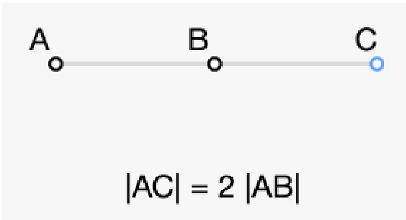
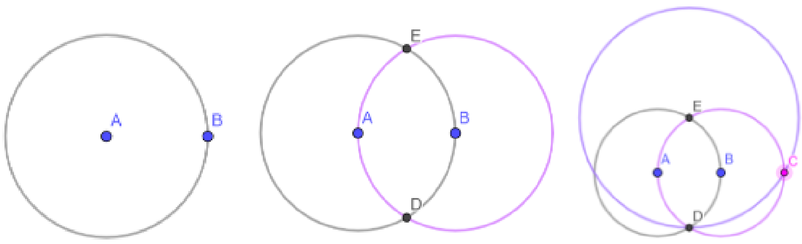
4 Fase Delta δ

4.1 Dobro do segmento

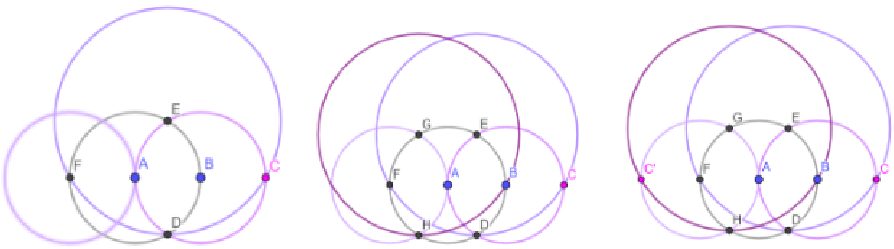
Objetivo: Construa um ponto C na linha AB tal que $|AC| = 2|AB|$ usando apenas um compasso.



Construção estrelas 3L e 3E: Dado os pontos A e B trace uma circunferência c_1 centrada em A e de raio AB. Delimite a circunferência c_2 centrada em B e de raio BA e marque os pontos D e E sendo as interseção de c_1 e c_2. Trace uma circunferência c_3 centrada em E e de raio ED. Marque o ponto C sendo a interseção de c_1 e c_3.



Construção estrela 2V: Marque o ponto F sendo a interseção de c_3 e c_1. Trace a circunferência c_4 centrada em F de raio FA. Marque os pontos G e H sendo as interseções de c_4 e c_1. Trace a circunferência c_5 centrada em G de raio GH. Marque o ponto C' sendo a interseção de c_4 e c_5.



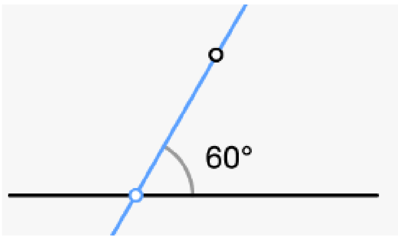
Demonstração: Dados os pontos A e B e a construção acima note que ao traçar c_3 , tomar o ponto de interseção C e traçar a reta que passa por BC teremos A pertencente a essa reta. Além disso, note que AB é raio da circunferência c_2 e BC também é raio. Isso somado com o fato de que ambos pertencem à mesma reta implica que AC é o diâmetro de c_2 e consequentemente,

$$|AC| = |AB| + |AC| = |AB| + |AB| = 2|AB|$$

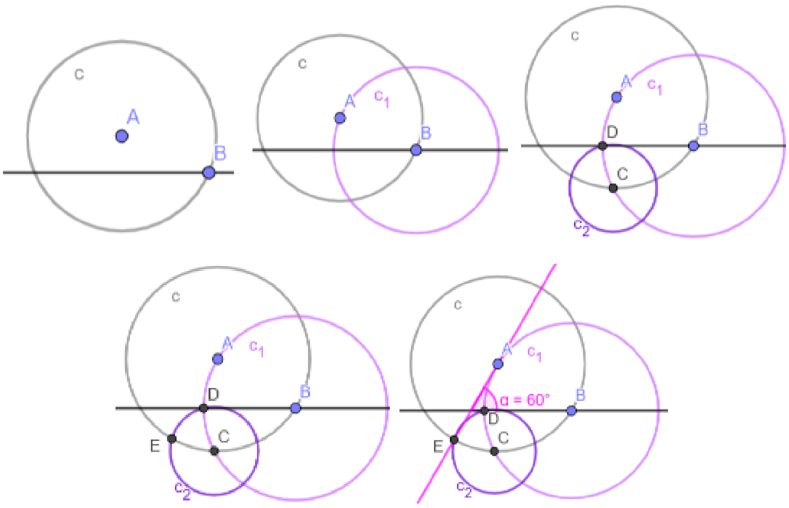
A demonstração para a estrela 2V é análoga.

4.2 Ângulo de 60° - 2

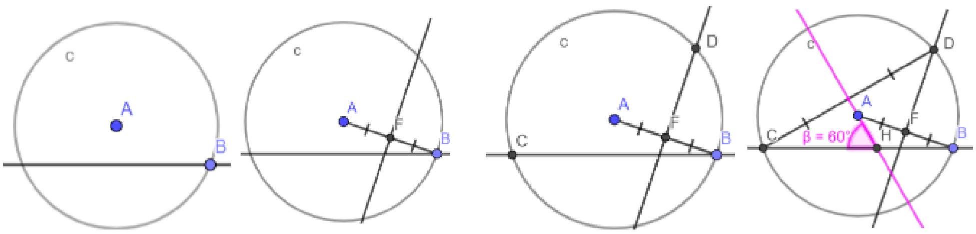
Objetivo: Construa uma reta, passando pelo ponto indicado, que faça ângulo de 60° com a linha indicada.



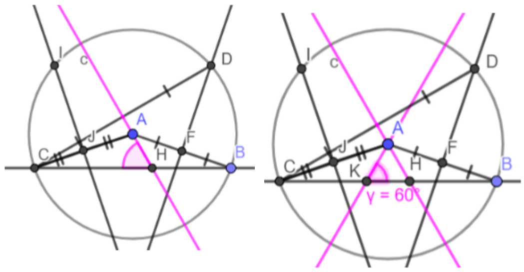
Construção estrela 4E: Dado a reta r e o ponto A não pertencente a r trace uma circunferência c centrada em A que intercepte r em dois pontos e marque um deles sendo o ponto B. Trace uma circunferência c_1 centrada em B de raio BA. Marque o ponto C sendo a interseção de c e c_1 e o ponto D a interseção de r e c_1. Trace c_2 a circunferência centrada em C e de raio CD. Marque o ponto E sendo a interseção de c e c_2. Trace a reta AE.



Construção estrela 3L: Dado a reta r e o ponto A não pertencente a r trace uma circunferência $c$centrada em A que intercepte r em dois pontos, marque um deles sendo o ponto B e o outro o ponto C. Trace m_1 a mediatriz do segmento AB. Marque o ponto D a interseção da circunferência e da mediatriz m_1. Trace m_2 a mediatriz de CD e marque o ponto H sendo a interseção de m_2 e r. Assim, temos um ângulo de 60° entre m_2 e r.



