J Jornal Eletrônico de Ensino e Pesquisa de Matemática
(1s.) **v.5** 1 (2021): 1–15. ©Jeepema–ISSN-2594-6323.
www.dma.uem.br/kit/jeepema

Conjuntos infinitos enumeráveis e não-enumeráveis: Aplicações na física quântica

Gabriel Costa Vieira Arantes – Email: gabriel.prof.exatas@gmail.com, Clóves Gonçalves Rodrigues – Email: cloves@pucgoias.edu.br
Escola de Formação de Professores e Humanidades, Pontifícia Universidade Católica de Goiás, 74605-010, CP 86, Goiânia, Goiás, Brazil

Resumo: O enfoque principal deste trabalho é o estudo dos conjuntos infinitos sob a ótica da Análise Real. São apresentados teoremas e definições importantes sobre o tema, com algumas aplicações concretas no campo da física quântica.
Palavras-chave: Conjuntos infinitos, conjuntos enumeráveis, conjuntos não-enumeráveis, análise real, física quântica.

1. Introdução

Conjuntos infinitos podem ser classificados em enumeráveis e não-enumeráveis, de acordo com a sua natureza. O matemático Georg Cantor foi o primeiro a constatar que existem diferentes tipos de conjuntos infinitos, fato este que culminou na sua teoria dos números cardinais. Apesar de ser um tema abstrato, a noção de enumerabilidade dos conjuntos infinitos é valiosa para a Física Estatística, especialmente no que diz respeito aos fenômenos de caráter aleatório e/ou probabilístico. Veremos que uma das hipóteses acerca da Equação de Onda na Mecânica Quântica assegura que o conjunto de soluções para $\Psi(x,t)$ é infinito e não-enumerável, onde $\Psi(x,t)$ é a função de onda associada. Um argumento para convencer o leitor da importância deste tema é o fato que diversos problemas físicos apresentam conjuntos de soluções infinitos, onde surge o interesse em saber se estes são enumeráveis ou não. Além disso, todo fenômeno físico é modelado em um espaço métrico, cuja estrutura topológica está fundamentada numa métrica estabelecida sobre um conjunto infinito. Algumas definições e teoremas importantes sobre o tema são apresentados na Seção 2, e aplicações práticas no estudo de fenômenos físicos são apresentados na Seção 3. A Seção 4 se reserva às conclusões e comentários finais.

2. Enumerabilidade em Análise Real

O ponto de partida para o estudo da enumerabilidade em Análise Real (Lima, 2017a, 2017b) é o conjunto dos números naturais ($\mathbb{N}$), que é definido por meio dos Axiomas de Peano:

(1) Existe uma função injetiva $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, dizemos que $s(n)$ é o sucessor de n, onde $s(n) \in \mathbb{N}$. Nota: $s(n) = n + 1$.

(2) Existe um único número natural $1 \in \mathbb{N}$ que não é sucessor de nenhum outro número natural pela função $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Em símbolos: $\exists! 1 \in \mathbb{N};\ 1 \notin s(\mathbb{N})$. Isto significa que a função sucessor $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ não é sobrejetiva, pois $s(\mathbb{N}) = \mathbb{N} - \{1\}$, logo tem-se $s(\mathbb{N}) \neq \mathbb{N}$.

(3) (Princípio da Indução) Dado $X \subset \mathbb{N}$, se $1 \in X$ e $s(X) \subset X$, então $X = \mathbb{N}$. Nota: $s(X) \subset X$ significa dizer que $s(n) \in X$, para todo $n \in X$. Noutras palavras, dado $X \subset \mathbb{N}$, se o natural 1 pertence a X e, para cada elemento n de X, o seu sucessor $s(n)$ também pertence a X, então X é o próprio conjunto dos números naturais ($X = \mathbb{N}$).

O Axioma (3) de Peano recebe o nome de Princípio da Indução em $\mathbb{N}$. Ele será utilizado em diversas demonstrações dos teoremas que vêm a seguir. Basicamente, a fim de provar que determinada propriedade P é válida para todo número natural $n \in \mathbb{N}$, devemos mostrar que P vale para $n = 1$, e, posteriormente, devemos provar que P vale para $s(n) = n + 1$, admitindo, pela hipótese de indução, que P vale para n. Em valores lógicos, demonstrar que uma propriedade P vale para todo número natural $n \in \mathbb{N}$ significa provar que:

$$P(1) \text{ é verdadeira e } P(n) \Rightarrow P(s(n)), \forall n \in \mathbb{N},$$

então $P(n)$ é verdadeira $\forall n \in \mathbb{N}$, onde $P(n)$ ser verdadeira é a hipótese de indução.

Faz-se necessário apresentar o Princípio da Boa-Ordenação em $\mathbb{N}$, que será muito útil na demonstração do Teorema 2.1 adiante. Trata-se do 2º Princípio da Indução. O Princípio da Boa-Ordenação afirma que todo subconjunto não-vazio $A \subset \mathbb{N}$ possui um menor elemento.

Prosseguimos para a definição formal de conjunto infinito. Vamos admitir, sem maiores detalhes, que o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais é infinito. O leitor interessado pode consultar a demonstração em (Lima, 2017a, 2017b). Assim, dizemos que o conjunto X é infinito quando existe uma função injetiva $f : \mathbb{N} \to X$. Isto significa que, se X é infinito, então $card(X) \geq card(\mathbb{N})$, onde $card(\ )$ indica a cardinalidade, que é uma função que associa a cada conjunto o número natural que corresponde à quantidade de elementos pertencentes a este conjunto. Vale salientar que a função injetiva $f : \mathbb{N} \to X$ é definida por indução em $n \in \mathbb{N}$. Para isso, tomamos inicialmente $f(1) \in X$. Então, para cada $k \in \mathbb{N}$, escolhemos $f(k) \in A_k = X - \{f(1), f(2), ..., f(k-1)\}$. Pela hipótese de indução, supomos definidos $f(1), f(2), ..., f(n)$ e escrevemos $A_{n+1} = X - \{f(1), f(2), ..., f(n)\}$, onde $A_{n+1} \subset X$ é não-vazio, pois X é infinito. Assim, basta tomar $f(n+1) \in A_{n+1}$. Isto completa a definição de $f : \mathbb{N} \to X$. A injetividade de f decorre do fato que, dados $m, n \in \mathbb{N}$, digamos com $m < n$, tem-se $f(m) \in \{f(1), f(2), ..., f(n-1)\}$ e $f(n) \in X - \{f(1), f(2), ..., f(n-1)\}$, logo $f(m) \neq f(n)$.

