Note que estamos interessados em calcular o produto interno $\left\langle \frac{De_1}{dt}(\alpha(t)), e_2(\alpha(t)) \right\rangle$, e para isto só precisamos das coordenadas relacionadas com o vetor da base X_v. Temos,

$$\pi_v\left(\frac{De_1}{dt}(\alpha(t))\right) = u'(t)\Gamma_{11}^2 X_v(\alpha(t)) + v'(t)\Gamma_{12}^2 X_v(\alpha(t)), \quad \text{em que } \ \pi_v \text{ é a projeção em } X_v.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{De_1}{dt}(\alpha(t)), e_2(\alpha(t)) \right\rangle &= A(u'(t)\Gamma_{11}^2 + v'(t)\Gamma_{12}^2) \\
&= A\left(-u'(t)\frac{1}{2G(u(t), v(t))}E_v(u(t), v(t)) + v'(t)\frac{G_u(u(t), v(t))}{2G(u(t), v(t))}\right) \\
&= B(-u'(t)E_v(u(t), v(t)) + v'(t)G_u(u(t), v(t))) \\
&= \langle (v'(t), -u'(t)), (BG_u(u(t), v(t)), BE_v(u(t), v(t))) \rangle.
\end{aligned}$$

em que $A := \frac{\sqrt{G(u(t),v(t))}}{\sqrt{E(u(t),v(t))}}$ e $B^{-1} := 2\sqrt{E(u(t), v(t))G(u(t), v(t))}$. Como $X^{-1}(\alpha(I))$ é uma curva de Jordan suave por partes delimitando a região $X^{-1}(\Omega)$, podemos usar o Teorema de Stokes para calcular a integral da curvatura geodésica de α nas partições $[t_i, t_{i+1}]$ do seguinte modo:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k} \int_{t_i}^{t_{i+1}} k_g(s)ds &= \sum_{i=1}^{k} (\theta_i(t_{i+1}^-) - \theta_i(t_i^+)) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{k} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \langle (v'(t), -u'(t)), (BG_u(u(t), v(t)), BE_v(u(t), v(t))) \rangle dt \\
&= \sum_{i=1}^{k} (\theta_i(t_{i+1}^-) - \theta_i(t_i^+)) + \\
&\quad + \int_{X^{-1}(\Omega)} (BG_u(u(t), v(t)))_u + (BE_v(u(t), v(t)))_v \, dudv
\end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{k}(\theta_i(t_{i+1}^-) - \theta_i(t_i^+)) + \int_{X^{-1}(\Omega)} (-K\sqrt{E(u(t),v(t))G(u(t),v(t))})dudv$$
$$= \sum_{i=1}^{k}(\theta_i(t_{i+1}^-) - \theta_i(t_i^+)) - \int_{\Omega} Kd\Omega.$$

Finalmente, concluímos pelo Teorema de Hopf's Umlaufsatz que

$$\int_{\Omega} Kd\Omega + \sum_{i=1}^{k}\int_{t_i}^{t_{i+1}} k_g(s)ds + \sum_{i=1}^{k}\phi_i = \sum_{i=1}^{k}(\theta_i(t_{i+1}^-) - \theta_i(t_i^+)) + \sum_{i=1}^{k}\phi_i = 2\pi.$$

□

Observação 2.2 *A hipótese de a parametrização ser ortogonal é apenas para amenizar as contas, mas o mesmo vale para parametrizações quaisquer da superfície S.*

Demonstrado o resultado para regiões simples, o Teorema 2.1 se generalizou para o caso de regiões regulares por partes de S, que são subconjuntos de S cuja fronteira é vazia ou união disjunta de um número finito de traços de curvas parametrizadas regulares por partes, fechadas e simples. Dizemos que T é um **triângulo** em S quando T é uma região regular por partes, homeomorfa a um disco, cuja fronteira tem exatamente 3 vértices com ângulos não nulos.

Com o avanço da topologia no século XIX, foi demonstrado que toda região regular por partes compacta Ω da superfície S admite uma triangulação τ, ou seja, uma coleção finita τ de triângulos $T_1, \ldots, T_k$ tais que

(*i*) $\Omega = \bigcup_{i=1}^{k} T_i$;

(*ii*) Se $T_i \cap T_j \neq \emptyset$, quando $i \neq j$, então $T_i \cap T_j$ é um vértice ou uma aresta.

