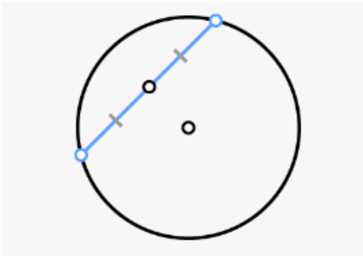
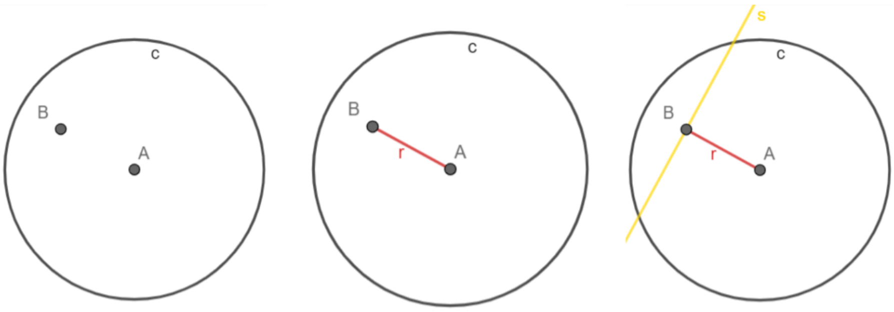
3 Fase Gama γ

3.1 Ponto Médio da Corda

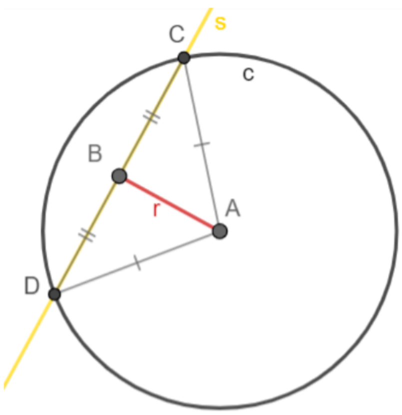
Objetivo: Construa uma corda cujo ponto médio é indicado.



Construção estrelas 2L e 4E: Trace o segmento determinado pelos pontos A e B.Então, esboce a reta s, perpendicular ao segmento AB, passando pelo ponto B. Por fim, marque os pontos C e D de interseção da reta s com a circunferência. A corda CD tem como ponto médio o ponto B.

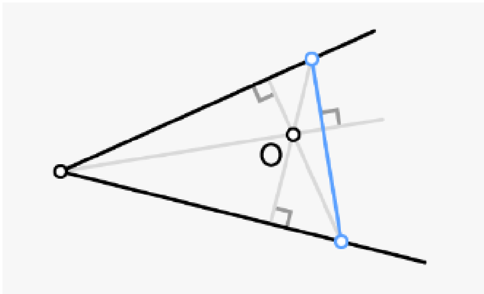


Demonstração: Veja que $AC \equiv AD$, pois ambos são raios da circunferência c. Além disso, uma vez que $AC \equiv AD$,AB é lado comum, e o ângulo $\angle ABC \equiv \angle ABD = 90°$, pelo caso LLAo (lado, lado e ângulo oposto), temos que $\Delta ABC \equiv \Delta ABD$.Portanto, $CB \equiv BD$ e B é ponto médio da corda CD.

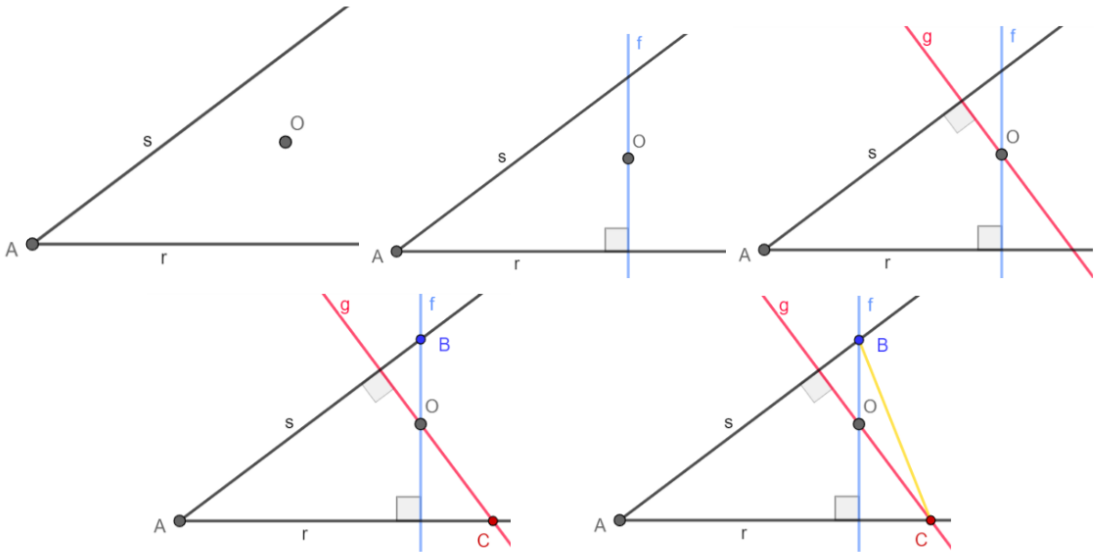


3.2 Triângulo por Ângulo e Ortocentro

Objetivo: Construa um segmento que conecta os lados do ângulo para obter um triângulo cujo ortocentro fique no ponto O.