Conjuntos infinitos podem ser classificados em enumeráveis ou não-enumeráveis. Por definição, todo conjunto finito é enumerável. Porém, como o foco principal deste trabalho são os conjuntos infinitos, daremos atenção especial ao que torna um conjunto infinito enumerável. Dizemos que um conjunto infinito X é enumerável quando existe uma bijeção $f : \mathbb{N} \to X$. Isto significa que, se X é infinito e enumerável, então $card(X) = card(\mathbb{N})$. Noutras palavras, podemos afirmar que os conjuntos infinitos enumeráveis são, de certa forma, os "menores infinitos"que existem. Em matemática e em física, existem infinitos maiores que outros. Por conseguinte, dizemos que um conjunto infinito X é não-enumerável quando não existe sobrejeção $f : \mathbb{N} \to X$, ou seja, $f(\mathbb{N}) \neq X$ para toda função $f : \mathbb{N} \to X$. Isto significa que, se X é infinito e não-enumerável, então $card(X) > card(\mathbb{N})$.

Portanto, todo conjunto enumerável possui uma enumeração do tipo $X = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$. Basta definir $f(1) = x_1, f(2) = x_2, ..., f(n) = x_n, ...$ a partir da bijeção $f : \mathbb{N} \to X$. Resumidamente, um conjunto infinito X é enumerável quando x_{k+1} está bem definido para todo elemento $x_k \in X$ arbitrário. Dizemos que x_{k+1} é o próximo elemento de X após x_k. Esta noção nos permite verificar intuitivamente que o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais é não-enumerável, pois dado qualquer número real $x \in \mathbb{R}$, é impossível afirmar qual é o próximo número real. Para entender este fato, pense no seguinte exemplo: dado $1,001 \in \mathbb{R}$, qual é o próximo número real? $1,00101$? $1,001001$? $1,0010001$? ...? $1,001000...0001$? Não há como dizer. Pensando no conjunto dos números naturais, temos que $\mathbb{N}$ é obviamente enumerável, pois existe pelo menos a bijeção trivial $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, dada por $f(n) = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, que é a função identidade. Por outro lado, podemos verificar intuitivamente que $\mathbb{N}$ é enumerável pensando no seguinte fato: para todo $n \in \mathbb{N}$, o Axioma (3) de Peano assegura que $s(n) = n + 1 \in \mathbb{N}$, onde $s(n)$ é o sucessor de n pela função injetiva $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Logo, o número natural $s(n) \in \mathbb{N}$ está bem definido para todo $n \in \mathbb{N}$, onde $s(n)$ é o próximo natural após n. Isto permite definir uma enumeração do conjunto dos números naturais, pondo $\mathbb{N} = \{n_1, n_2, ..., n_k, ...\} = \{1, s(1), s(s(1)), ..., s^k(1), ...\}$. De maneira simplificada, dizemos que o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais é enumerável porque podemos contar os seus elementos. O mesmo não pode ser dito para $\mathbb{R}$.

Prosseguiremos para os teoremas referentes aos conjuntos infinitos enumeráveis. Estes teoremas serão de grande valor para os estudos da Física Estatística e da Mecânica Quântica, bem como das suas particularidades, onde estão envolvidas variáveis aleatórias e condições probabilísticas em meio aos fenômenos físicos investigados.

Teorema 2.1 *Todo subconjunto infinito $X \subset \mathbb{N}$ é enumerável.*

Demonstração: Definiremos uma enumeração do subconjunto infinito $X \subset \mathbb{N}$ por indução. Usaremos aqui o Princípio da Boa-Ordenação em $\mathbb{N}$. Começamos tomando $x_1 = minX$. Daí, definimos $A_1 \subset X$ tal que $A_1 = X - \{x_1\}$. Tomamos então $x_2 = minA_1$ e definimos $A_2 \subset X$ tal que $A_2 = X - \{x_1, x_2\}$. Prosseguindo indutivamente, supomos definido $A_n \subset X$ tal que $A_n = X - \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Daí, basta tomar $x_{n+1} = minA_n$. Obtemos desta maneira uma enumeração do subconjunto infinito $X \subset \mathbb{N}$ dada por $X = \{x_1, x_2, ..., x_n, \ldots\}$, com $x_1 = minX$ e $x_{k+1} = minA_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$, onde $A_k = X - \{x_1, x_2, ..., x_k\}$. ◪

Teorema 2.2 *Sejam X, Y conjuntos infinitos e $f : X \to Y$ uma função injetiva. Se Y é enumerável, então X também é.*

Demonstração: Se Y é infinito e enumerável, então existe uma bijeção $g : \mathbb{N} \to Y$. Além disso, se $f : X \to Y$ é injetiva, então $f(X) \subset Y$. Daí, podemos obter uma bijeção $f|_{f(X)} : X \to f(X)$ restringindo o contradomínio da função original $f : X \to Y$ ao subconjunto $f(X) \subset Y$. Mais ainda, como $g : \mathbb{N} \to Y$ é bijetiva, deve existir $A \subset \mathbb{N}$ tal que $g|_{f(X)} : A \to f(X)$ também é bijeção. Pelo Teorema 2.1, temos que $A \subset \mathbb{N}$ é enumerável, donde $g|_{f(X)} : A \to f(X)$ bijeção implica em $f(X)$ enumerável. Por sua vez, $f|_{f(X)} : X \to f(X)$ bijeção implica em X enumerável. ◪

Teorema 2.3 *Sejam X, Y conjuntos infinitos e $f : X \to Y$ uma função sobrejetiva. Se X é enumerável, então Y também é.*