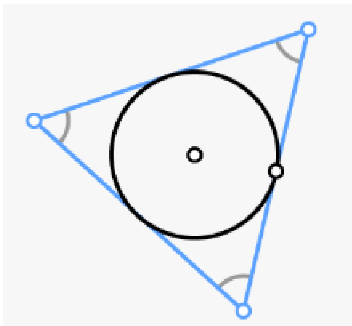
Construção estrela 2V: Continuando a construção acima trace a mediatriz m_3 de CA e marque a interseção de m_3 e c sendo o ponto I. Trace a m_4 mediatriz de IB e marque K sendo a interseção de m_3 e r. Temos que $AKH = 60°$



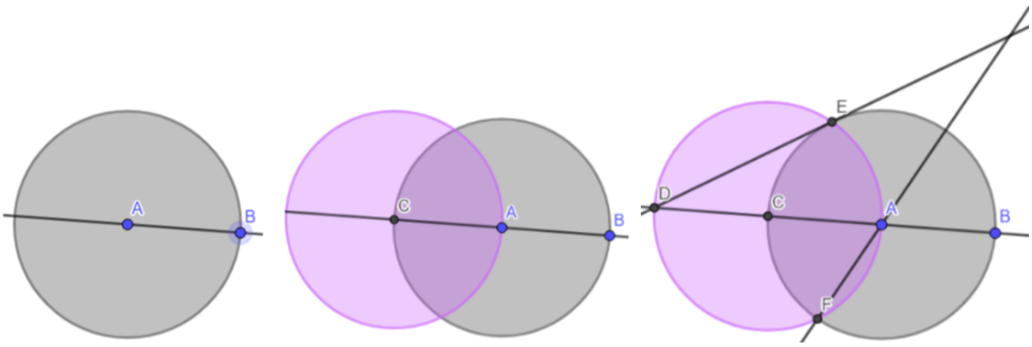
Demonstração: Dado a reta r e o ponto A, onde A não pertence a r, e a construção da Estrela 3L, considere o ponto L sendo a interseção de m_4 e o segmento CD e observe o triângulo LHC, onde, $CHL = 90°$ pois m_4 é mediatriz de CD. Agora olhe os triângulos DLH, que é congruente a CLH, e o outro triângulo ABD (que é equilátero, pois D é equidistante de AB e ao traçar a circunferência centrada em B de raio BA, C pertenceria a ela). Veja que m_1 é mediatriz e como ABD é equilátero, será mediatriz de ADB, assim, $ADF = 30°$,consequentemente, $LDH = 30°$, e, $LCH = 30°$,portanto, $LHC = 60°$.

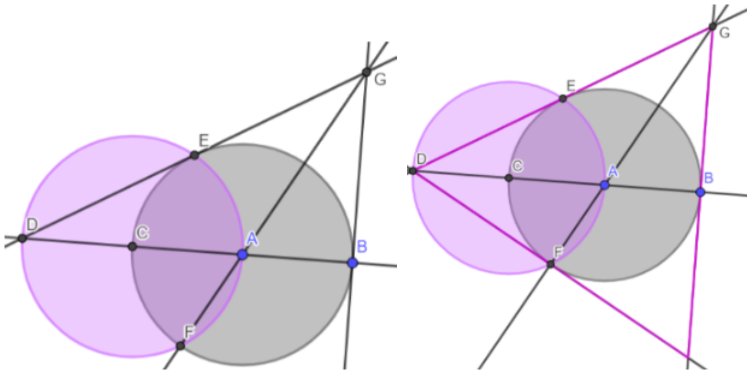
4.3 Triângulo Equilátero Circunscrito

Objetivo: Construa um triângulo equilátero que seja circunscrito em torno do círculo e contenha o ponto indicado.

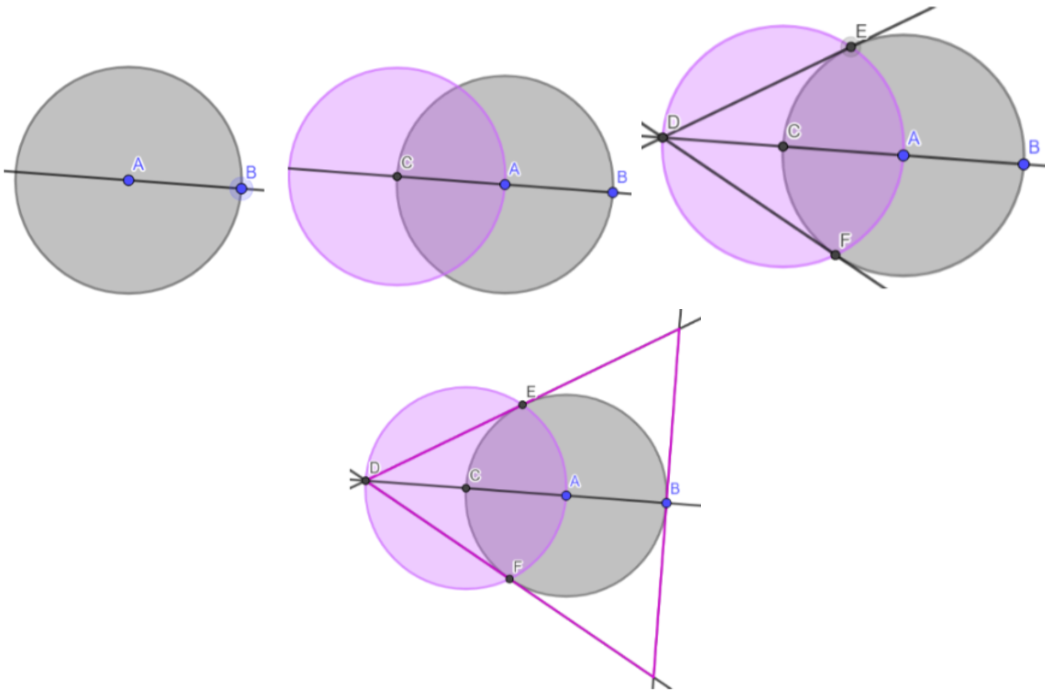


Construção estrelas 6E: Dado uma circunferência c_1 centrada em A e de raio AB, trace uma reta r que passa por AB. Marque a interseção de r e c_1 sendo o ponto C e trace a circunferência c_2 centrada em C e de raio CA. Marque o ponto D sendo a interseção de r e c_2 e marque também os pontos E e F sendo as interseções de c_1 e c_2. Agora trace a reta s que passa por DE e a reta t que passa por AF. Marque o ponto G sendo a interseção de s e t. Trace a reta u que passe por GB. Trace a reta v que passe por DF.