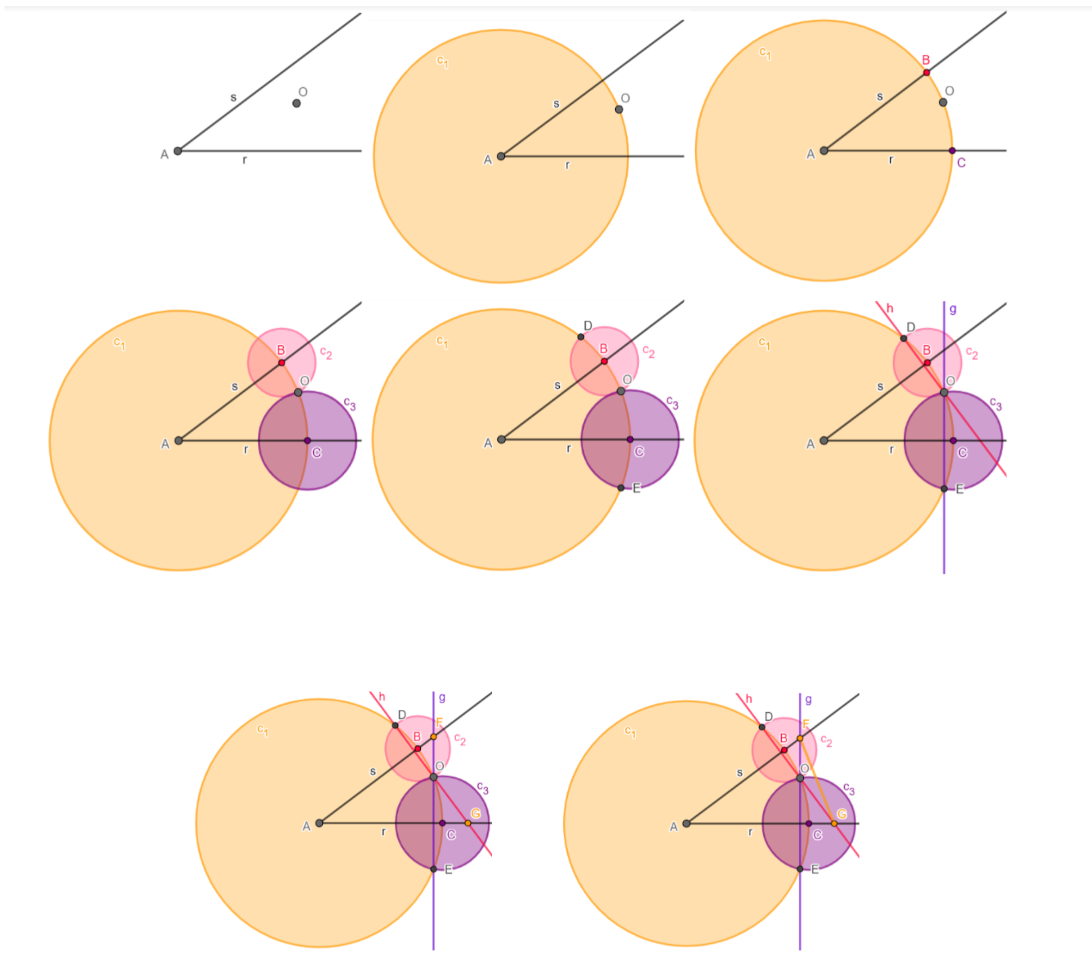
Construção estrela 3L: Construa a perpendicular f da reta r que passe por O. Trace a perpendicular g da reta s que passe por O. Marque os ponto de intersecção B entre as retas s e f e C entre as retas r e g. Trace o segmento BC. Assim, construímos o triângulo ABC cujo ponto O é ortocentro. Observe a construção ilustrada, passo a passo, a seguir.



Demonstração: Queremos mostrar que a partir da construção apresentada acima o ponto O é ortocentro do triângulo ABC. Por propriedade, o ortocentro é a interseção das alturas do triângulo. Por construção, temos que a reta g é perpendicular de s que passa por O e assim, g é altura do ponto C e também temos que a reta f é perpendicular de r que passa por O e assim, f é altura do ponto B. Assim, o ponto de interseção O de f e g é ortocentro do triângulo.

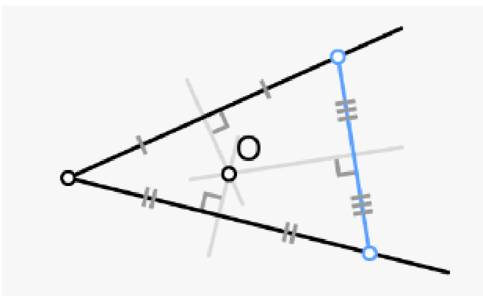
Observação: As justificativas dos objetivos $3L$ e $6E$ são análogas pois em uma usamos a ferramenta "perpendicular" enquanto a outra construímos as perpendiculares conforme foi feito e justificado na fase 2.6 Trace uma Perpendicular.

Construção estrela $6E$**:**Trace uma circunferência c_1 de centro em A e raio AO. Marque os pontos de intersecção B entre c_1 e a semirreta s e o ponto C entre c_1 e a semirreta r; Trace uma circunferência $c2$ de centro em B e raio BO e uma circunferência c_3 de centro em C e raio CO. Marque os pontos de intersecção D entre c_1 e c_2 e o ponto E entre c_1 e c_3. Trace uma reta g que passa pelos pontos O e E e uma reta h que passa pelos pontos D e O. Marque os pontos de intersecção F entre as retas s e g e o ponto G entre as retas r e h. Trace o segmento FG. Assim, construímos o triângulo AFG cujo ponto O é ortocentro. Observe a construção ilustrada, passo a passo, a seguir.

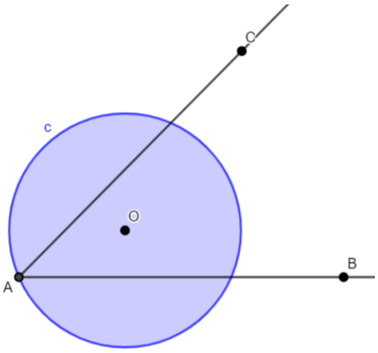


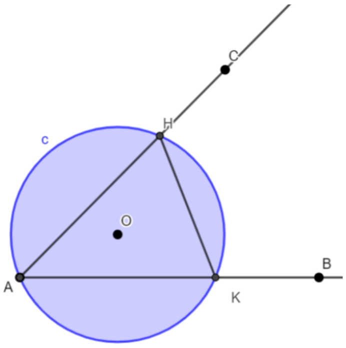
3.3 Interseção de Mediatrizes

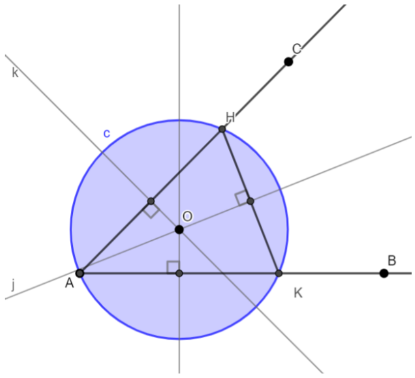
Objetivo: Construa um segmento que conecta os lados do ângulo para obter um triângulo cujas mediatrizes se interceptem no ponto O.



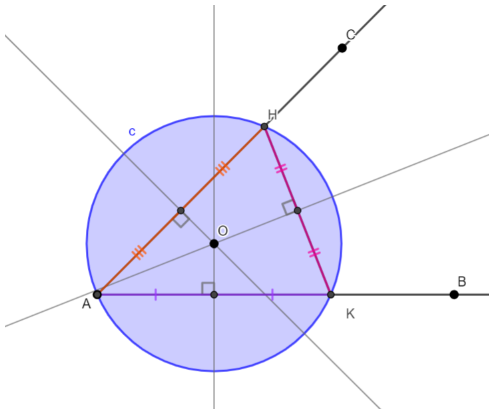
Construção estrelas 2L e 2E: Trace uma circunferência c com centro em O e raio OA. Então, encontre os pontos H e K, de intersecção entre a circunferência c e as semirretas AC e AB.