Demonstração: Com efeito, basta tomar para cada $y \in Y$ um elemento $g(y) \in X$ e definir a partir daí uma função $g : Y \to X$ tal que $f(g(y)) = y$ para todo $y \in Y$. A nova função $g : Y \to X$ assim definida é injetiva. Para verificar este fato, basta tomar $g(y_1) \neq g(y_2) \in X$ genéricos, donde obtemos que $f(g(y_1)) \neq f(g(y_2)) \Rightarrow y_1 \neq y_2$. A função g é a inversa à direita de f. Pelo Teorema 2.2, se $g : Y \to X$ é injetiva e X é enumerável por hipótese, então Y também é enumerável. ◪

Teorema 2.4 *Sejam X, Y conjuntos infinitos e enumeráveis. O produto cartesiano $X \times Y$ também é enumerável.*

Demonstração: Sejam X, Y conjuntos infinitos e enumeráveis. Por definição, temos que existem bijeções $f : \mathbb{N} \to X$ e $g : \mathbb{N} \to Y$. Em particular, podemos considerar que existem sobrejeções $f : \mathbb{N} \to X$ e $g : \mathbb{N} \to Y$. Definimos a partir daí uma função sobrejetiva $F : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to X \times Y$ pondo $F(m, n) = (f(m), g(n))$ para todo $m, n \in \mathbb{N}$. Pelo Teorema 2.3, basta provar que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável. Com efeito, tomando a função $\Psi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por $\Psi(m, n) = 2^m.3^n$, temos que Ψ é injetiva, devido à unicidade da decomposição de números naturais em fatores primos, assegurada pelo Teorema Fundamental da Aritmética. Pelo Teorema 2.2, como a função $\Psi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é injetiva e $\mathbb{N}$ é enumerável, então $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável.

◪

Teorema 2.5 *A reunião de uma família enumerável de conjuntos enumeráveis é enumerável. Em outra notação, se $(X_\lambda)_{\lambda \in L}$ é uma família enumerável cujos elementos são conjuntos enumeráveis, então a reunião $\bigcup_{\lambda \in L} X_\lambda$ também é enumerável.*

Demonstração: Consideremos uma família enumerável $(X_\lambda)_{\lambda \in L}$ cujos elementos são conjuntos enumeráveis $X_1, X_2, ..., X_n, \ldots$. Por definição, temos que existem bijeções $f_1 : \mathbb{N} \to X_1$, $f_2 : \mathbb{N} \to X_2, \ldots, f_n : \mathbb{N} \to X_n, \ldots$. Em particular, podemos considerar que existem sobrejeções $f_1 : \mathbb{N} \to X_1, f_2 : \mathbb{N} \to X_2, \ldots, f_n : \mathbb{N} \to X_n, \ldots$. Seja $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ a reunião de todos os elementos de $(X_\lambda)_{\lambda \in L}$. Definimos a partir daí uma função sobrejetiva $F : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ pondo $F(m, n) = f_n(m)$ para todo $m, n \in \mathbb{N}$, isto é, pondo $F(m, n)$ igual à n-ésima função, f_n, aplicada ao natural m. Como já foi provado no Teorema 2.4 que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável, segue do Teorema 2.3 que se $F : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ é sobrejetiva, então a reunião $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = \bigcup_{\lambda \in L} X_\lambda$ (a igualdade anterior induz a concluir que L é infinito excluindo-se o caso em que L é finito, esta é a intenção?) é enumerável.

◪

É importante ressaltar que a notação $A \equiv B$ significa que os conjuntos A e B são equipotentes, isto é, que A e B possuem o mesmo número de elementos. Portanto, afirmar que $A \equiv B$ equivale a escrever $card(A) = card(B)$, ou seja, dois conjuntos são equipotentes se, e somente se, possuem a mesma cardinalidade. Mais precisamente, se os conjuntos A e B são equipotentes, então existe uma relação biunívoca entre eles, dada pela função bijetiva $f : A \to B$.

Teorema 2.6 *Todo conjunto infinito contém um subconjunto infinito enumerável.*

Demonstração: Seja X um conjunto infinito. Consideremos inicialmente que X é enumerável. Neste caso, basta considerar $A = X$. Temos que A é um subconjunto de X e A é infinito enumerável.

Consideremos agora que X é não-enumerável. Logo, não existe sobrejeção $\mathbb{N} \to X$. Por definição, se X é infinito, então deve existir uma função injetiva $h : \mathbb{N} \to X$. Segue-se daí que $card(X) > card(\mathbb{N})$ e $h(\mathbb{N}) \subset X$. Além disso, podemos obter uma bijeção $h|_{h(N)} : \mathbb{N} \to h(\mathbb{N})$ restringindo o contradomínio da função original $h : \mathbb{N} \to X$ ao subconjunto $h(\mathbb{N}) \subset X$. Portanto, se $h|_{h(N)} : \mathbb{N} \to h(\mathbb{N})$ é uma bijeção, então $card(\mathbb{N}) = card h(\mathbb{N})$, isto é, $N \equiv h(\mathbb{N})$. Consequentemente, $h(\mathbb{N}) \subset X$ é infinito enumerável. ◪

O resultado do Teorema 2.6 é de importância para o estudo dos fenômenos físicos probabilísticos, cujos domínios geralmente são conjuntos infinitos não-enumeráveis de variáveis aleatórias. A fim de estabelecer uma lei matemática para essas variáveis, de modo que se obtenha uma solução determinística para o fenômeno físico estudado, é interessante analisar um subconjunto infinito de variáveis do domínio original que seja enumerável, cuja existência é assegurada pelo Teorema 2.6. Por exemplo, pensando na Física Estatística, imagine a seguinte situação: o pesquisador está modelando um fenômeno puramente probabilístico, cujo domínio de variáveis aleatórias é caracterizado por um conjunto infinito não-enumerável. Considere ainda que o conjunto de soluções do problema não pode ser determinado analiticamente, mas apenas numericamente. O pesquisador conseguirá encontrar as soluções do problema através de métodos numéricos, mas não será capaz de estabelecer uma lei matemática que rege o fenômeno estudado para todo o domínio. Um fator problemático neste cenário pode ser justamente a não-enumerabilidade do domínio de variáveis aleatórias que descrevem os parâmetros do fenômeno investigado.