Construção estrela 5L: Dado uma circunferência c_1 centrada em A e de raio AB trace uma reta r que passa por AB. Marque a interseção de r e c_1 sendo o ponto C e trace a circunferência c_2 centrada em C e de raio CA. Marque o ponto D sendo a interseção de r e c_2 e marque também os pontos E e F sendo as interseções de c_1 e c_2. Agora trace a reta s que passa por DE e a reta t que passa por DF. Trace u a perpendicular que r que passa por B.



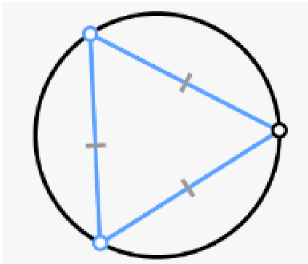
Demonstração: Dada a circunferência c_1,o ponto B pertencente a c_1 e a construção estrela 6L, note que AB, AE e AF são congruentes pois são raios de c_1. Assim, as retas s,t, u são tangentes de c_1, já que há apenas um ponto em comum entre c_1 e cada uma das retas. Assim c_1 esta inscrito num triângulo formado pelas retas s, t, u.

Agora precisamos provar que esse triângulo é equilátero. Traçando o triângulo CEA temos que ele é equilátero por ser construídos por raios de c_1 e c_2 que possuem o mesmo raio, logo, todos seus ângulos medem 60° e em destaque o ângulo $E\hat{C}A$, que é ângulo central do mesmo arco do ângulo $E\hat{D}A$, assim $E\hat{D}A$ mede 30°. Agora analisando o triângulo OB e o ponto de interseção de s e u que chamaremos de G, temos um ângulo de 30° e um de 90° em $D\hat{B}G$, portanto o ângulo $D\hat{G}B$ medirá 60°.

Analogamente podemos chegar a conclusão de que $A\hat{D}F$ também mede 30° e, tomando H sendo a interseção de t e u temos que $D\hat{H}B$ =60°. Como temos o triângulo DGH com ângulos iguais a 60°, temos que DGH é um triângulo isósceles.

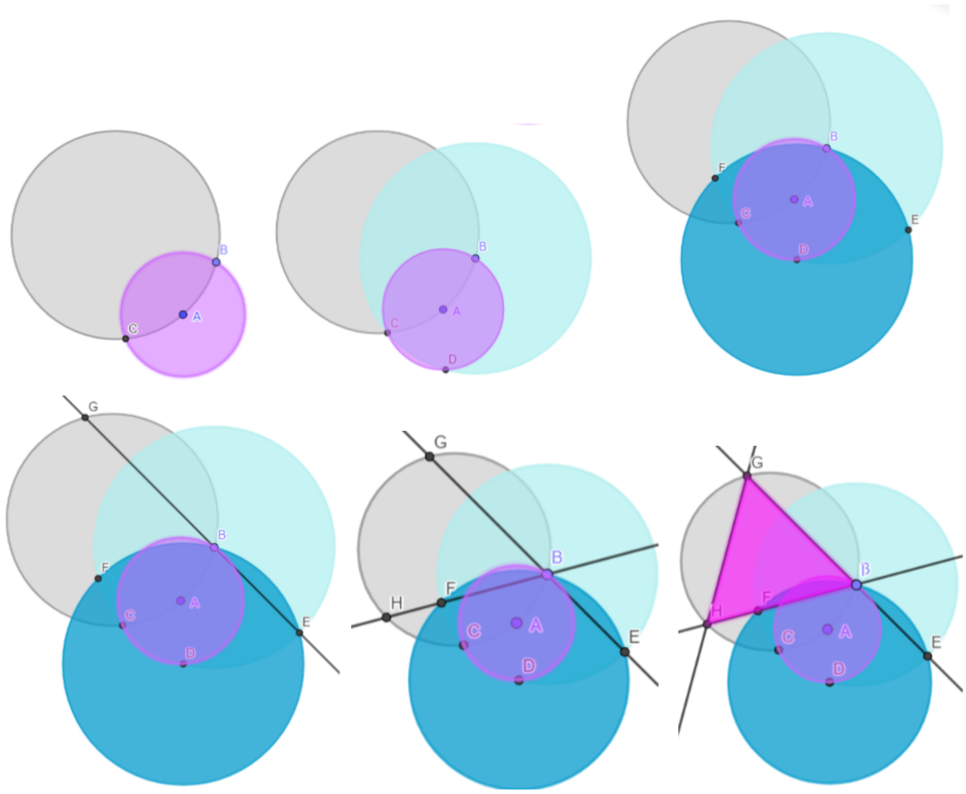
4.4 Triângulo Equilátero Dentro do Círculo

Objetivo: Construa o ponto médio do segmento que conecta os pontos médios das diagonais do quadrilátero.



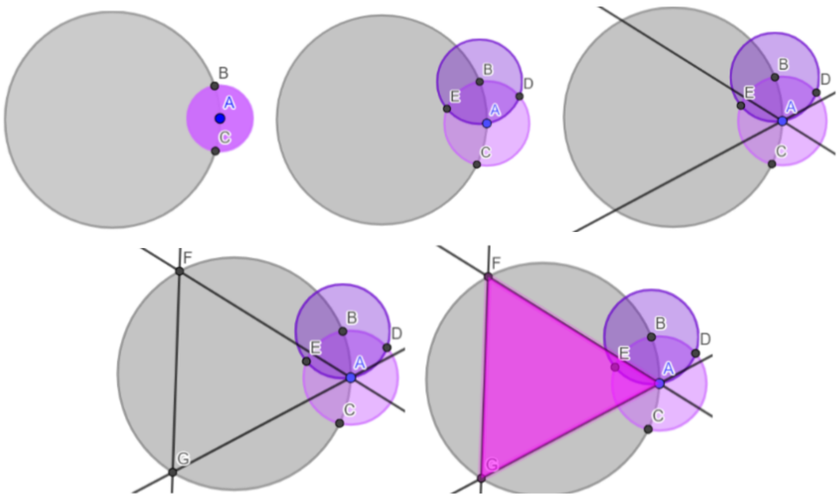
Construção estrelas 6E: Dada uma circunferência c e o ponto A, com A pertencente a c. Tome um ponto B pertencente a c e trace a circunferência c_1 de centro A e raio AB. Marque o ponto C sendo a intersecção de c e c_1. Construa a circunferência c_2 de centro B e raio BC e marque o ponto de intersecção D entre as circunferências c_1 e c_2. Construa uma circunferência c_3 de centro D e raio DB. Marque os pontos E e F sendo as interseções de c_2 e c_3.

Trace a reta r que passa pelos pontos B e E e marque o ponto G sendo a interseção de c e a reta r. Trace a reta s que passa pelos pontos B e F e marque o ponto H sendo a interseção de c e a reta s. Trace as retas i que passa pelos pontos G e H.