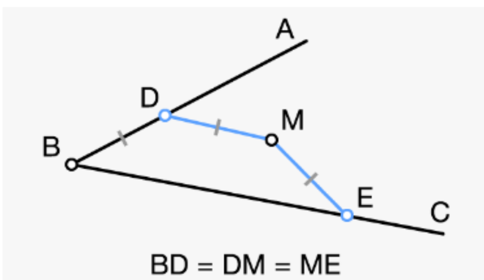


Demonstração: Observe que o triângulo AHK está inscrito na circunferência c. Dessa forma, o centro O é o circuncentro do triângulo AHK. Dessa forma, pela propriedade do circuncentro, as mediatrizes dos lados AH, AK e HK se interceptam no ponto O.

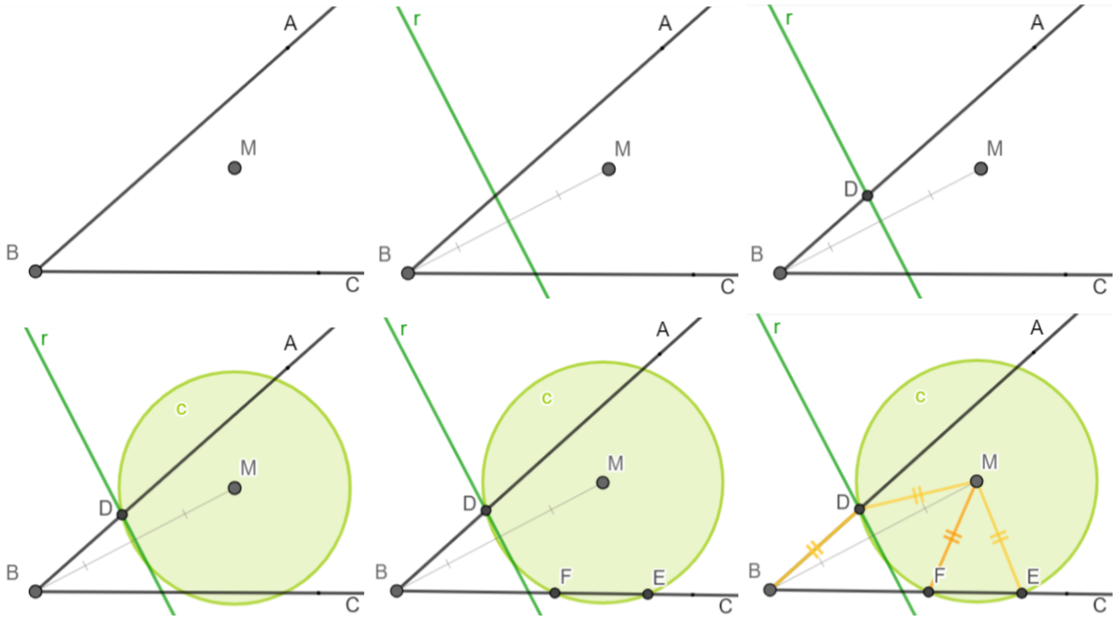


3.4 Três Segmentos Iguais

Objetivo: Dado um ângulo ABC e um ponto M dentro dele, encontre os pontos D em BA e E em BC e construa os segmentos DM e ME de modo que $BD \equiv DM \equiv ME$.



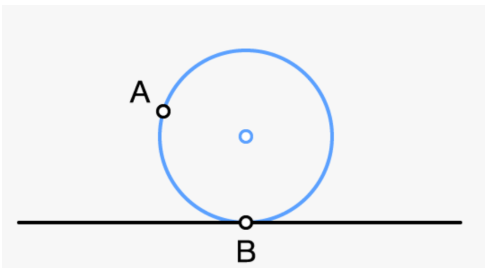
Construção estrelas 4L 6E 2V: Trace a mediatriz do segmento BM. Marque o ponto de intersecção D entre o segmento AB e a reta r. Construa uma circunferência c de centro em M e raio MD. Marque os pontos de intersecção E e F entre a circunferência c e o segmento BC. Trace os segmentos DM, ME e MF. Observe a construção ilustrada, passo a passo, a seguir.



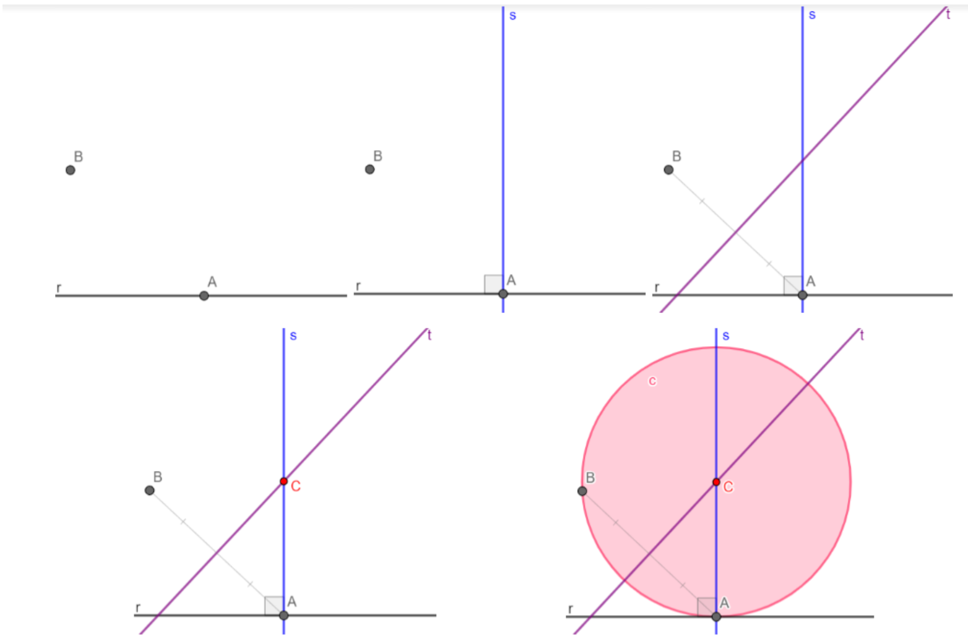
Demonstração: Ao traçar a mediatriz r de BM e marcar o ponto D sendo a interseção de r com a semirreta AB temos que $BD \equiv DM$. Dada a circunferência c de raio DM e centro M marcamos os pontos E e F sendo as interseções de c com a semirreta BC. Assim os segmentos $MD \equiv ME \equiv MF$ pois são raios de c. E como $BD \equiv DM$, por transitividade, $BD \equiv MF$ e $BD \equiv ME$.