Diante desta situação, é importante destacar a relevância dos estudos matemáticos referentes à perturbação de domínios dos fenômenos físicos. De maneira simplificada, perturbação de domínio é a alteração intencional realizada sobre o corpo de elementos que constituem o domínio do fenômeno estudado. Por exemplo, o ato de restringir uma função genérica $f : X \to Y$ a um subconjunto $X' \subset X$ do seu domínio original, consequentemente obtendo a restrição $f|_{X'} : X' \to Y$, implica uma perturbação do domínio da função $f : X \to Y$. Retomando o cenário descrito anteriormente, se o pesquisador está interessado em resolver analiticamente um problema físico de caráter aleatório e/ou probabilístico, ainda que isto seja impossível para todo o conjunto de variáveis do problema original, ele pode investigar se há uma perturbação do domínio que permita determinar uma lei matemática capaz de modelar o fenômeno físico restrito às variáveis do novo subconjunto obtido após a perturbação. Explorando mais a fundo, seja $f : X \to Y$ a função genérica que modela determinado fenômeno físico. Consideremos que o domínio X desta função é um conjunto infinito não-enumerável. O pesquisador pode investigar uma possível perturbação do domínio de $f : X \to Y$ que resulte num subconjunto infinito $A \subset X$, de tal modo que A seja enumerável. O subconjunto $A \subset X$ do domínio de $f : X \to Y$ munido destas características certamente existe, devido ao resultado provado no Teorema 2.6. Assim, o problema do pesquisador se reduz a descobrir como perturbar o domínio original do fenômeno físico estudado, de tal modo que se obtenha um subconjunto enumerável deste.

Resumindo, é mais fácil estabelecer um padrão matemático para um conjunto infinito enumerável que para um conjunto infinito não-enumerável, mesmo que isto resulte em uma lei que modele apenas parte do fenômeno físico estudado, isto é, uma lei que valha apenas para uma restrição do seu domínio. Isto porque um conjunto infinito enumerável possui, por definição, uma bijeção com o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais, ou seja, ele pode ser enumerado, o que por si só resulta em um padrão matemático que permite saber, a partir de qualquer elemento deste conjunto, quem é o seu próximo elemento (reveja a definição de enumerabilidade apresentada previamente, onde utilizou-se a notação em símbolos). Além disso, a obtenção de uma solução analítica para o fenômeno físico estudado, restringindo-o a um certo subconjunto enumerável de variáveis, mesmo que não seja uma solução forte, já é algo de grande valor.

Em algumas situações, o método descrito nos parágrafos anteriores, cuja validade é assegurada pelo Teorema 2.6, pode não ser suficiente para estabelecer uma lei matemática capaz de fornecer soluções analíticas, mesmo que de maneira restrita. Nestes casos, o pesquisador ainda dispõe de outra ferramenta. é possível fracionar o subconjunto infinito enumerável $A \subset X$ do domínio de $f : X \to Y$, obtido a partir do método anterior, em partes enumeráveis $A_n \subset A, n \in \mathbb{N}$, originando cisões. Então, o subconjunto $A \subset X$ passa a ser analisado como a reunião de uma família enumerável de partes enumeráveis $A_n \subset A, n \in \mathbb{N}$. Em outra notação, temos $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, onde $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$. Deste modo, o pesquisador limita seu problema à investigação de leis matemáticas que expliquem o fenômeno físico estudado para cada parte enumerável $A_n \subset A, n \in \mathbb{N}$. A partir daí, é possível descartar as partes de $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ indesejadas, restando apenas aquelas que podem ser modeladas analiticamente. As partes enumeráveis $A_\lambda \subset A, \lambda \in L$ de interesse do pesquisador, isto é, aquelas que de fato apresentam soluções analíticas, podem ser reunidas novamente, obtendo um novo subconjunto $\bigcup_{\lambda\in L} A_\lambda = \bar{A}$, onde $\bar{A} \subset A$. Pelo Teorema 2.5, temos que a reunião $\bigcup_{\lambda\in L} A_\lambda = \bar{A}$ é enumerável, pois $(A_\lambda)_{\lambda\in L}$ é uma família enumerável de partes enumeráveis $A_\lambda \subset A$, $\lambda \in L$.

Os fenômenos de perturbação de domínios constituem um dos principais objetos de estudo dos Sistemas Dinâmicos, um campo da física matemática destinado à investigação de funções que descrevem a evolução ao longo do tempo de sistemas definidos em espaços topológicos (Brin, 2015). Portanto, as noções de conjunto infinito e de enumerabilidade são de grande valor para o estudo dos sistemas que evoluem com o tempo. Estes sistemas são geralmente descritos por meio de Equações Diferenciais Parciais, onde podemos destacar os fenômenos físicos da Mecânica Celeste moderna, principalmente os estudos sobre a evolução de galáxias, que podem ser interpretadas matematicamente como sistemas dinâmicos.

Vejamos a seguir alguns exemplos concretos e aplicações práticas.