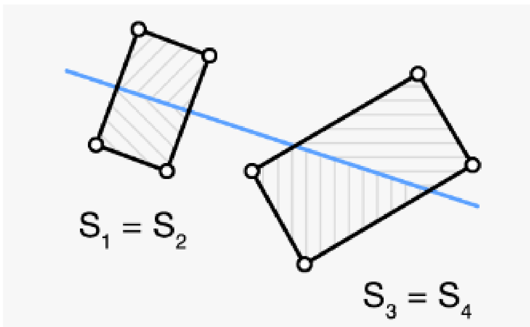
Construção estrela 5L: Dado circunferência c e o ponto A, com A pertencente a c, trace uma circunferência c_1 centrada em A com raio AB, onde B pertence a c. Marque o outro ponto de interseção de c e c_1 sendo o ponto C. Trace a circunferência c_2 centrada em B de raio BA e marque a interseção de c_1 e c_2 sendo os pontos D e E.

Trace r sendo a mediatriz de D e C e s sendo a mediatriz de E e C. Marque F sendo a interseção de r e c, e G sendo a interseção de s e c. Trace t a reta formada por F e G.

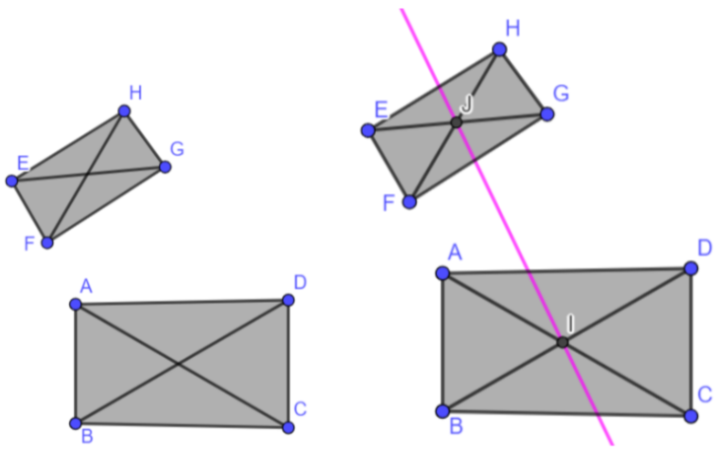


4.5 Corte Dois Retêngulos

Objetivo: Construa uma linha que corte cada um dos retângulos em duas partes de mesma área.



Construção estrelas 5L e 5E: Dados dois quadrado diferentes q_1 formado por ABCD e q_2 formado por EFGH, trace as diagonais AC, BD, EG, FH. Marque os pontos I e J sendo as interseções de AC e BD, e EG e FH, respectivamente. Trace a reta r que passa por IJ.



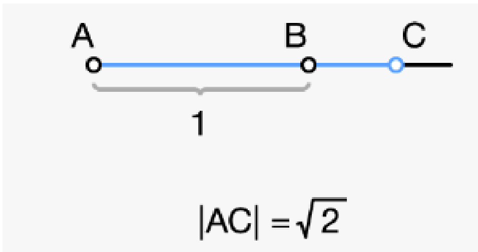
Demonstração: Dados dois quadrados e a construção acima, note que os triângulos AIB e IDC são congruentes pelo caso LAL. Chame K a interseção de r e AD, e L sendo a interseção de r e BC. Agora, perceba que os triângulos AKI e CLI são congruentes pelo caso ângulo, lado e ângulo oposto, já que um lado é metade da diagonal, os ângulos $I\hat{A}K$ e $I\hat{C}L$ são congruentes, e por fim os ângulos $A\hat{K}I$ e $C\hat{L}I$ são congruentes, pois as retas AD e BC são paralelas e a reta r é transversal aos dois lados, assim formam ângulos congruentes.

Analogamente temos que os triângulos BIL e CKI são congruentes. Sabemos que triângulos congruentes possuem a mesma área assim, a reta r divide o retângulo ABCD em duas partes com áreas iguais.

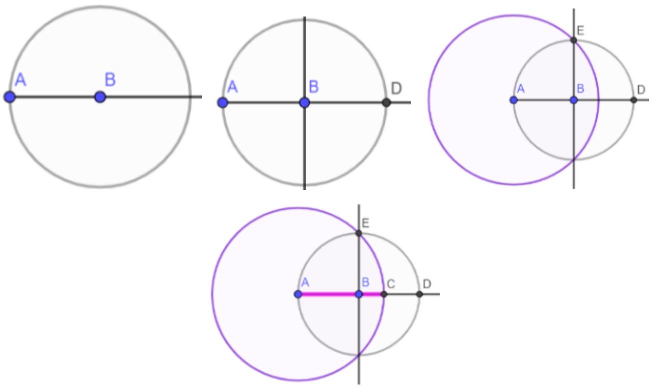
Para mostrar que a reta r também divide o retângulo EFGH em duas partes de áreas iguais basta seguir analogamente a demonstração do retângulo ABCD.

4.6 Raiz Quadrada de 2

Objetivo: Seja $|AB| = 1$. Construa um ponto C na semi-reta AB de modo que o comprimento AC seja igual a $\sqrt{2}$.



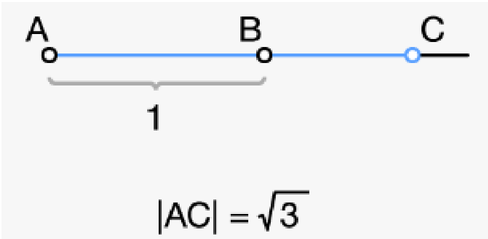
Construção estrelas 3L e 5E: Dado r uma semi-reta A e B trace uma circunferência c_1 centrada em B e de raio BA. Marque os pontos D sendo a interseção de c_1 e r. Trace a mediatriz m de AD. Marque o ponto E sendo a interseção de m e c_1 e trace a circunferência c_2 centrada em A e de raio AE. Marque o ponto C sendo a interseção de r e c_2.



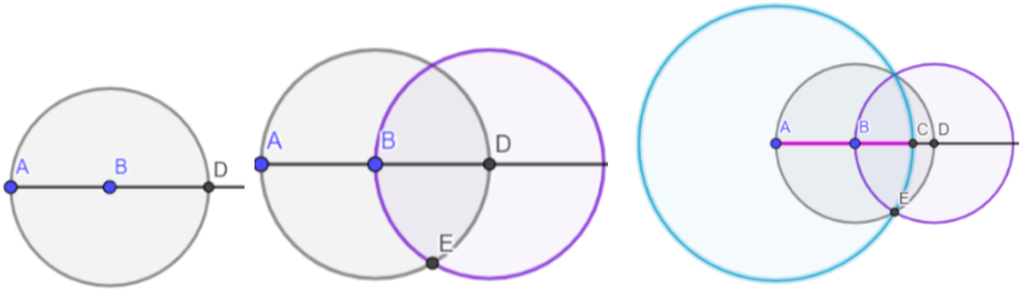
Demonstração: Dado r a semi-reta A e B e a construção acima, note BA é congruente a BE pois ambos são raios de c_1, assim, BE=1. Agora, olhe para o triângulo ABE e note que, como E pertence a mediatriz de AD, o ângulo $A\hat{B}E$ mede 90°, portanto, pelo Teorema de Pitágoras temos que AE mede $\sqrt{2}$. Assim, ao traçar a circunferência c_2 centrada em A e de raio $AE = \sqrt{2}$ e tomar C sendo a interseção de c_2 e r temos um ponto C e assim teremos $AC = \sqrt{2}$.