3.5 Círculo passando por Ponto Tangente à Linha

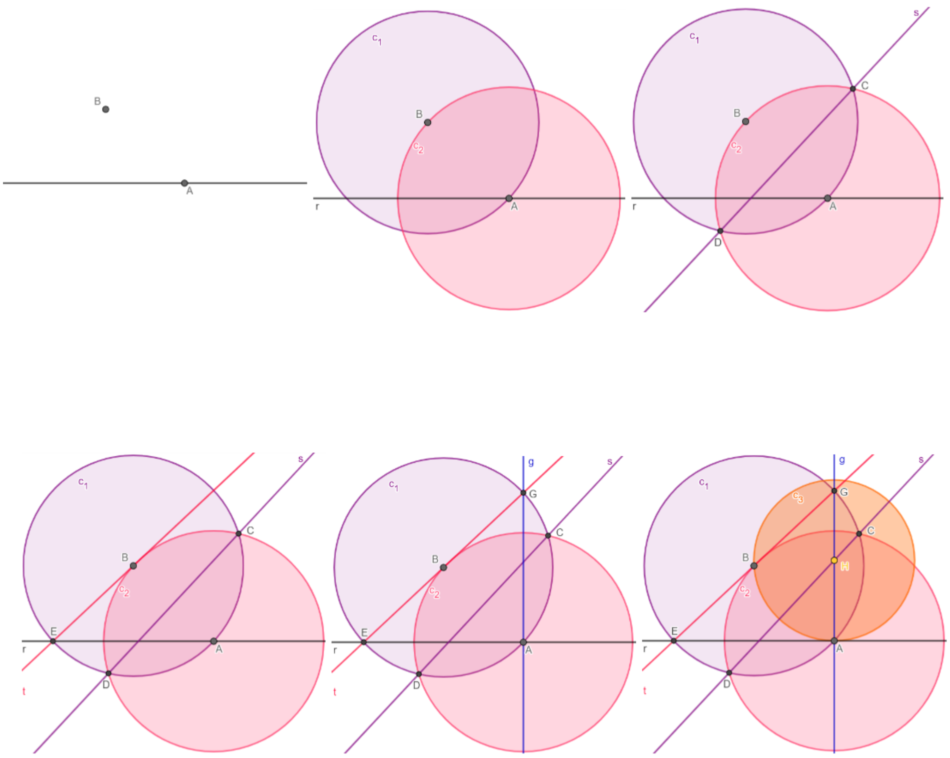
Objetivo: Construa um círculo que passe pelo ponto B e seja tangente à linha indicada no ponto A.



Construção estrela 3L: Construa a perpendicular s da reta r que passe por A. Trace a mediatriz t dos pontos A e B. Marque o ponto de intersecção C entre as retas s e t. Construa uma circunferência c de centro em C e raio CA.



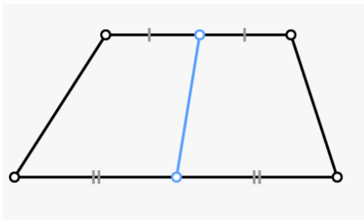
Construção estrela 6E: Construa duas circunferências c_1 de centro em A e raio AB e c_2 de centro em B e raio AB. Marque os pontos de intersecção C e D entre as circunferências c_1 e c_2 e trace a reta s que passa por C e D. Marque o ponto de intersecção E entre c_1 e r e trace a reta t que passa por B e E. Marque o ponto de intersecção G entre c_1 e t e trace a reta g que passa por A e G. Marque o ponto de intersecção H entre s e g e construa a circunferência c_3 de centro em H e raio HA. Observe a construção ilustrada, passo a passo, a seguir.



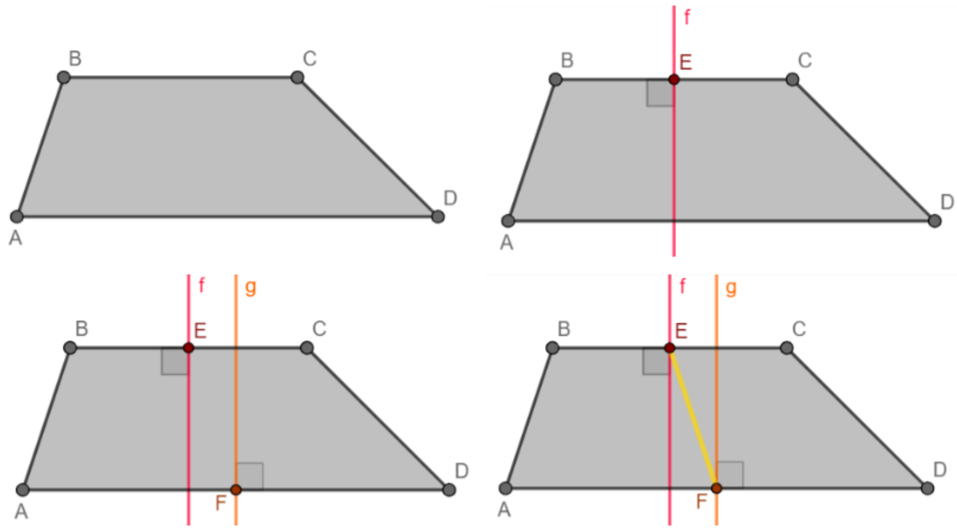
Demonstração: Ao traçarmos a reta t note que o ângulo EBG mede 180° e é ângulo central da circunferência e como ângulo EAG é inscrito na circunferência c_1 temos que EAG mede metade do ângulo central, ou seja, 90°. Assim temos que a reta g é perpendicular a r . Tome o ponto H sendo a interseção de s e r e trace a circunferência de centro H e raio HA. Como H pertence a s, H é equidistante de A e B, logo, essa circunferência contém A e B. Por proposição, uma reta tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio. Como A pertence a r e AH pertence a g e é raio de c_3 temos que c_3 tangencia r no ponto A.

3.6 Ponto Médio da Bases do Trapézio

Objetivo: Construa uma linha que passa pelos pontos médios das bases do trapézio.