3. Aplicações e Exemplos

3.1. Método da Diagonal de Georg Cantor

Discutimos na Seção 2 um método que possibilita a obtenção de subconjuntos infinitos enumeráveis a partir de qualquer conjunto não-enumerável, com base nos resultados demonstrados no Teorema 2.5 e no Teorema 2.6. Veremos neste exemplo um método que propõe o caminho inverso. Estamos falando do Método da Diagonal, um raciocínio desenvolvido pelo matemático alemão Georg Cantor em 1891, visando a obtenção de conjuntos não-enumeráveis a partir de conjuntos infinitos enumeráveis (Lima, 2017a). Foi com base neste método que Cantor comprovou a existência de conjuntos infinitos com naturezas distintas. Seja X um conjunto infinito enumerável e Y um conjunto arbitrário contendo pelo menos dois elementos. Consideremos que o símbolo $F(X;Y)$ representa o conjunto $F(X;Y) = \{X, Y \subset \mathbb{R};$ existe $f : X \to Y\}$ cujos elementos são todas as funções $f : X \to Y$ possíveis. O raciocínio de Cantor afirma que nenhuma função $\varphi : X \to F(X;Y)$ é sobrejetiva. Inicialmente, o argumento do Método da Diagonal, devido a Georg Cantor, foi enunciado para o caso particular da função $\varphi : \mathbb{N} \to F(\mathbb{N}; \{0,1\})$, onde $X = \mathbb{N}$ e $Y = \{0,1\}$. Somente depois este raciocínio foi demonstrado para o caso mais geral, com base no mesmo argumento, consolidando-se como teorema. Veremos somente a demonstração do caso particular, visando a definição do nosso método de interesse. A fim de verificar que $\mathbb{N} \to F(\mathbb{N}; \{0,1\})$ não é sobrejetiva, basta definir indutivamente $\varphi(1) = s_1$, $\varphi(2) = s_2$, $\ldots$, $\varphi(n) = s_n, \ldots$, onde s_1, s_2, $\ldots$, s_n, $\ldots$ são sequências cujos termos são elementos do conjunto $\{0,1\}$. Seja s_{m_n} o n-ésimo termo da sequência s_m. Então, sempre será possível obter uma nova sequência s^* diferente de todas as anteriores, simplesmente tomando $s^*_n = 0$ se for $s_{m_n} = 1$ ou então $s^*_n = 1$ se for $s_{m_n} = 0$. Isto significa que nenhuma lista enumerável pode esgotar todas as funções do conjunto $F(\mathbb{N}; \{0,1\})$. Este resultado será fundamental para a demonstração a seguir. Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto infinito e enumerável. Consideremos o conjunto $P(X) = \{A \subset \mathbb{R};$ A é subconjunto de $X\}$ das partes de X. Tomando novamente $Y = \{0,1\}$ no Método da Diagonal de Cantor, vamos provar que existe uma função $\xi : P(X) \to F(X; \{0,1\})$ bijetiva. Para cada subconjunto $A \subset X$, isto é, para cada elemento de $P(X)$, definimos uma função restrita $\xi|_A : X \to \{0,1\}$ tal que, para todo $x \in X$, tem-se $\xi|_A(x) = 1$ se $x \in A$ e $\xi|_A(x) = 0$ se $x \notin A$. Portanto, obtemos a bijeção $\xi : P(X) \to F(X; \{0,1\})$ que relaciona $A \mapsto \xi|_A$ para todo $A \in P(X)$. Vimos que a função $\varphi : X \to F(X; \{0,1\})$ não pode ser sobrejetiva. Então, certamente a composta $\xi^{-1} \circ \varphi : X \to P(X)$ não é sobrejetiva. No entanto, existe uma injetividade trivial $\psi : X \to P(X)$ dada por $\psi(x) = \{x\}$ para todo $x \in X$. Resulta daí que $card(X) < cardP(X)$. Por hipótese, tomamos um conjunto infinito arbitrário $X \subset \mathbb{R}$ de natureza enumerável, logo temos $card(X) = card(\mathbb{N})$. Consequentemente, obtemos $card(\mathbb{N}) < cardP(X)$. Por definição, isto significa que o conjunto das partes de X dado por $P(X) = \{A \subset \mathbb{R}; A$ é subconjunto de $X\}$ é não-enumerável, seja qual for o conjunto infinito enumerável $X \subset \mathbb{R}$ considerado. Em resumo, o Método da Diagonal de Georg Cantor nos permite obter um conjunto não-enumerável $P(X)$ a partir de qualquer conjunto infinito enumerável $X \subset \mathbb{R}$ que tivermos. Para isso, basta definir $P(X)$ como sendo o conjunto das partes de X. O raciocínio que acabamos de examinar é muito simples e poderoso, apesar do teor abstrato da sua demonstração. O Método da Diagonal de Cantor será contextualizado no Exemplo 3.4 mais adiante para provar um resultado muito interessante da Física Teórica: todo fenômeno físico cuja natureza é discreta pode ser extrapolado de modo a obter uma interpretação contínua do seu conjunto de soluções, que pode ter validade prática ou não.

3.2. Hipótese da Linearidade de $\Psi(x,t)$ na Equação de Onda da Mecânica Quântica

A equação fundamental da mecânica quântica foi apresentada pelo físico austríaco Erwin Schrödinger em 1925. Estamos falando da equação de onda de Schrödinger, um marco na história da ciência moderna. Ela é uma equação diferencial parcial (EDP) de 2ª ordem cujas soluções são chamadas de funções de onda e simbolizadas por $\Psi(x,t)$ (Eisberg, 1974). Estas funções, por sua vez, descrevem o comportamento das partículas subatômicas, portanto, constituem a base do conhecimento quântico. A equação de onda unidimensional, devida a Schrödinger, é dada pela seguinte expressão:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2} + V(x,t)\Psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t}$$

onde m é a massa da partícula, $\hbar$ é a constante de Planck reduzida, $i = \sqrt{-1}$ é o número imaginário e $V(x,t)$ é a energia potencial da partícula. A principal motivação de Schrödinger para obter esta equação foi a hipótese de De Broglie sobre a natureza dual da matéria. Também é possível obter a equação de onda de Schrödinger a partir de quatro hipóteses, ou axiomas, que justificam a validade desta equação. Uma delas é a hipótese da linearidade de $\Psi(x,t)$. Esta hipótese afirma que a Equação de Onda deve ser linear em $\Psi(x,t)$. Isto significa que se $\Psi_1(x,t)$ e $\Psi_2(x,t)$ são duas soluções distintas da Equação de Onda para uma dada energia potencial $V(x,t)$ da partícula, então qualquer combinação linear arbitrária $\Psi(x,t) = \alpha_1\Psi_1(x,t) + \alpha_2\Psi_2(x,t)$ também é solução, onde α_1, α_2 são constantes.

Obviamente, o conjunto de soluções da Equação de Onda proposta por Schrödinger é infinito, em virtude da arbitrariedade das combinações lineares. Noutras palavras, existem infinitas Funções de Onda $\Psi(x,t)$ que satisfazem esta equação. Seja Ω o conjunto de todas essas funções $\Psi(x,t)$. Vamos provar que Ω é não-enumerável. Fixando duas soluções $\Psi_1(x,t)$ e $\Psi_2(x,t)$ da Equação de Schrödinger, podemos definir o subconjunto $\Omega' \subset \Omega$ dado por $\Omega' = \{\Psi(x,t) \in \Omega; \Psi(x,t) = \alpha_1\Psi_1(x,t) + \alpha_2\Psi_2(x,t) \wedge \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}$. O símbolo $\wedge$ representa o operador lógico da conjunção, que equivale ao conectivo "e"da gramática. Como $\Omega' \subset \Omega$, temos que $card(\Omega') \leq card(\Omega)$. Logo, basta mostrar que Ω' é não-enumerável. Para isso, definimos a bijeção $\mathcal{F} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \Omega'$ dada por $\mathcal{F}(\alpha_1, \alpha_2) = \alpha_1\Psi_1(x,t) + \alpha_2\Psi_2(x,t)$. Sabemos que o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais é não-enumerável. Além disso, vale $card(\mathbb{R}) \leq card(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$. Por definição, resulta daí que $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ também é não-enumerável. Finalmente, como $\mathcal{F}$ é uma bijeção entre $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e Ω', então o subconjunto $\Omega' \subset \Omega$ é não-enumerável. Em suma, acabamos de provar que o conjunto de soluções $\Omega(\Psi)$ da Equação de Onda proposta por Schrödinger é não-enumerável. Em virtude deste fato, valem as seguintes conclusões:

1. O conjunto Ω não possui bijeção com $\mathbb{N}$. Consequentemente, card $\Omega > card(\mathbb{N})$.

2. Todos os fenômenos da Mecânica Quântica que cumprem a Equação de Schrödinger são contínuos, pois a natureza não-enumerável do conjunto Ω assegura que é impossível quantizá-los para todo o espectro das Funções de Onda $\Psi(x,t) \in \Omega$.

3. De acordo com o resultado demonstrado no Teorema 2.6, existe pelo menos um subconjunto infinito de Ω que é enumerável. Seja $\Omega'' \subset \Omega$ este subconjunto. Podemos defini-lo facilmente a partir do conjunto auxiliar Ω' utilizado na prova anterior. Basta limitar os coeficientes das combinações lineares de Ω' apenas aos números naturais. Deste modo, obtemos o subconjunto $\Omega'' = \{\Psi(x,t) \in \Omega; \Psi(x,t) = n_1\Psi_1(x,t) + n_2\Psi_2(x,t) \wedge n_1, n_2 \in \mathbb{N}\}$. A fim de verificar que $\Omega'' \subset \Omega$ é enumerável, consideramos a bijeção $\mathcal{F} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \Omega''$ dada por $\mathcal{F}(n_1, n_2) = n_1\Psi_1(x,t) + n_2\Psi_2(x,t)$. Vimos na demonstração do Teorema 2.4 que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável. Portanto, o subconjunto $\Omega'' \subset \Omega$ também o é.

4. Uma interpretação muito interessante da conclusão anterior pode ser enunciada da seguinte maneira: todo fenômeno quântico que cumpre a Equação de Onda proposta por Schrödinger é quantizável numa dada restrição do seu domínio. Para isso, basta limitar a hipótese da linearidade da Equação de Onda em $\Psi(x,t)$ de modo que os coeficientes permitidos para as combinações lineares sejam números naturais. Em geral, todos os conjuntos de soluções não-enumeráveis que descrevem fenômenos físicos de natureza contínua possuem subconjuntos infinitos enumeráveis que satisfazem os casos particulares quantizáveis destes fenômenos. Estes casos particulares, por sua vez, possuem

natureza discreta. Esta afirmação também é sustentada pelo Teorema 2.6.

3.3. Quantização da Energia, Fótons de Luz e Equação de Planck (1900)

No ano de 1900, o físico alemão Max Planck publicou sua teoria sobre a quantização da energia luminosa, numa tentativa de explicar o problema da Radiação do Corpo Negro, que estava em aberto desde 1860 devido às observações experimentais realizadas principalmente por Gustav Kirchhoff. A famosa Equação de Planck foi capaz de descrever, com êxito, o fenômeno da emissão do Corpo Negro, através de uma teoria completamente inovadora (Eisberg, 1974). Planck sugeriu que a energia E das ondas eletromagnéticas estacionárias, oscilando senoidalmente com o tempo, seria uma grandeza discreta em vez de contínua. Assim, Planck sugere que

$$E = n(h\nu), n \in \mathbb{N}$$

onde h é uma constante (denominada posteriormente de constante de Planck) e ν a frequência da onda eletromagnética correspondente. Fixando a frequência ν, consideremos o conjunto $\Gamma = \{E = n(h\nu); n \in \mathbb{N}\}$ de todas as energias permitidas para as ondas eletromagnéticas desta radiação. Evidentemente, este conjunto é infinito, pois para cada múltiplo natural $n = 1, 2, 3, ...$ associa-se um valor de energia. A fim de provar que o conjunto $\Gamma(E)$ é enumerável, basta definir a bijeção $\mathcal{F} : \mathbb{N} \to \Gamma(E)$ dada por $\mathcal{F}(n) = n(h\nu)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Isto demonstra matematicamente que os fenômenos quânticos que cumprem a Equação de Planck são discretos. É interessante notar que, no campo de estudo da Física, os fenômenos contínuos sempre são associados a conjuntos não-enumeráveis, enquanto que os fenômenos discretos são associados a conjuntos infinitos enumeráveis. Isto decorre diretamente da existência (ou não) de uma restrição destes fenômenos ao conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais, ou a qualquer outro conjunto equipotente a ele, por exemplo, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

3.4. As Relações entre o Discreto e o Contínuo na Física

Realizamos uma discussão geral sobre os fenômenos físicos de natureza contínua e mostramos que eles estão associados a conjuntos não-enumeráveis. Neste contexto, destacamos como exemplo a Equação de Onda da Mecânica Quântica. Em virtude do resultado demonstrado no Teorema 2.6, vimos que existem casos particulares destes fenômenos contínuos que são descritos por conjuntos enumeráveis. Isto define uma condição quantizável do fenômeno original para uma dada restrição do seu domínio, conferindo a ele uma interpretação discreta. Este resultado, é claro, permanece no campo da Física Teórica. Não obstante, a existência de uma relação entre a natureza dos fenômenos físicos e a natureza dos conjuntos infinitos é um fato no mínimo curioso.