4.7 Raiz Quadrada de 3

Objetivo: Seja $|AB| = 1$. Construa um ponto C na semi-reta AB de modo que o comprimento AC seja igual a $\sqrt{3}$.



Construção estrelas 3L e 3E: Dado r uma semi-reta A e B trace uma circunferência c_1 centrada em B e de raio BA. Marque os pontos D sendo a interseção de c_1 e r. Trace a circunferência c_2 centrada em D e de raio DB e marque o ponto E sendo a interseção de c_1 e c_2. Trace a circunferência c_3 centrada em A e de raio AE e marque o ponto C sendo a interseção de c_3 e r.



Demonstração: Dado uma semi reta r com ponto inicial em A e B pertencente a r, onde $|AB| = 1$ e considerando a construção acima, note que tomando o triângulo BDE ele é isósceles pois BC e BD são congruentes por serem raio de c_1 e BD e DE são congruentes por serem raio de c_2, portando, DB,BE,ED são congruentes e seus ângulos medem 60°. Agora observe o ângulo formado por $E\hat{A}D$ e veja que esse é correspondente ao mesmo arco que o ângulo central $D\hat{B}E$, portanto, $D\hat{A}E$ possui 30°.

Temos que AD mede 2, DE mede 1, $E\hat{A}D$ =30° e $A\hat{D}E$ =60°, e consequentemente, $A\hat{E}D$ =90°, logo, aplicando o teorema de Pitágoras temos:

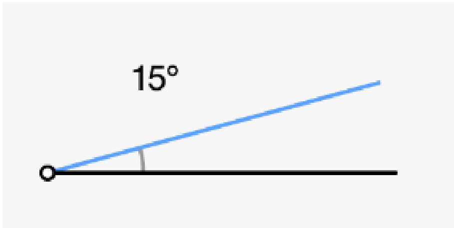
$$\overline{AD}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{DE}^2$$

$$2^2 = \overline{AE}^2 + 1^2$$
$$4 = \overline{AE}^2 + 1$$
$$\overline{AE}^2 = 3$$
$$\overline{AE} = \sqrt{3}$$

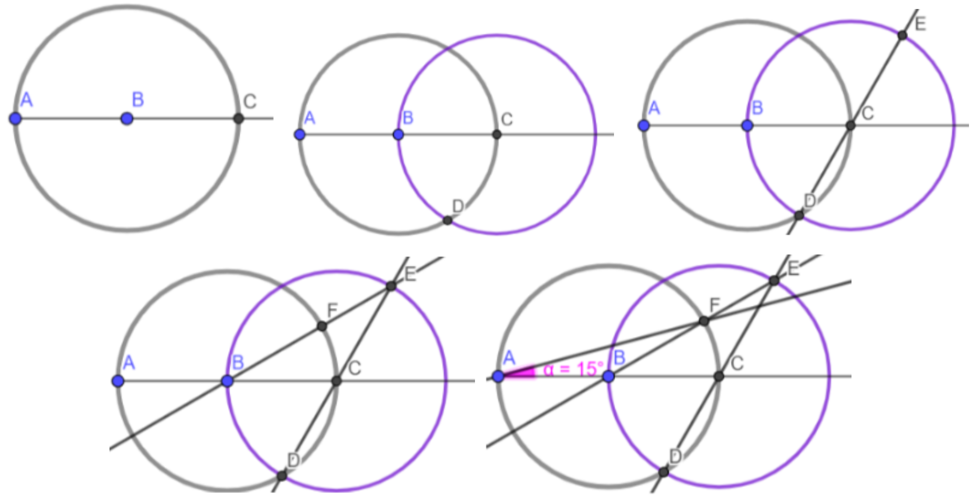
Mas queremos o ponto C pertencente a semi reta, então ao traçar c_1 centrada em A e com raio AE, temos que a distância entre A e todos os pontos pertencentes a c_2 será $\sqrt{3}$, assim tomando C como a interseção de c_3 e r temos que $AC = \sqrt{3}$.

4.8 Ângulo de 15°

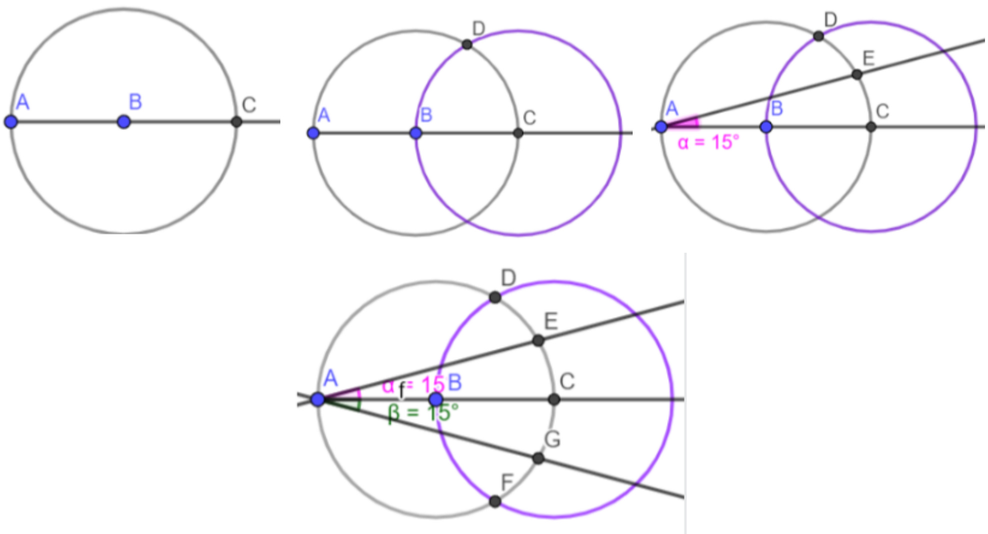
Objetivo: Construa um ângulo de 15° com o lado indicado.



Construção estrelas 5E: Dado r uma semi-reta com ponto inicial A e que passa por B trace uma circunferência c_1 centrada em B e de raio BA. Marque os pontos C sendo a interseção de c_1 e r. Trace a circunferência c_2 centrada em C e de raio CB e marque o ponto D sendo a interseção de c_1 e c_2. Trace a reta s que passe por DC e marque o ponto E sendo a interseção de s e c_2. Trace a reta t que passe por BE e marque o ponto F sendo a interseção de t e c_1. Trace a reta u que passe por AF.