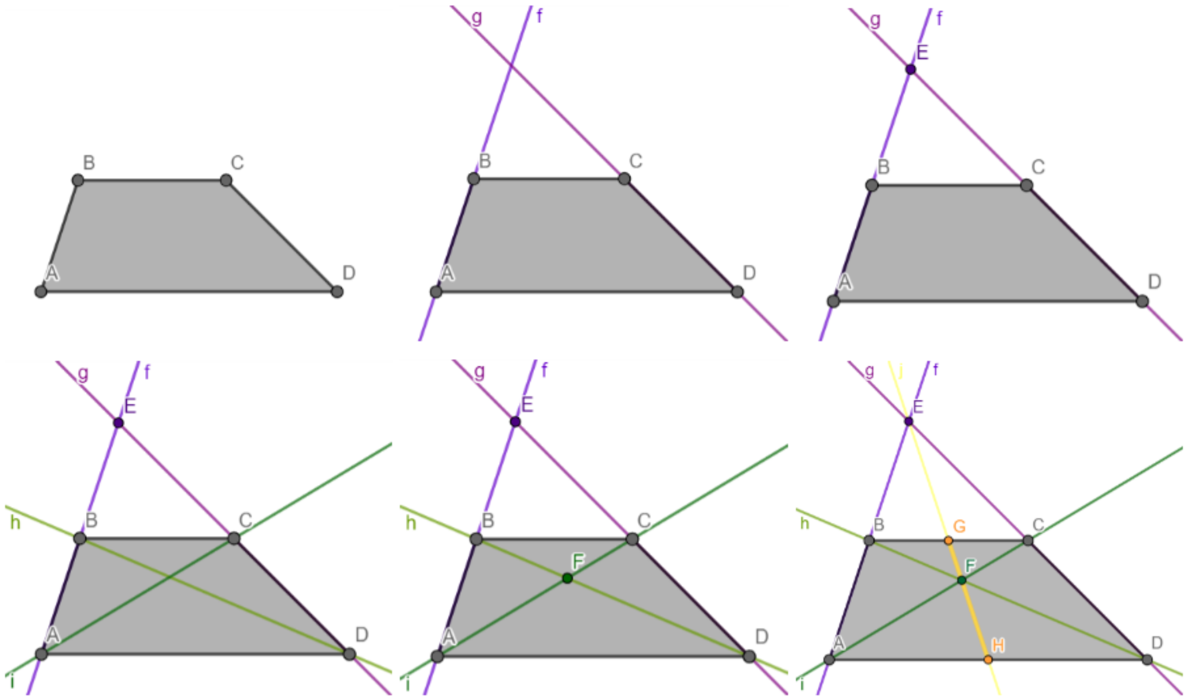
Construção estrela 3L: Trace a mediatriz f do segmento BC e marque o ponto de interseção E entre f e BC. Trace a mediatriz g do segmento AD e marque o ponto de interseção F entre g e AD. Assim, temos uma linha que passa pelos pontos médios das bases do trapézio.



Demonstração: Como mostrado na Fase 1.2. temos que a mediatriz f corta o segmento BC de forma que $BE \equiv EC$, assim temos que o ponto E é o ponto médio do segmento. Da mesma forma temos que a mediatriz g corta o segmento AD de forma que $AF \equiv FD$, assim temos que o ponto F é o ponto médio do segmento. Desta forma ao construir uma reta que passe por E e F, teremos uma linha que passa pelos pontos médios das bases do trapézio.

Construção estrela 5E: Trace duas retas f e g que passe pelos segmentos AB e CD, respectivamente. Marque o ponto de interseção E entre f e g. Trace duas retas h e

i que passe pelas diagonais BD e AC do trapézio. Marque o ponto de interseção F entre h e i. Trace a reta j que passa pelos pontos E e F.



Demonstração: Assumiremos que os triângulos AFH e HFD tem a mesma área, assim os triângulos terão a mesma altura, pela fórmula da área de um triângulo temos que

$$A_{AFG} = A_{HFD} \Rightarrow \frac{b_1 \cdot h}{2} = \frac{b_2 \cdot h}{2} \Rightarrow b_1 \cdot h = b_2 \cdot h$$

Como ambos têm a mesma altura

$$b_1 \cdot h = b_2 \cdot h \Rightarrow b1 = b2$$

Ou seja, $AH \equiv HD$. Novamente, assumimos que os triângulos BGF e GCF têm a mesma área, assim os triângulos terão a mesma altura, pela fórmula da área de um triângulo temos que

$$A_{BGF} = A_{GCF} \Rightarrow \frac{b_3 \cdot h}{2} = \frac{b_4 \cdot h}{2} \Rightarrow b_3 \cdot h = b_4 \cdot h$$

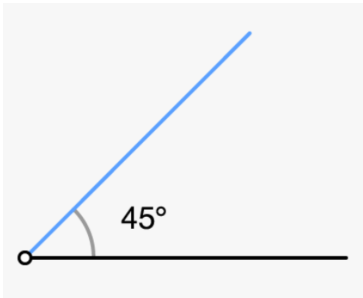
Como ambos têm a mesma altura

$$b_3 \cdot h = b_4 \cdot h \Rightarrow b_3 = b_4$$

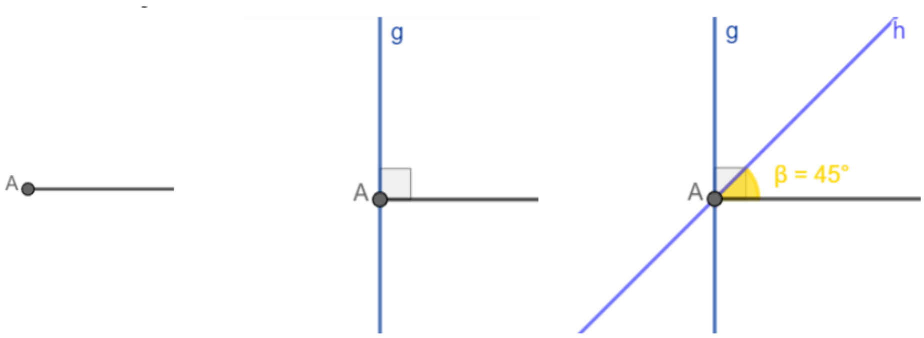
Ou seja, $BG \equiv GC$. Portanto, a reta j intercepta as bases do trapézio em seus pontos médios.

3.7 Ângulo de 45°

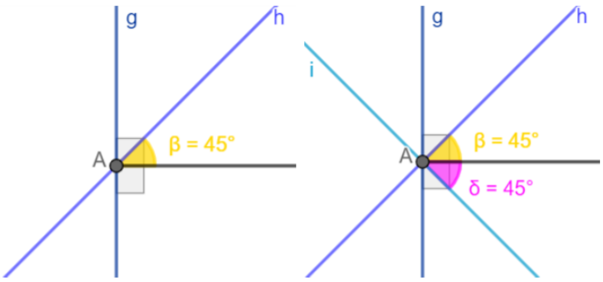
Objetivo: Construa um ângulo de 45° com o lado indicado.



Construção estrela 2L: Trace a perpendicular g da semirreta de origem em A que passe por A, assim teremos um ângulo de 90° no lado superior da semirreta. Trace a bissetriz desse ângulo e teremos um ângulo de 45°. Observe a construção ilustrada, passo a passo, a seguir.



