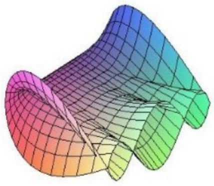

Cálculo Diferencial e Integral:
um kit de sobrevivência
"Sistema de Coordenadas Cilíndricas"

Rafaela Fuzioka
Orientadores: Prof. Dr. Rodrigo Martins. e Prof. Dra. Laís Spada da Fonseca

1 Sistemas de coordenadas

Os sistemas de coordenadas auxiliam na localização de um ponto qualquer no plano ou no espaço. Eles possuem uma grande utilidade na vida dos estudantes, uma vez que apresentam uma vasta aplicação nas mais diferentes áreas. Por exemplo, na Matemática são essenciais para a Geometria e Álgebra, na Física são utilizados para modelar objetos e simular ambientes, como também na Geografia e Navegação, onde permitem localizar de forma precisa os objetos, pessoas e lugares no globo terrestre.

À vista disso, considerando sua grande utilidade, podemos contar com diferentes tipos de sistemas de coordenadas. O mais utilizado e conhecido por nós é o sistema de coordenadas cartesianas. Todavia, podemos citar outros sistemas mais adequados para determinadas situações, dependendo do que se quer trabalhar e quais resultados são esperados, como, por exemplo: sistema de coordenadas esféricas, gráficas, polares, hiperbólicas, parabólicas, cilíndricas. Este último será abordado neste trabalho.

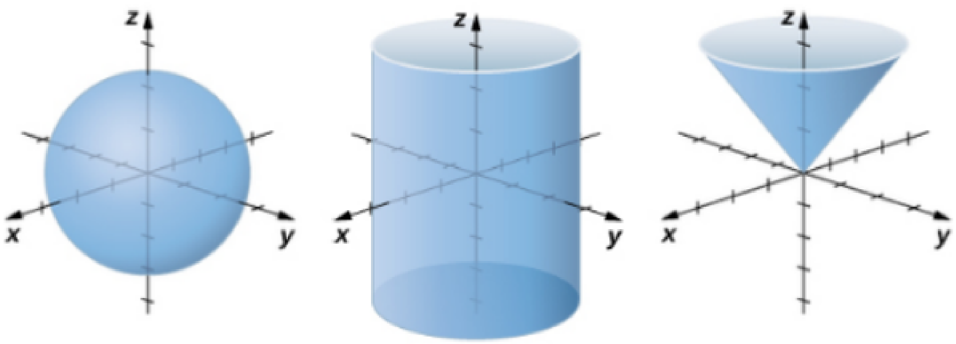

Figura 1: Libretexts - Alguns exemplos de superfícies

A relação das figuras acima com os sistemas de coordenadas ocorre devido ao fato de algumas superfícies específicas serem descritas mais facilmente em alguns dos sistemas do que em outros. Em particular, o sistema de coordenadas cilíndricas é especialmente útil quando a simetria do problema se alinha com a forma cilíndrica.

2 Sistema de Coordenadas Cilíndricas

O sistema de coordenadas cilíndricas é um sistema tridimensional que combina características dos sistemas cartesiano e polar. Pode-se pensar nele como uma evolução do modelo polar adaptado para o espaço tridimensional. Outrossim, ele pode ser usado para simplificar os estudos sobre integração múltipla, além de tornar a descrição de fenômenos com simetria radial mais intuitiva e simplificada. Dentre todas as suas áreas de aplicação, podemos citar sobretudo cenários que envolvem cilindros, como os fluxos de fluidos em tubos, campos eletromagnéticos ao redor de fios e modelagem de estruturas cilíndricas.

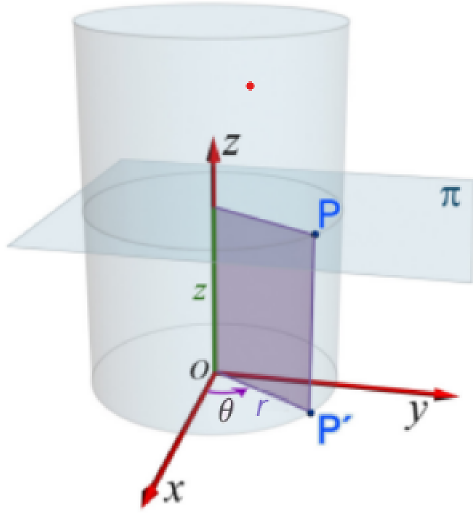

Figura 2: e-Física - Coordenadas cilíndricas

Nesse sistema, um ponto P no espaço tem sua posição descrita por três valores, são eles: $(r,\, \theta,\, z)$, onde as coordenadas r e θ são as coordenadas polares da projeção de P no plano xy (retratada por P') e z é a altura em relação ao eixo Oz (tal como no sistema cartesiano). Vamos relembrar o que são coordenadas polares.