Uma demonstração deste resultado é dada em (THOMASSEN, 1992, p. 126) por C. Thomassen. Como corolário da existência de triangulações para regiões regulares por partes e compactas, podemos definir o seguinte invariante topológico:

$$\chi(\Omega) = V - E + F,$$

em que V é o número de vértices, E número de arestas e F número de faces da triangulação de Ω. Este número $\chi(\Omega)$ é chamado de **característica de Euler de** Ω. Este número de fato é um invariante topológico, pois dadas duas triangulações τ_1, τ_2 de Ω, temos que $\chi(\tau_1) = \chi(\tau_2)$. Mais ainda, se a superfície S é orientável, e orientada, existe uma triangulação τ de Ω tal que cada triângulo está contido em alguma vizinhança coordenada associada a parametrização positiva. Além disso, se cada triângulo $T \in \tau$ é orientado positivamente, então triângulos que são adjacentes induzem a orientação oposta na aresta comum de ambos. Após toda essa discussão sobre os avanços topológicos na teoria de curvas e superfícies, foi possível demonstrar a versão global do Teorema 2.1.

Teorema 2.3 (Teorema Global de Gauss Bonnet) *Seja S uma superfície regular orientável e orientada em $\mathbb{R}^3$. Seja $\Omega \subset S$ uma região regular por partes e compacta de S. Então,*

$$\int_{\Omega} K d\Omega + \int_{\partial\Omega} k_g(s)ds + \sum_{i=1}^{k} \phi_i = 2\pi\chi(\Omega).$$

Demonstração: Seja τ uma triangulação de Ω tal que qualquer triângulo T_i esteja contido em uma vizinhança coordenada de uma parametrização ortogonal compatível com a orientação de S (essa triangulação existe pelos comentários feitos acima). Podemos aplicar o Teorema 2.1 para cada triângulo, obtendo

$$\int_{T_i} K dT_i + \int_{\partial T_i} k_g(s)ds + \sum_{p=1}^{3} \phi_p^i = 2\pi.$$

Como pontos e arestas possuem medida nula, podemos somar a equação acima para todos os triângulos e obter

$$\sum_{i=1}^{k} \int_{T_i} K dT_i = \int_{\Omega} K d\Omega.$$

Como triângulos adjacentes induzem orientação contrária na aresta em comum, temos que a interseção dos triângulos se anulam na integral. Logo,

$$\sum_{i=1}^{k} \int_{\partial T_i} k_g(s)ds = \int_{\partial\Omega} k_g(s)ds.$$

Portanto,

$$\int_{\Omega} K d\Omega + \int_{\partial\Omega} k_g(s)ds + \sum_{i=1}^{F} \sum_{p=1}^{3} \phi_p^i = 2\pi F.$$

Mas,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k}\sum_{p=1}^{3}\phi_p^i &= \sum_{i=1}^{k}(3\pi - \alpha_1^i - \alpha_2^i - \alpha_3^1)\\ &= 3\pi F - \sum_{i=1}^{f}\sum_{p=1}^{3}\alpha_p^i, \quad \text{onde } \alpha_p^i = \pi - \phi_p^i.\end{aligned}$$

Considere as seguintes relações:

$$\begin{aligned} E_e &= \text{ número de arestas externas de } \tau & E_i &= \text{ número de arestas internas de } \tau\\ V_e &= \text{ número de vértices externos de } \tau & V_i &= \text{ número de vértices internos de } \tau.\end{aligned}$$