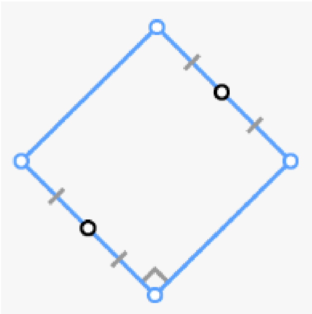
Construção estrela 3L: Dado r uma semi-reta com ponto inicial A e que passa por B trace uma circunferência c_1 centrada em B e de raio BA. Marque os pontos C sendo a interseção de c_1 e r. Trace a circunferência c_2 centrada em C e de raio CB e marque o ponto D sendo a interseção de c_1 e c_2. Trace b sendo a bissetriz do ângulo $D\hat{A}C$. Tome o ponto F sendo a outra interseção de c_1 e c_2 e trace a bissetriz de $F\hat{A}C$.



Demonstração: Dado r uma semi-reta com ponto inicial A e que passa por B e a construção da estrela 3L, note que ao traçar o triângulo BDO temos um triângulo equilátero e o ângulo $D\hat{B}C$=60°. Porém, o ângulo $D\hat{A}C$ é o ângulo externo correspondente ao mesmo arco de $D\hat{B}C$, assim, $D\hat{A}C = \dfrac{D\hat{B}C}{2} = \dfrac{60}{2}$=30°. Assim, quando traçamos a bissetriz desse ângulo, temos dois ângulos de 15°, e um deles é formado com a semi-reta dada.

4.9 Quadrado por Pontos Médios Opostos

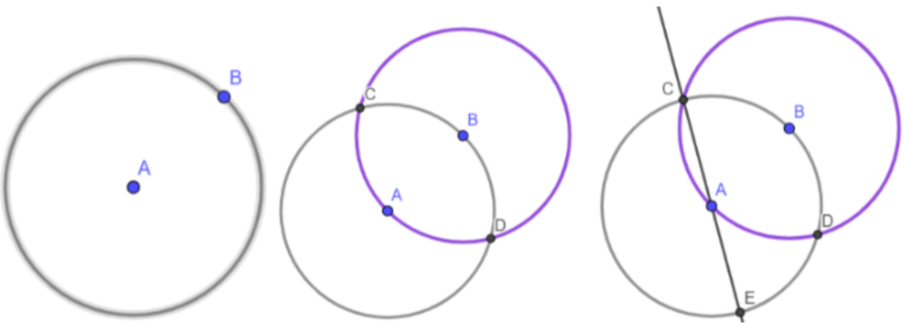
Objetivo: Construa um quadrado, dados sois pontos médios de lados opostos.

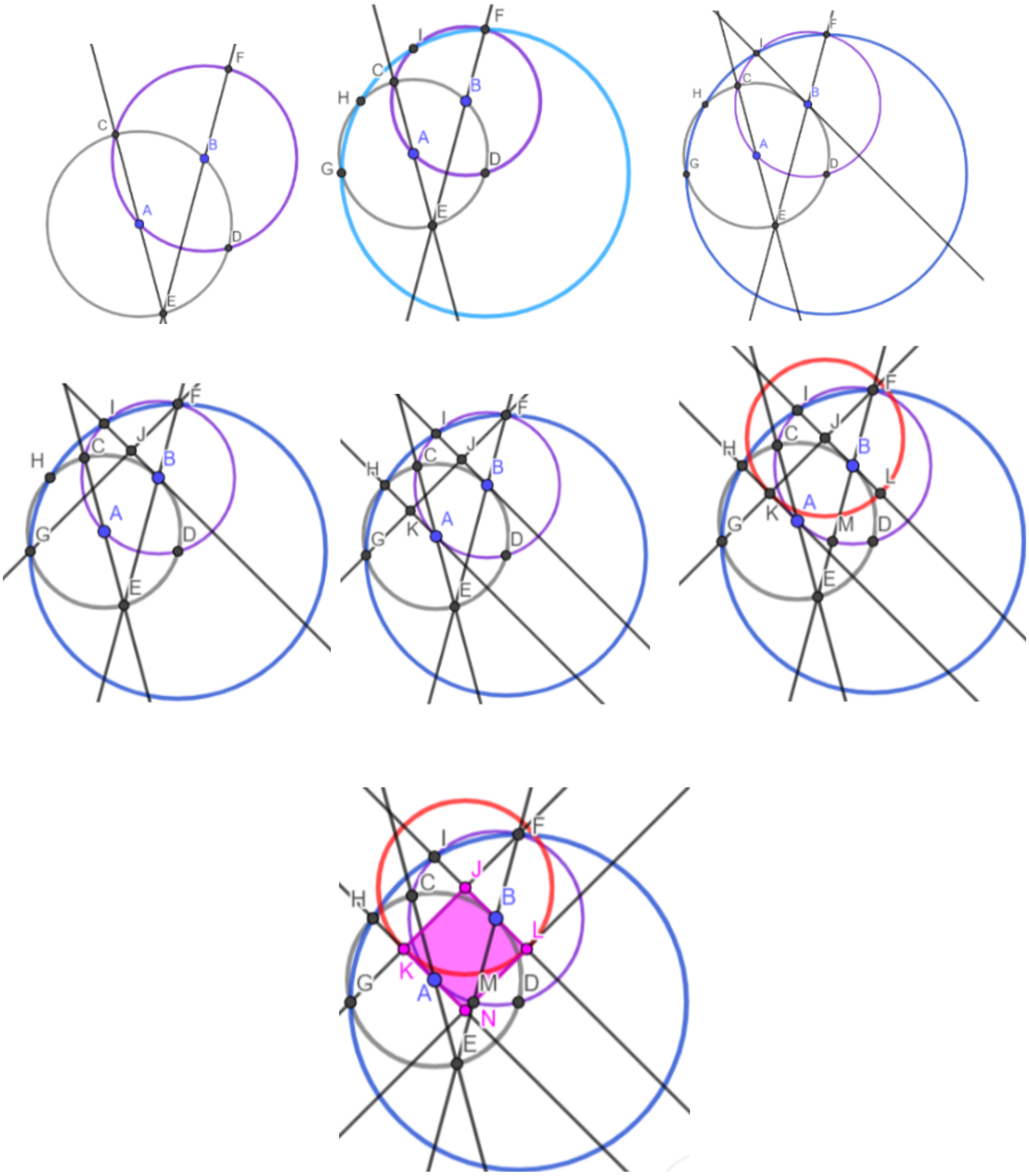


Construção estrelas 10E: Dados os pontos A e B trace uma circunferência c_1 centrada em A e de raio AB. Trace uma circunferência c_2 centrada em B e de raio BA. Marque os pontos C e D sendo a interseção de c_1 e c_2. Trace a reta r que passa por AC e marque o ponto E sendo a interseção de r e c_1.