Neste ponto, sabemos que é possível obter o discreto a partir do contínuo. Discutimos bastante sobre o significado físico desta restrição, que caracteriza uma perturbação do domínio que rege o fenômeno estudado. No entanto, ainda não analisamos o caminho inverso. Eis que levantamos o seguinte questionamento: podemos definir um fenômeno físico de natureza contínua a partir de um caso discreto, ou seja, quantizável? O Método da Diagonal de Georg Cantor, discutido na Seção 1, nos dá a resposta. Vamos provar que, de fato, é possível obter o contínuo a partir do discreto. Para isso, consideremos novamente o caso da Equação de Planck. Dada uma radiação qualquer de frequência ν do espectro eletromagnético, seja o conjunto $\Gamma = \{E = n(h\nu); n \in \mathbb{N}\}$ de todas as energias permitidas para as ondas eletromagnéticas. Conforme a análise realizada na Seção 3.3, vimos que o conjunto Γ é infinito e enumerável. Por conseguinte, o Método da Diagonal nos permite obter facilmente o conjunto não-enumerável $P(\Gamma) = \{A \subset \mathbb{R}; A \text{ é subconjunto de } \Gamma\}$ cujos elementos são as partes de Γ. Este conjunto pode ser interpretado, em termos físicos, como a reunião de todos os eventos da natureza em que a Equação de Planck faz sentido, para alguma restrição dos múltiplos naturais de $h\nu$ a um subconjunto de $\mathbb{N}$. Procedendo desta maneira, obtemos um caso contínuo, isto é, não-enumerável, a partir dos fenômenos quânticos discretos que obedecem a Equação de Planck.

O conjunto $\Gamma = \{E = n(h\nu); n \in \mathbb{N}\}$ é enumerável porque descreve as energias permitidas para as ondas de uma radiação eletromagnética específica, cuja frequência ν é fixa. Se, por outro lado, considerarmos o conjunto $\Upsilon = \{E = n(h\nu); n \in \mathbb{N}, \nu \in \mathbb{R}\}$ de todas as energias permitidas para as ondas de qualquer radiação do espectro eletromagnético, então temos que Υ é um conjunto não-enumerável, pois existe uma bijeção clara $\mathcal{F} : \mathbb{N} \times \mathbb{R} \to \Upsilon$ dada por $\mathcal{F}(n, \nu) = n(h\nu)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\nu \in \mathbb{R}$, onde o produto cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$ é evidentemente não-enumerável. Portanto, a natureza não-enumerável do conjunto Υ nos permite inferir que o espectro eletromagnético em sua totalidade é contínuo, o que condiz com a teoria da Física sobre as ondas eletromagnéticas.

3.5. O Princípio da Indução e a Hipótese da Linearidade da Equação de Schrödinger

Foi comentado na Seção 3.2 que foram admitidas quatro hipóteses, ou axiomas, em relação à equação de onda da mecânica quântica (também conhecida por equação de Schrödinger). Estas hipóteses justificam a sua validade e fundamentam uma possível demonstração da mesma. Na Seção 3.2, investigamos a hipótese da linearidade da Equação de Schrödinger em $\Psi(x, t)$, a partir da qual provamos a natureza não-enumerável do conjunto de soluções Ω. Esta hipótese afirma que, se $\Psi_1(x, t)$ e $\Psi_2(x, t)$ são duas soluções distintas da Equação de Onda para uma dada energia potencial $V(x, t)$ da partícula, então qualquer combinação linear arbitrária $\Psi(x,t) = \alpha_1\Psi_1(x,t) + \alpha_2\Psi_2(x,t)$ também é solução, onde $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Sejam $\Psi_1(x,t)$, $\Psi_2(x,t)$,..., $\Psi_n(x,t)$,... soluções da Equação de Schrödinger. Por conseguinte, temos:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi_1(x,t)}{\partial x^2} + V(x,t)\Psi_1(x,t) - i\hbar\frac{\partial\Psi_1(x,t)}{\partial t} = 0$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi_2(x,t)}{\partial x^2} + V(x,t)\Psi_2(x,t) - i\hbar\frac{\partial\Psi_2(x,t)}{\partial t} = 0$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi_n(x,t)}{\partial x^2} + V(x,t)\Psi_n(x,t) - i\hbar\frac{\partial\Psi_n(x,t)}{\partial t} = 0$$

Pode ser provado, por indução em $n \in \mathbb{N}$, que a hipótese da linearidade é válida para toda combinação linear arbitrária destas soluções. Para $n = 1$, temos $\Psi^{(1)} = \alpha_1\Psi_1(x,t)$. Segue-se daí que:

$$\begin{aligned}
-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi^{(1)}}{\partial x^2} + V\Psi^{(1)} - i\hbar\frac{\partial\Psi^{(1)}}{\partial t} &= -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2(\alpha_1\Psi_1)}{\partial x^2} + V(\alpha_1\Psi_1) - i\hbar\frac{\partial(\alpha_1\Psi_1)}{\partial t} \\
&= \alpha_1\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi_1}{\partial x^2}\right) + \alpha_1(V\Psi_1) - \alpha_1\left(i\hbar\frac{\partial\Psi_1}{\partial t}\right) \\
&= \alpha_1\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi_1}{\partial x^2} + V\Psi_1 - i\hbar\frac{\partial\Psi_1}{\partial t}\right) \\
&= \alpha_1 \cdot (0) = 0.
\end{aligned}$$

Portanto, a combinação linear $\Psi^{(1)} = \alpha_1\Psi_1(x,t)$ é solução da Equação de Schrödinger. Prosseguindo com a demonstração, devemos admitir a hipótese de indução para $n \in \mathbb{N}$ e mostrar que a propriedade também vale para $n+1$. Sejam $\Psi_1(x,t)$, $\Psi_2(x,t)$,..., $\Psi_n(x,t)$, $\Psi_{n+1}(x,t)$ soluções da Equação de Schrödinger. A hipótese de indução consiste em admitir que a combinação linear

$$\Psi^{(n)}(x,t) = \alpha_1\Psi_1(x,t) + \alpha_2\Psi_2(x,t) + ... + \alpha_n\Psi_n(x,t)$$