No sistema de coordenadas polares, r representa a distância da origem até P', e θ é o ângulo medido a partir do semi-eixo positivo x e o ponto P'. Assim, se $r > 0$ significa que o ponto P' está localizado a uma distância r da origem, na direção do ângulo θ. Nesse caso, denotaremos $P' = (r, \theta)$. Agora, se $r < 0$, então, o ponto ainda se encontra na mesma linha definida pelo ângulo θ, mas na direção oposta. Dessa forma, $(-r, \theta)$ é o simétrico de (r, θ) em relação ao polo. Logo, podemos reescrever $P' = (-r, \theta)$ como $P' = (r, \theta + \pi)$ com $r > 0$. Por último, quando $r = 0$, o ponto se encontra exatamente na origem, então o ângulo se torna irrelevante e θ pode ser tomado como qualquer.

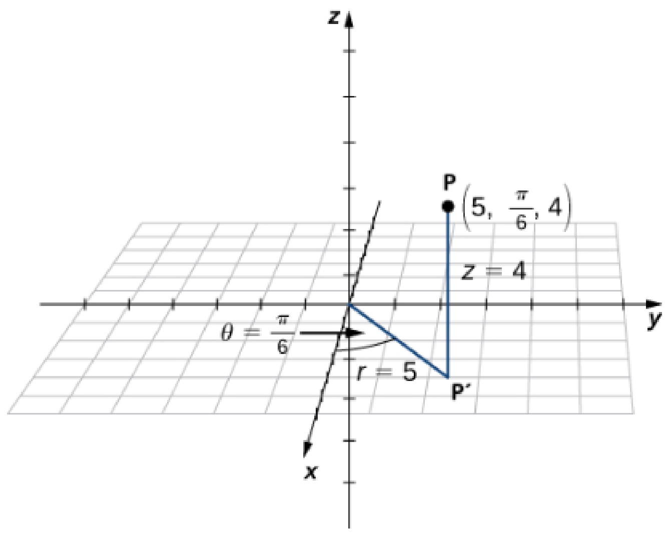

Figura 3: Libretexts - Exemplo das coordenadas cilíndricas de um ponto

3 Relação entre os planos

Podemos estabelecer uma relação entre o sistema de coordenadas cartesiano e o sistema de coordenadas cilíndricas. Dado um ponto com coordenadas cartesianas (x, y, z) e coordenadas cilíndricas (r, θ, z), então:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

No caso em que $r \neq 0$, temos:

$$\begin{cases} r = \pm\sqrt{x^2+y^2} \\ \cos\theta = \pm\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin\theta = \pm\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \tan\theta = \dfrac{y}{x}, se\ x \neq 0 \end{cases}$$

4 Exercícios

Exercício 1: Determine uma equação em coordenadas cilíndricas para o cilindro circular de eixo Oz de equação cartesiana $S : x^2 + y^2 = a^2$, com $a > 0$.

Resolução: Utilizando a equação $r^2 = x^2 + y^2$, obtemos: $r^2 = x^2 + y^2 = a^2$, de onde $r = a$. Logo, uma equação em coordenadas cilíndricas para o cilindro S é $S : r = a$, isto é, $S = \{(a, \theta, z)|\ \theta, z \in \mathbb{R}\}$. Portanto, a simplicidade da equação do cilindro, $r = a$, justifica o nome "coordenadas cilíndricas".

Exercício 2: Seja P=(0,1,2) um ponto em coordenadas cartesianas. Determine suas coordenadas cilíndricas.

Resolução: Temos $x = 0, y = 1\ e\ z = 2$. Através da equação $r^2 = x^2 + y^2$, obtemos:

$$r^2 = 0^2 + 1^2$$

$$r^2 = 1$$

de onde $r = \pm 1$. Também, pelas equações, temos que $\cos\theta = \dfrac{x}{r} = 0$ e $\sin\theta = \dfrac{y}{r} = \pm 1$. Assim, $\theta = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$. Portanto,
$P = \left(1, \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, 2\right)$ ou $P = \left(-1, \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, 2\right), k \in \mathbb{Z}$, é o ponto dado em coordenadas cilíndricas.

Exercício 3: Determine as coordenadas cartesianas do ponto P= (1,0,2) dado em coordenadas cilíndricas.

Resolução: Como $r = 1, \theta = 0$ e z = 2, temos que $x = r\cos\theta = 1, y = r\sin\theta = 0$ e z = 2 são as coordenadas cartesianas de P.

Exercício 4: Determine a equação em coordenadas cartesianas da superfície S : $r = 2a\ \cos\theta, a > 0$ dada em coordenadas cilíndricas.

Resolução: Sendo $r = \pm\sqrt{x^2+y^2}$ e $\cos\theta = \pm\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, temos que:

$$\pm\sqrt{x^2+y^2} = 2a\frac{x}{\pm\sqrt{x^2+y^2}} \Leftrightarrow$$

$$x^2 + y^2 = 2ax \Leftrightarrow$$

$$(x-a)^2 + y^2 = a^2,$$

que é uma equação cartesiana para S. Portanto, S é um cilindro circular de eixo r = $\{(a, 0, 0) + t(0, 0, 1)|\ t \in \mathbb{R}\}$ paralelo ao eixo Oz.