Como as curvas C_i que formam o bordo de Ω são fechadas, temos que $E_e = V_e$. Além disto, por indução é um pouco de combinatória, podemos mostrar que $3F = 2E_i + E_e$. Note que os vértices externos podem ser vértices de alguma curva C_i ou vértices dados por τ. Defina V_{ec} como o número de vértices das curvas C_i e defina V_{et} como o número de vértices externos da triangulação que não são vértices de alguma das curvas C_i, temos que $V_e = V_{ec} + V_{et}$. Por fim, temos que

$$\begin{aligned}3\pi F - \sum_{i=1}^{F}\sum_{p=1}^{3}\alpha_p^i &= 2\pi E_i + \pi E_e - 2\pi V_i - \pi V_{et} - \sum_{i=1}^{V_{ec}}(\pi - \phi_p^i)\\ &= 2\pi E - \pi V_e - 2\pi V_i - \pi V_{et} - \sum_{i=1}^{V_{ec}}(\pi - \phi_p^i)\\ &= 2\pi E - 2\pi V + \sum_{i=1}^{V_{ec}}\phi_p^i.\end{aligned}$$

Finalizando a demonstração. □

A beleza deste resultado se destaca na conexão entre a geometria diferencial (curvatura Gaussiana, curvatura geodésica e ângulos) com a topologia (característica de Euler). Com a classificação de superfícies compactas, conexas e orientáveis por meio do seu gênero, i.e., o número de "buracos" na superfície (ver E. Lima (LIMA, 2018, p. 143)), foi demonstrado que a característica de Euler de uma superfície satisfazendo as condições da classificação é $2-2g$, em que g é o número de buracos da superfície. Se tratarmos uma superfície compacta, conexa e orientável como uma região regular com bordo vazio, temos como consequência do

Teorema Global de Gauss-Bonnet que

$$\int_S KdS = 2\pi\chi(S) = 2\pi(2-2g).$$

Em verdade, esta foi a generalização mostrada por Bonnet em 1848 que colocou seu nome no teorema proposto por Gauss.

Com este teorema demonstrado por Bonnet e a classificação das superfícies conexas, compactas e orientáveis, temos as seguintes consequências:

(i) Se $K > 0$ em S, temos que $\int_S KdS > 0$, e isso acontece apenas quando $g = 0$, ou seja, S é homeomorfa a uma esfera.

(ii) Se $K = 0$, então $\int_S KdS = 0$. Logo, $\chi(S) = 1$, implicando que S é homeomorfa a um toro.

(iii) Se existem duas geodésicas simples e fechadas γ_1 e γ_2 em uma superfície S compacta, conexa e com curvatura positiva, então γ_1 e γ_2 se intersectam. De fato, como S tem curvatura positiva, ela é homeomorfa a uma esfera. Então se γ_1 e γ_2 não se intersectam então a região delimitada pelas geodésicas é a fronteira de um cilindro que tem característica de Euler 0. Pelo teorema de Gauss-Bonnet

$$\int_S KdS = 0$$

o que contradiz a hipótese de $K > 0$.

(iv) Jordan-Schönflies demonstraram (ver (THOMASSEN, 1992, p. 127)) que a característica de Euler de um disco D no plano é sempre 1 e o disco D é homeoformo a qualquer região simples R. Como o disco é uma região regular por partes e compacta, temos que

$$\int_R KdR + \int_{\partial R} k_g(s)ds + \sum_{i=1}^{k} \phi_i = 2\pi$$

Mostrando que essa realmente é uma generalização da versão local.

(v) Seja T um triângulo geodésico em S com ângulos externos dados por ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3, como T é uma região regular cujo bordo são geodésicas, temos que $\int_{\partial T} k_g(s)ds = 0$. Logo,

$$\int_T KdT = 2\pi\chi(T) - \sum_{i=1}^{3} \phi_i = 2\pi - (3\pi - \sum_{i=1}^{3} \alpha_i) = \pi - \sum_{i=1}^{3} \alpha_i,$$

onde α_i são os ângulos internos de T.

Referências

1 DOMBROWSKI, Peter. **150 Years After Gauss: Disquisitiones Generales Circa Superficies Curvas**. [S.l.]: Societe mathematique de France, 1979.

2 LIMA, Elon Lages. **Grupo fundamental e espaços de recobrimento**. [S.l.]: Instituto de Matemática Pura e Aplicada do CN Pq., 2018.

3 THOMASSEN, Carsten. The Jordan-Schonflies Theorem and the Classification of Surface. **The American Mathematical Monthly**, Mathematical Association of America, v. 99, n. 2, p. 116–131, 1992. ISSN 00029890, 19300972. Disponível em: ¡http://www.jstor.org/stable/2324180¿.