é uma solução desta equação. Com base na hipótese de indução, devemos mostrar que

$$\Psi^{(n+1)} = \alpha_1\Psi_1(x,t) + \alpha_2\Psi_2(x,t) + ... + \alpha_n\Psi_n(x,t) + \alpha_{n+1}\Psi_{n+1}(x,t),$$

também satisfaz à Equação de Schrödinger. A fim de simplificar a notação, definimos

$$\Psi^{(n+1)} = \Psi^{(n)} + \alpha_{n+1}\Psi_{n+1}(x,t).$$

Assim, obtemos:

$$\begin{aligned}
-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi^{(n+1)}}{\partial x^2} + V\Psi^{(n+1)} - i\hbar\frac{\partial\Psi^{(n+1)}}{\partial t} &= -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\Psi^{(n)} + \alpha_{n+1}\Psi_{n+1}) \\
&\quad +V(\Psi^{(n)} + \alpha_{n+1}\Psi_{n+1}) - i\hbar\frac{\partial}{\partial t}(\Psi^{(n)} + \alpha_{n+1}\Psi_{n+1}) \\
&= -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi^{(n)}}{\partial x^2} - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2(\alpha_{n+1}\Psi_{n+1})}{\partial x^2} + V\Psi^{(n)} + V(\alpha_{n+1}\Psi_{n+1}) \\
&\quad -i\hbar\frac{\partial\Psi^{(n)}}{\partial t} - i\hbar\frac{\partial(\alpha_{n+1}\Psi_{n+1})}{\partial t} \\
&= \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi^{(n)}}{\partial x^2} + V\Psi^{(n)} - i\hbar\frac{\partial\Psi^{(n)}}{\partial t}\right) + \\
&\quad \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2(\alpha_{n+1}\Psi_{n+1})}{\partial x^2} + V(\alpha_{n+1}\Psi_{n+1}) - i\hbar\frac{\partial(\alpha_{n+1}\Psi_{n+1})}{\partial t}\right) \\
&= \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi^{(n)}}{\partial x^2} + V\Psi^{(n)} - i\hbar\frac{\partial\Psi^{(n)}}{\partial t}\right) + \\
&\quad \alpha_{n+1}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi_{n+1}}{\partial x^2} + V\Psi_{n+1} - i\hbar\frac{\partial\Psi_{n+1}}{\partial t}\right) \\
&= (0) + \alpha_{n+1}(0) = 0,
\end{aligned}$$

ou seja, a combinação linear $\Psi^{(n+1)} = \Psi^{(n)} + \alpha_{n+1}\Psi_{n+1}(x,t)$ também é solução da Equação de Schrödinger. Isto completa a nossa demonstração. Portanto, acabamos de provar por indução que a hipótese da linearidade da Equação de Schrödinger é válida para quaisquer soluções $\Psi_1(x,t)$, $\Psi_2(x,t)$,..., $\Psi_n(x,t)$,... desta equação.

4. Comentários finais

Neste artigo, exploramos as relações entre o discreto e o contínuo com ênfase na Física Quântica. Mostramos que a hipótese da linearidade das funções de onda $\Psi(x,t)$ na Equação de Schrödinger pode ser provada através do Princípio da Indução, que é o 3º Axioma de Peano. Este princípio só vale para eventos matemáticos que possuem bijeção com o conjunto dos número naturais, isto é, fenômenos enumeráveis. Por outro lado, foi demonstrado que o conjunto Ω de todas as funções de onda permitidas pela Equação de Schrödinger é não-enumerável, o que significa que não existe uma bijeção entre $\mathbb{N}$ e Ω. Isto se deve ao princípio da superposição, que garante que se $\Psi_n(x,t)$ é uma sequência enumerável de funções de onda que solucionam a equação de Schrödinger para $n \in \mathbb{N}$, então a combinação linear $\sum\alpha_n\Psi_n(x,t)$ também é solução, onde $\alpha_n \in \mathbb{R}$. Portanto, podemos concluir que as funções de onda $\Psi_n(x,t)$ da Mecânica Quântica possuem características discretas, isto é, enumeráveis, quando analisadas isoladamente. No entanto, o conjunto das possibilidades para $\Psi_n(x,t)$ é contínuo, isto é, não-enumerável. Isto reflete um fato muito intrigante do mundo quântico: dependendo da maneira como analisamos os fenômenos neste domínio, podemos observar comportamentos tanto discretos como contínuos. Neste artigo, também demonstramos algo similar para o caso da quantização da energia das ondas eletromagnéticas, em virtude da equação de Planck. Mostramos que cada faixa de frequência do espectro eletromagnético possui um conjunto infinito e enumerável da energia permitida para a onda eletromagnética, onde a frequência da onda permanece fixa. Este conjunto é dado por $\Gamma = \{E = n(h\nu); n \in \mathbb{N}\}$ e possui uma bijeção com $\mathbb{N}$. Isto significa que a energia da onda eletromagnética de cada faixa de frequência do espectro eletromagnético formam um conjunto discreto, ou seja, quantizado. Por outro lado, analisando o espectro eletromagnético em sua totalidade, onde a frequência das radiações $\nu \in \mathbb{R}$ é variável, provamos que o conjunto de todos os níveis de energia permitidos para as ondas eletromagnéticas destas radiações é não-enumerável. Este conjunto é dado por $\Upsilon = \{E = n(h\nu); n \in \mathbb{N}, \nu \in \mathbb{R}\}$ e não possui bijeção com $\mathbb{N}$. Em suma, concluímos que cada faixa de frequência do espectro eletromagnético apresenta um conjunto enumerável de níveis de energia, isto é, estes níveis são discretos. Por outro lado, o espectro eletromagnético em sua totalidade, com todas as suas possibilidades de feixes de radiações, apresenta um conjunto não-enumerável de níveis de energia, isto é, a energia total do espectro eletromagnético é contínua, apesar da mesma ser constituída por infinitos conjuntos discretos de níveis de energia. Desta forma, este artigo nos permite enfatizar de maneira analítica e matemática que os principais paradigmas e contradições da Mecânica Quântica são de fato originados pela dualidade entre o discreto e o contínuo.

Referências

1 BRIN, Michael; STUCK, Garrett. **Introduction to dynamical systems**. Cambridge: Cambridge university press, 2002.

2 LIMA, Elon Lages. **Análise Real**. 12. ed. Rio de Janeiro: IMPA–Projeto Euclides, 2017. v. 1.

3 ________. **Curso de Análise**. 14. ed. Rio de Janeiro: IMPA–Projeto Euclides, 2017. v. 1.

4 RESNICK, Robert; EISBERG, Robert et al. **Quantum physics of atoms, molecules, solids, nuclei, and particles**. New York: Wiley, 1974.