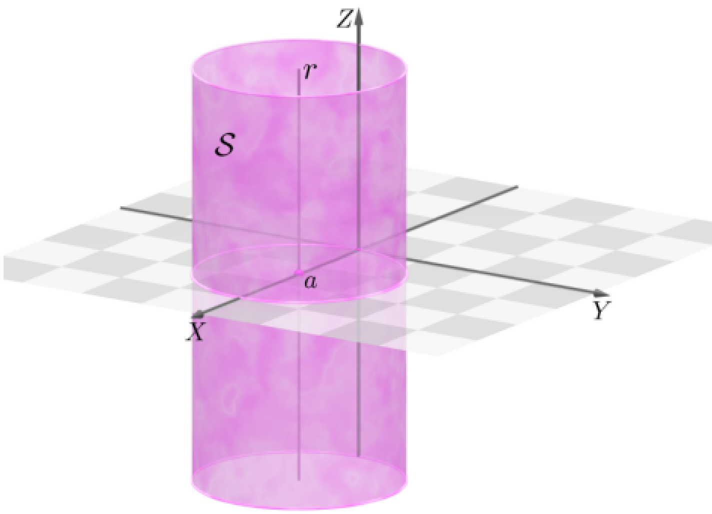

Figura 4: Superfície $S : r = 2a\cos\theta$

Exercício 5: Faça um esboço e dê uma parametrização em coordenadas cartesianas da superfície $S : r = e^{\theta}$ em coordenadas cilíndricas.

Resolução: Como $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$, temos que:

$$S : \begin{cases} x(\theta, z) = e^{\theta}\cos\theta \\ y(\theta, z) = e^{\theta}\sin\theta, \quad \theta, z \in \mathbb{R} \\ z(\theta, z) = z \end{cases}$$

é uma parametrização de S, um cilindro de geratrizes paralelas ao vetor $\vec{v} = (0, 0, 1)$ que possui a espiral

$$\gamma : \begin{cases} x(\theta) = e^{\theta}\cos\theta \\ y(\theta) = e^{\theta}\sin\theta, \quad \theta \in \mathbb{R} \\ z(\theta) = 0, \end{cases}$$

como uma de suas diretrizes.

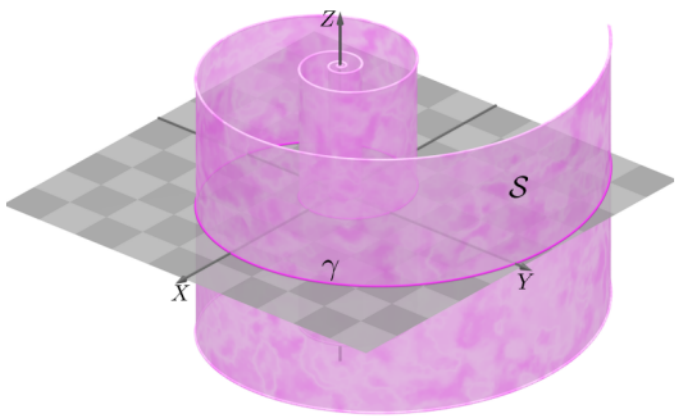

Figura 5: Superfície $S : r = e^{\theta}$

Referências

[1] MADALENA, Thiago.**O Sistema de Coordenadas Polares e sua inserção no ensino básico atráves de projetos**. Universidade Estadual de Mato Grosso - UFMS. 2014. Disponível em: https://repositorio.ufms.br/handle/123456789/2331. Acesso em: 10 dez. 2024

[2] VARGAS, Edson. **Coordenadas Cilíndricas e Esféricas**. Universidade de São Paulo - USP. Disponível em: https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/5231175/mod$_folder/content/0/Cilindricas.pdf?forcedownload = 1Acessoem : 15dez.$2024.

[3] FRENSEL, Kátia; DELGADO, J. **Geometria Analítica II - Aula 11**. Niterói: Universidade Federal Fluminense. Disponível em: https://www.professores.uff.br/katiafrensel/wpcontent/uploads/sites/115/2017/08/ga2-aula2.pdf. Acesso em: 04 jan. 2025.

[4] ARANHA, Cármen. **Integrais triplas em Coordenadas Cilíndricas**. Disponível em: https://slideplayer.com.br/slide/11947414/ Acesso em: 19 jan. 2025.

[5] **INSTITUTO DE FÍSICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO. 02 – Outras Coordenadas: Exercícios Resolvidos**. São Paulo: IFUSP, [s.d.]. Disponível em: https://efisica2.if.usp.br/pluginfile.php/1646/mod$_resource/content/1/F1_02_exerciciosresolvidos.pdf.Acessoem : 19jan.$2025.

[6] LIBRETEXTS. **Coordenadas cilíndricas e esféricas.** Disponível em: https://query.libretexts.org/Idioma$_Portugues/Livro$