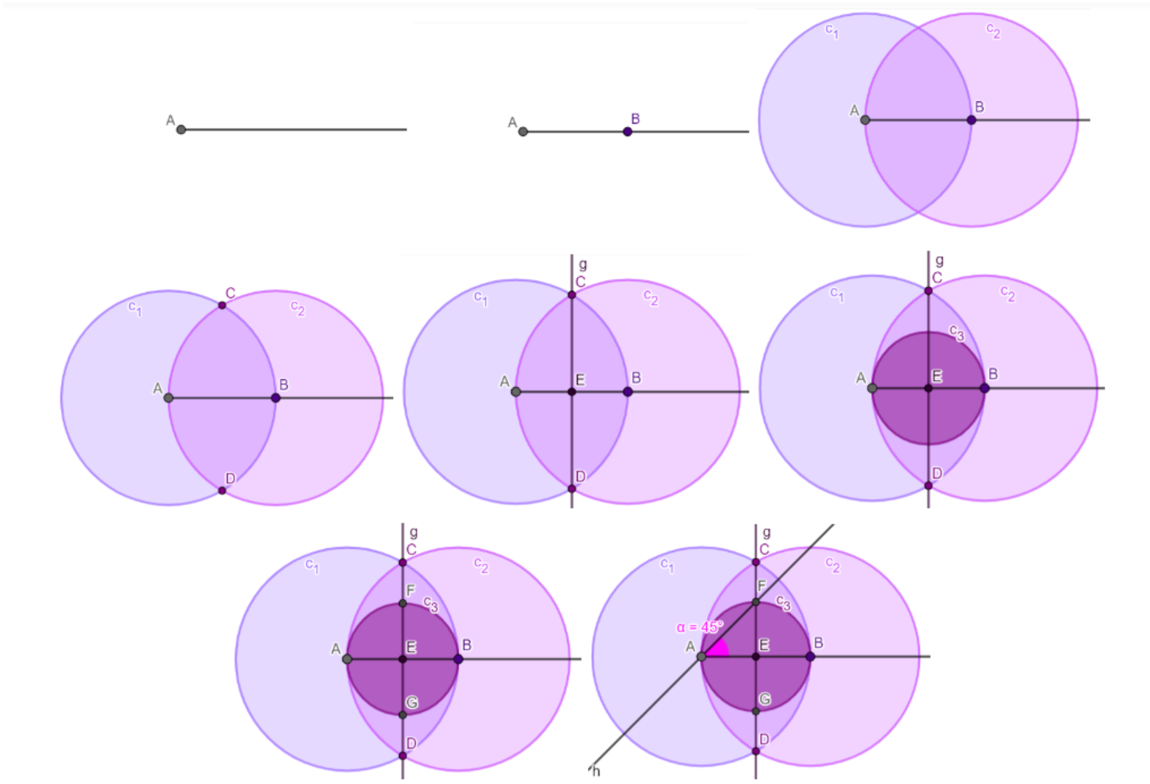
Construção estrelas 2L e 2V: Ao traçar a perpendicular g da semirreta de origem em A que passe por A, assim teremos outro ângulo de 90° no lado inferior da semirreta. Trace a bissetriz desse ângulo e teremos outro ângulo de 45°.



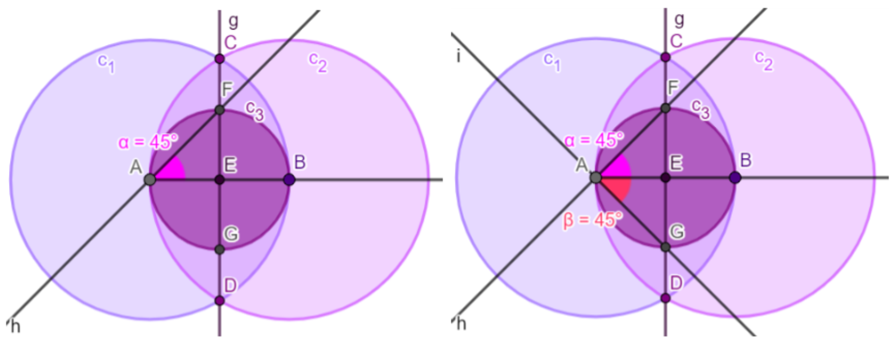
Demonstração: Ao traçarmos a perpendicular g da semirreta de origem em A que passe por A, assim teremos um ângulo de 90°. Desta forma, ao traçarmos a bissetriz desse ângulo teremos um ângulo de 45° pois a bissetriz divide um ângulo ao meio. A justificativa para o objetivo $2V$ é análoga.

Construção estrela 5E: Marque um ponto B sobre a semirreta de origem em A. Construa duas circunferências c_1 de centro em A e raio AB e c_2 de centro em B e raio BA. Marque os pontos de intersecção C e D entre c_1 e c_2. Trace uma reta g que passa pelos pontos C e D e marque o ponto de interseção E entre g e AB. Construa uma circunferência c_3 centrada em E e com raio EA. Marque os pontos de intersecção F e G

entre c_3 e g. Trace a reta h que passa pelos pontos F e A. Assim, temos um ângulo de 45°.



Construção estrelas 5E e 2V: Trace a reta i que passa pelos pontos A e G. Assim, temos outro ângulo de 45°.



Demonstração: A partir da construção feita acima, temos que a reta g é mediatriz do segmento AB e assim temos que a mediatriz g corta o segmento AB de forma que $AE \equiv EB$, assim temos que o ponto E é o ponto médio do segmento (Fase 1.2.). Ao construirmos a circunferência c_3 centrada em E e de raio AB e marcar os pontos de intersecção F e G entre c_3 e g temos que $EA \equiv EB \equiv EF \equiv EG$. Além disso, temos que $F \in g$ e assim $A\hat{E}F = 90°$ (1). Desta forma, o triângulo AEF é isósceles e os ângulos de sua base são congruentes, i.e., $F\hat{A}E \equiv A\hat{F}E$ (2). Sabemos que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°, assim:

$$F\hat{A}E + A\hat{F}E + A\hat{E}F = 180°$$

E utilizando (1):

$$F\hat{A}E + A\hat{F}E + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow F\hat{A}E + A\hat{F}E = 90^\circ$$

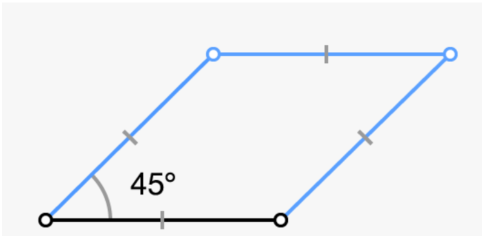
Por (2), temos:

$$2F\hat{A}E = 90^\circ \Rightarrow F\hat{A}E = 45^\circ$$

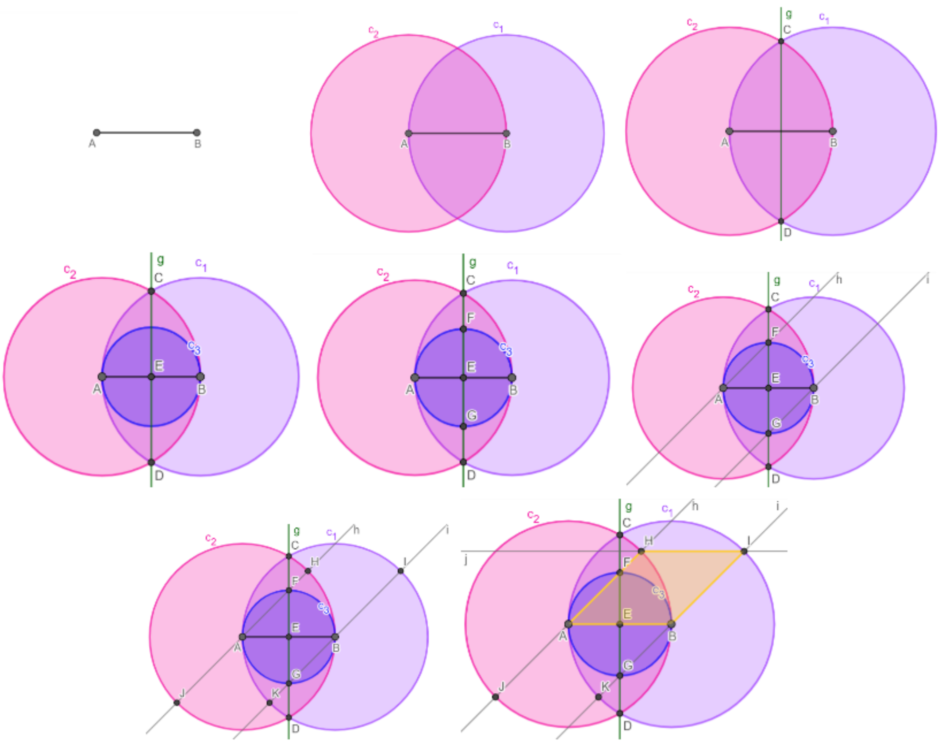
Logo, $F\hat{A}E = A\hat{F}E = 45^\circ$. A justificativa para o objetivo $2V$ é análoga.

3.8 Losango

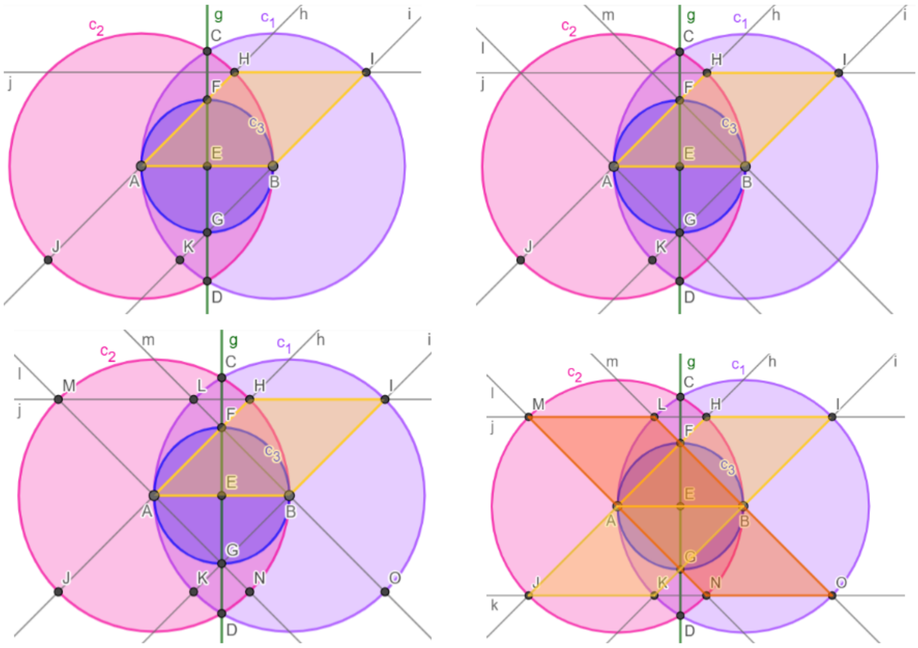
Objetivo: Construa um losango com o lado indicado e um ângulo de 45° em um vértice.



Construção estrelas 7E: Construa duas circunferências c_1 de centro em B e raio BA e c_2 de centro em A e raio AB. Marque os pontos de intersecção C e D entre c_1 e c_2 e trace uma reta g que passa pelos pontos C e D. Marque o ponto de interseção E entre g e AB e construa uma circunferência c_3 centrada em E e com raio EA. Marque os pontos de intersecção F e G entre c_3 e g. Trace as retas h que passa pelos pontos A e F e i que passa pelos pontos G e B. Marque os pontos de intersecção H e J entre c_2 e h e I e K entre c_1 e i. Trace a reta j que passa pelos pontos H e I. Assim, temos um losango e um ângulo de 45° em um vértice.



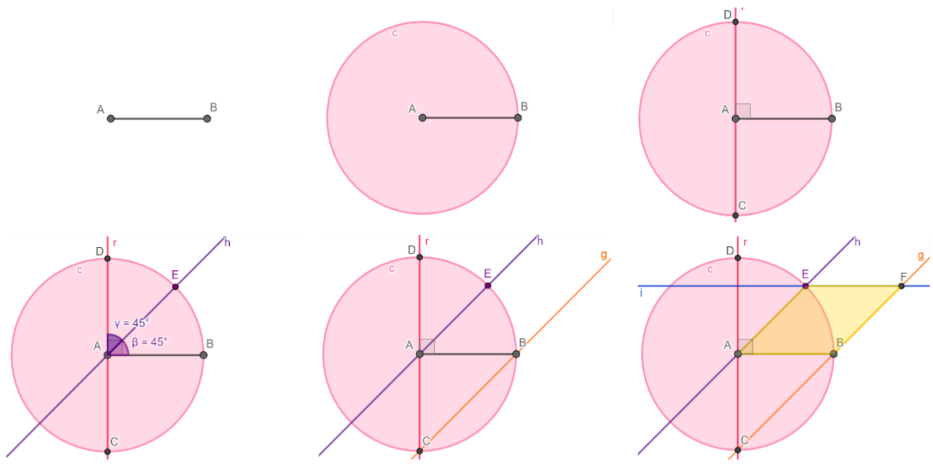
Construção estrelas 4V: Trace a reta l que passa pelos pontos A e G e a reta m que passa pelos pontos F e B. Marque os pontos de intersecção M e N entre c_2 e l e L e O entre c_1 e m. Trace a reta k que passa pelos pontos J e K. Assim, temos outros três losangos com ângulos de 45° em um vértice.