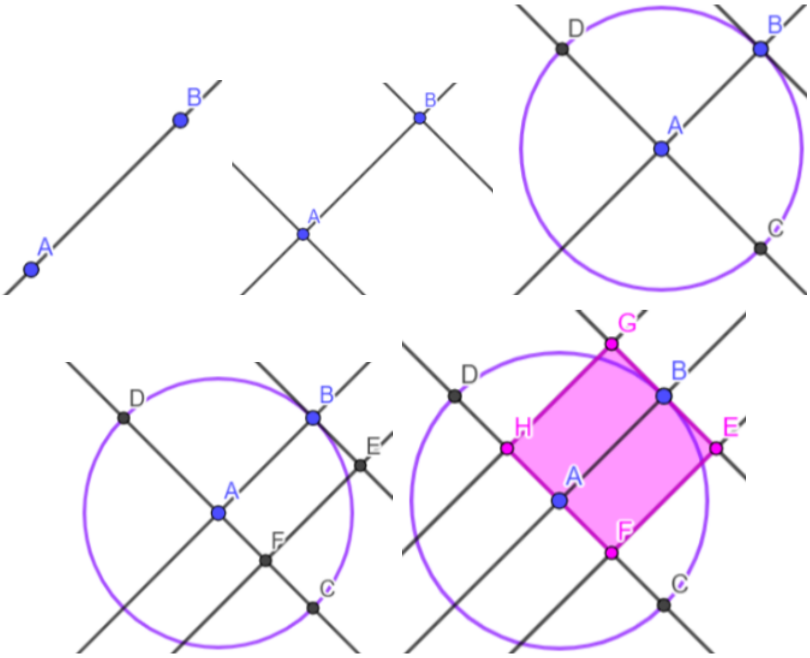
Trace a reta s que passa por BE e marque o ponto F sendo a interseção de s e c_2. Trace uma circunferência c_3 centrada em D e de raio DF. Marque os pontos G e H sendo a interseção de c_3 e c_1 e o ponto I sendo a interseção de c_3 e c_2.

Trace a reta t que passa por IB. Trace a reta u que passa por GF. Marque o ponto J sendo a interseção de t e u. Trace a reta v que passa por HA e marque o ponto K sendo a interseção de u e v. Trace uma circunferência c_4 centrada em J e de raio JK. Marque o pontos L sendo a interseção de c_4 e t. Trace a reta w que passa por LM e marque o ponto N sendo a interseção de w e v.





Construção estrela 6L: Dados os pontos A e B trace a reta r que passa por AB. Trace s sendo a perpendicular a r que passa por A, e t sendo a perpendicular de r que passa por B. Desenhe a circunferência c centrada em A de raio AB e marque os pontos C e D sendo as interseções de c e s. Construa m sendo a mediatriz de AC e marque o ponto E sendo a interseção de t e m; e F sendo a interseção de s e m. Construa n sendo a mediatriz de AD e marque o ponto G sendo a interseção de t e n; e H sendo a interseção de s e n.



Demonstração: Dados os pontos A e B e considerando a construção da estrela 6L, note que s e t são perpendiculares e temos ângulos de $90°$ entre as retas r e s, e, r e t. Ao traçar a circunferência c e tomar os pontos D e C pertencentes a c temos que AB é congruente a AD e AC. Considerando H ponto médio de AD e F sendo ponto médio de AC temos:

$$DC = 2AB$$

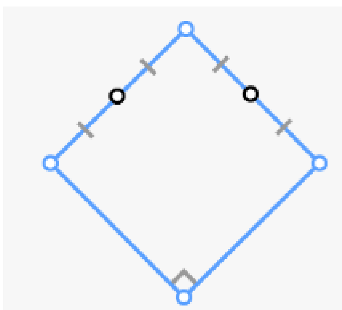
$$DA + AC = 2AB$$

$$\frac{DA}{2} + \frac{AC}{2} = AB$$

Logo, HF=AB. Como HG e FE são perpendiculares a DC, e DC é perpendicular a AB, então AB é paralelo a HG e FE, além disso, temos que GE é paralelo e congruente a HF. Note que temos retas perpendiculares umas às outras, assim, temos um quadrado EFGH.

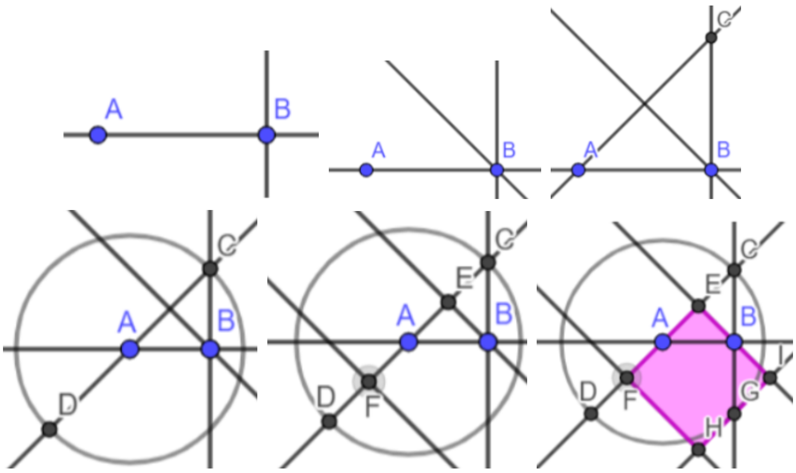
4.10 Quadrado por Pontos Médios Adjacentes

Objetivo: Construa um quadrado, dados dois pontos médios de lados adjacentes.

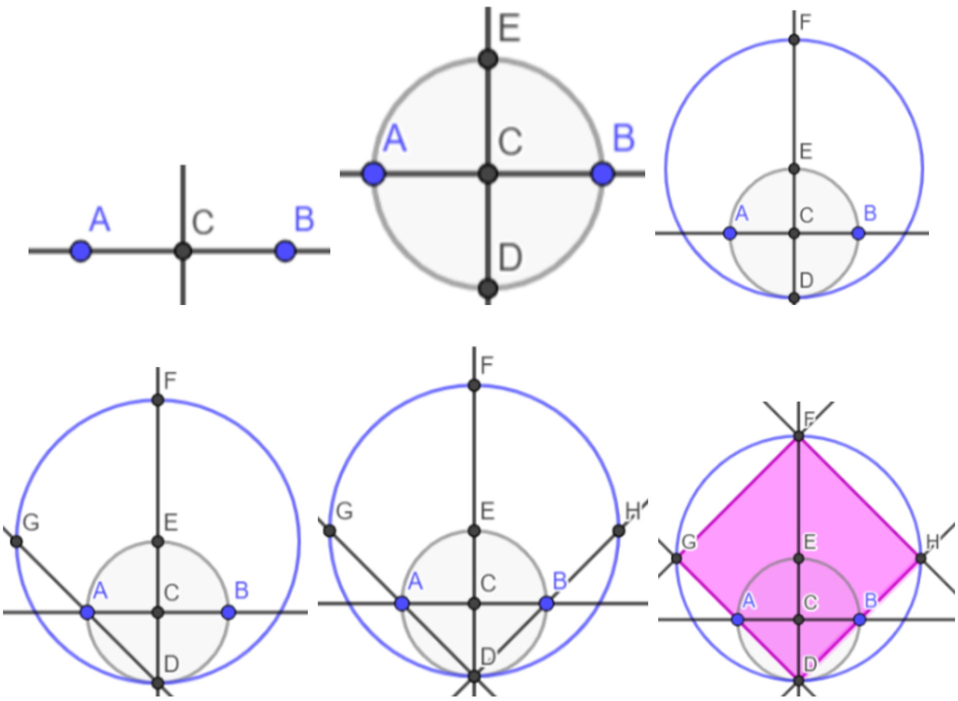


Construção estrelas 7L: Dados dois pontos A e BD trace a reta r que passa por AB e a reta s que é perpendicular a r e passa por B. Trace b sendo a bissetriz do ângulo formado pelas retas r e s. Construa a reta t perpendicular a b que passa por A e marque o ponto C sendo a intersecção de m e s. Faça uma circunferência c centrada em A e de raio AC. Marque o ponto D sendo a intersecção de c e t.