Demonstração: Temos que $AE \equiv EB \equiv EF \equiv EG$ pois são raios da circunferência c_3. Assim como $G, F \in g$ temos que $AB \equiv GF$ e se interceptam em E que é também ponto médio de ambos os segmentos. Desta forma, temos que $AFBG$ é um quadrado e $AF \parallel GB$, assim, como $AF \subset h$ e $GB \subset i$ temos que $h \parallel i$. Veja que os pontos F, E e G estão na reta g, então o ângulo $F\hat{E}G$ mede 180° e o ângulo $F\hat{A}G$ é o ângulo inscrito que corresponde ao arco do ângulo $F\hat{E}G$, então $FAG = FEG2 = 90°$. Repare também que o triângulo FAG é isósceles e que, por propriedade desse, sabemos que a mediatriz é igual a altura e a bissetriz, ou seja, o segmento AE é bissetriz do ângulo $F\hat{A}G$. Assim, $F\hat{A}E = \dfrac{F\hat{A}G}{2} = 45°$. Note que $ABA \equiv HBI$ pois são raios das circunferências c_1 e c_2(ambas de raio AB). Por proposição, se tivermos dois lados paralelos e congruentes, então é um paralelogramo. Assim, já sabemos que $h \parallel i$ e os segmentos $AH \subset h$ e $BI \subset i$ então $AH \parallel BI$. Temos que $AH \equiv AB$ pois são raios de c_2 , $AE \equiv BI$ e $AB \equiv HI$ pois $h \parallel i$ e $j \parallel AB$, assim $AE \equiv AB \equiv HI \equiv BI$. Portanto, $AHIB$ é um losango com um ângulo de 45° em $H\hat{A}B$. A justificativa para o objetivo $4V$ é análoga.

Construção estrelas 5L: Construa uma circunferência c centrada em A e com raio AB. Trace a perpendicular r de AB que passe por A, assim teremos um ângulo de 90° no lado superior de AB e marque os pontos de intersecção C e D entre c e r. Trace a bissetriz h desse ângulo e marque o ponto de intersecção E entre c e h. Trace a reta g que passa pelos pontos C e B. Trace a perpendicular i de r que passe por E e marque o ponto de interseção F entre g e i. Assim, temos o losango $AEFB$ com um ângulo de 45° em um vértice. Observe a construção ilustrada, passo a passo, a seguir.

Demonstração: Por construção, temos que o segmento AB é perpendicular a reta g, assim como a reta i que contém os pontos E e F. Desta forma, i é paralelo a AB. Veja que os pontos C, A e D estão na reta r, então o ângulo $C\hat{A}D$ mede 180° e o ângulo $C\hat{B}D$ é o ângulo inscrito que corresponde ao arco do ângulo $C\hat{A}D$, então $C\hat{B}D = C\hat{A}D2 = 90°$



(1). Agora, note que AB é altura do triângulo DBC e que $AD \equiv AC$ pois são raios da circunferência c, desta forma temos que o triângulo DBC é isósceles, assim $ACB \equiv ADB$ (2). Sabemos que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°, assim:

$$A\hat{C}B + A\hat{D}B + C\hat{B}D = 180^\circ \Rightarrow A\hat{C}B + A\hat{D}B = 90^\circ$$

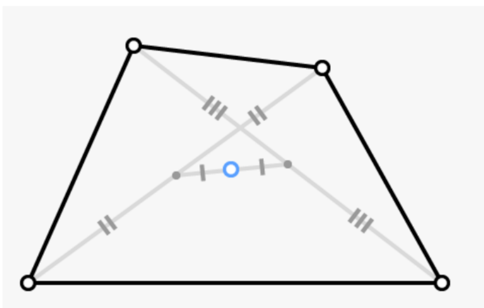
Por (2):

$$2A\hat{C}B = 90^\circ A\hat{C}B = 45^\circ$$

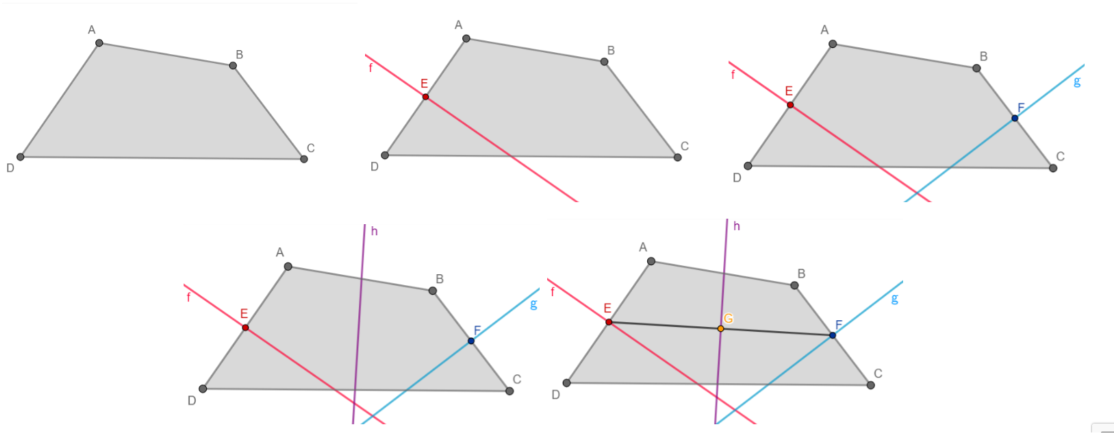
Logo, $A\hat{C}B = A\hat{D}B = 45^\circ(3)$. Por construção, temos que a reta h é bissetriz do ângulo $D\hat{A}B$, assim $D\hat{A}E = E\hat{A}B = 45^\circ$ (4). Por (3) e (4) temos que $A\hat{C}B \equiv A\hat{D}B \equiv D\hat{A}E \equiv A\hat{D}B$ e medem 45°. Desta forma temos que $h \parallel g$ pois os ângulos $D\hat{A}E$ e $A\hat{C}B$ são correspondentes. Temos que $AE \equiv AB$ pois são raios de c , $AE \equiv BF$ e $AB \equiv EF$ pois $h \parallel g$ e $i \parallel AB$, assim $AE \equiv AB \equiv EF \equiv BF$. Portanto, $AEFB$ é um losango com um ângulo de 45° em $E\hat{A}B$.

3.9 Círculo passando por Ponto Tangente à Linha

Objetivo: Construa o ponto médio do segmento que conecta os pontos médios das diagonais do quadrilátero.



Construção: Construa a mediatriz f dos pontos A e D e marque o ponto de interseção E entre f e AD. Construa a mediatriz g dos pontos B e C e marque o ponto de interseção F entre g e BC. Trace a mediatriz h dos pontos E e F. Trace o segmento EF e marque o ponto de interseção G entre h e EF. Assim, temos o ponto médio G do segmento que conecta os pontos médios das diagonais do quadrilátero. Observe a construção ilustrada, passo a passo, a seguir.



Demonstração: Como mostrado na Fase 1.2. temos que a mediatriz f corta o segmento AD de forma que $DE \equiv EA$, assim temos que o ponto E é o ponto médio do segmento AD. Da mesma forma temos que a mediatriz g corta o segmento BC de forma que $CF \equiv FB$, assim temos que o ponto F é o ponto médio do segmento BC.