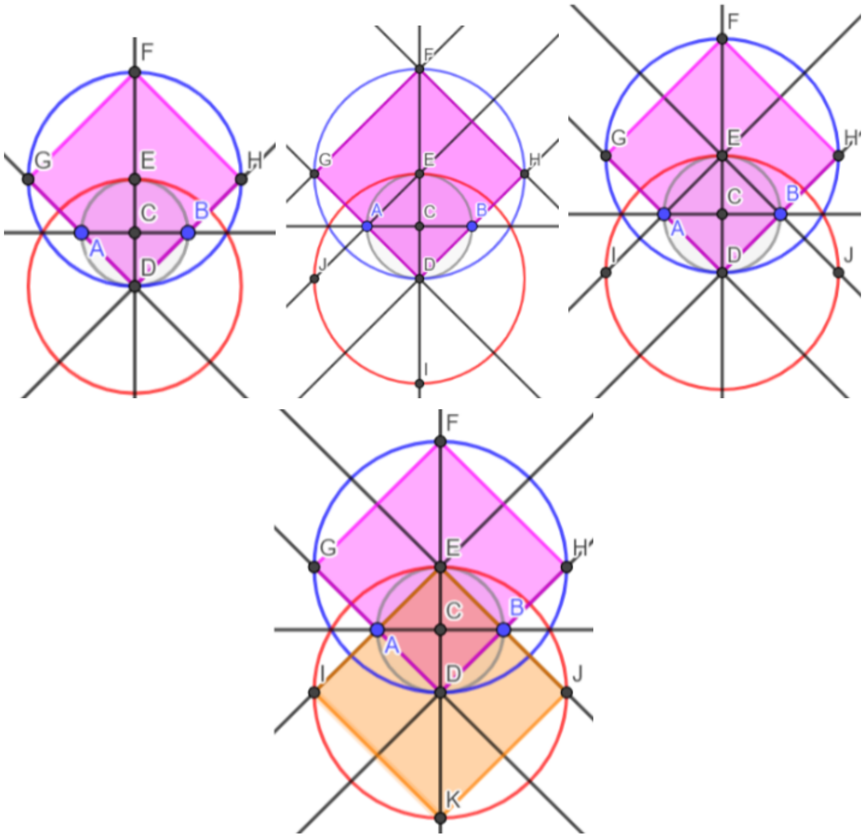
Trace n sendo a mediatriz de AD e marque o ponto F pertencente a AD e n. Marque o ponto E sendo a interseção de m e b. Marque o ponto G sendo a interseção de c e s. Trace a reta t perpendicular a m que passa por G. Marque o ponto H sendo a interseção de t e m e o ponto I a interseção de b e t.



Construção estrela 10E: Dados dois pontos A e B trace a reta r que passa por AB e m sendo a mediatriz de AB. Trace a circunferência c_1 centrada em C e de raio CA e marque os pontos E e D sendo a interseção de c_1 e m. Trace a circunferência c_2 centrada em E e de raio ED e marque os pontos F a interseção de c_2 e m. Trace a reta s que passa por AD e marque o ponto G sendo a interseção de s e c_2. Trace a reta t que passa por BD e marque o ponto H sendo a interseção de t e c_2. Trace os segmentos GF, HF.



Construção Estrela 2V: Continuando a construção da estrela 10E, trace a circunferência c_3 centrada em D e de raio DE. Trace a reta u de AE e marque o ponto I sendo a interseção de c_3 e u. Trace a reta v de BE e marque o ponto J sendo a interseção de c_3 e v. Marque o ponto K sendo a interseção de c_3 e m. Trace os segmentos KI e KJ.



Demonstração: Dados os pontos A e B e considerando a construções acima, observe os triângulos ADC e BDC, e note que ambos no ponto C possuem ângulo de 90° já que m é mediatriz de AB. Além disso, são isósceles porque AC, BC e CD são raios de c_1. Assim, $D\hat{A}C$ e $A\hat{D}C$ são congruentes, como também $B\hat{D}C$ e $C\hat{B}D$. Dessa forma, temos em ambos os triângulos um ângulo de 90° e dois ângulos congruentes. Logo, eles medirão 45° cada. O mesmo acontece com o triângulo ECB que será reto em C, com dois outros ângulos medindo 45°. Lembrando que todos os triângulos são congruentes pelo caso ALA.

Observando agora a circunferência c_2 note que os raios EG, EF, EH, ED são congruentes. Considerando o raio EH e a mediatriz m temos que os ângulos $D\hat{E}H$ e $H\hat{F}$ medem 90° pois, observando o triângulo EDH vimos anteriormente que no ponto D possui ângulo de 45° e esse é ângulo inscrito que forma o mesmo arco que o ângulo central $H\hat{E}D$, logo $H\hat{E}D$ mede 90°, e $H\hat{E}F$ também mede 90° pois é complementar de $H\hat{E}D$. Por FEH e HED serem triângulos isósceles $E\hat{F}H$, $E\hat{H}F$, $E\hat{H}D$ e $E\hat{D}H$ medirão 45°. E mais ainda, FEH e HED são congruentes. O mesmo acontece ao considerar os triângulos FGE e EGD, esses serão congruentes e a demonstração é análoga a dos triângulos FEH e HED, portanto, $E\hat{F}G$, $E\hat{G}F$, $E\hat{G}D$ e $E\hat{D}G$ são congruentes e medem 45°.

Resumindo o que temos até aqui, possuímos um quadrilátero GFHD com 4 ângulos de 90°, já que cada vértice dele possui um ângulo que é formado por dois ângulos de 45°.

Pelo caso AAA, os triângulos FEH, HED, FGE e EGD são congruentes, logo, o quadrilátero com ângulos retos possui todos os lados congruentes e é um quadrado.

Falta provar que A e B são pontos médios dos lados desse quadrilátero. Tome o triângulo ECB e note que esse é congruente a DCB por LAL, assim, o triângulo DEB é isósceles, com $D\hat{B}E = D\hat{B}C + C\hat{B}E = 45 + 45 = 90°$. Olhe agora para o triângulo DEH e lembre-se que ja vimos que $H\hat{E}D$ mede 90°, assim, temos um triângulo retângulo e ao traçar a bissetriz do angulo $H\hat{E}D$ e marcar a interseção dessa com o segmento DH encontramos o ponto B. A demonstração de que A é ponto médio de DG é análoga.