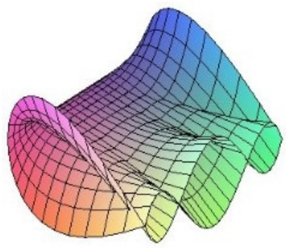


Cálculo Diferencial e Integral: um kit de sobrevivência

"Sistema de Coordenadas Polares"

Nayla Gabriela Ribeiro.
Orientadora: Profª Drª Laís Spada da Fonseca.

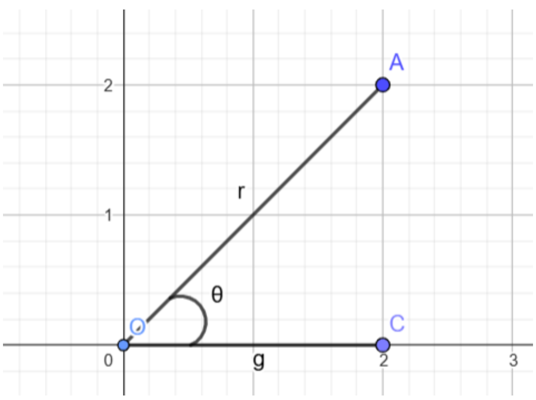
Coordenadas Polares

Para começarmos, antes de mais nada, veremos a definição de coordenadas polares e suas caracterizações. As coordenadas polares, dentre muitos outros tipos de coordenadas, compõem um sistema de coordenadas bidimensional utilizado principalmente na matemática, para localizar um ponto em um plano.

Dado um ponto qualquer P, no sistema de coordenadas cartesianas, o mais conhecido, utilizamos os eixos x e y para determinar sua localização no plano. De modo geral, $P = (a, b)$, onde a é a projeção de P no eixo x e b é a projeção no eixo y. Diferentemente do cartesiano, para identificar um ponto P, o sistema de coordenadas polares utiliza uma coordenada θ, que representa o ângulo formado por uma referência fixa (geralmente o semieixo $x > 0$) e o segmento que liga a origem dessa referência até o ponto desejado, com $\theta \in [0, 2\pi)$, e uma coordenada r, que representa a distância da origem ao ponto desejado, com $r \geq 0$. Portanto $P = (r, \theta)$.

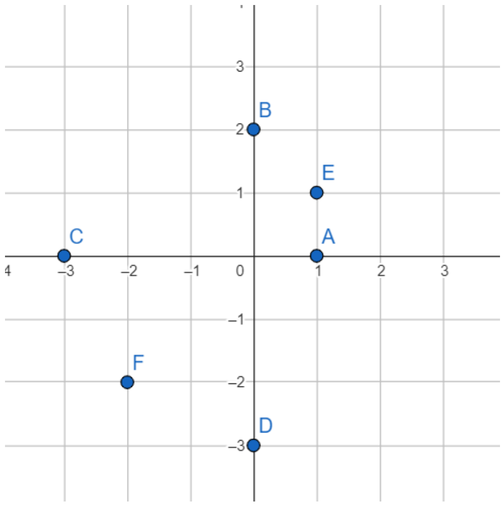
Vale lembrar que, de modo mais formal, na utilização de coordenadas polares, chamaremos a origem O de **polo** e o eixo de referência inicial, de **eixo polar**.

Ex:



Coord. Cartesianas	Coord. Polares
$A = (2, 2)$	$A = (2\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$

Note no exemplo acima que, nas coordenadas cartesianas, o ponto A está representando a partir das suas projeções no eixo x (2) e y (2). Já nas coordenadas polares, o mesmo ponto está representado pelo ângulo $\frac{\pi}{4}$, formado pelo segmento OA e a referência utilizada, neste caso, a parte positiva do eixo x, e sua distância até a origem $O(r = 2\sqrt{2})$. Veja mais alguns exemplos:



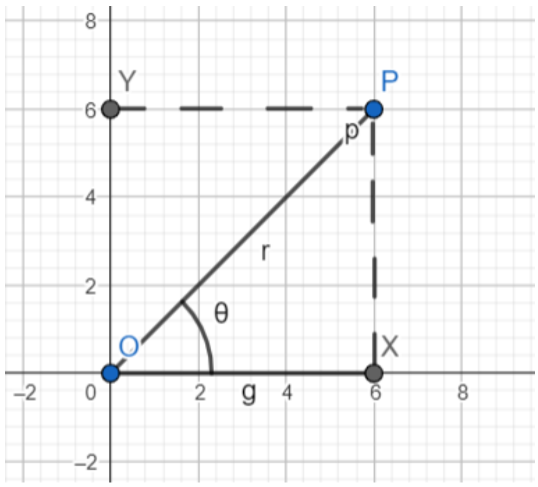
	Coord. Cartesianas	Coord. Polares
A	$(1,0)$	$(1,0)$
B	$(0,2)$	$(2,\frac{\pi}{2})$
C	$(-3,0)$	$(3,\pi)$
D	$(0,-3)$	$(3,\frac{3\pi}{2})$
E	$(1,1)$	$(\sqrt{2},\frac{\pi}{4})$
F	$(-2,-2)$	$(2\sqrt{2},\frac{5\pi}{4})$

Conversão das coordenadas

Como vimos anteriormente, um ponto P do plano pode ser representado em coordenadas cartesianas como (x, y) e em coordenadas polares por (r, θ). É possível ainda fazer a conversão de um sistema de coordenadas para o outro, ou seja, podemos transformar coordenadas cartesianas em polares e vice-versa, para facilitar a utilização de acordo com a situação.

Conversão de coordenadas polares para cartesianas:

Seja P um ponto de coordenadas polares (r, θ). Então valem as relações: $x = r \cdot \cos\theta$ e $y = r \cdot \sin\theta$. O triângulo retângulo OPX a seguir ilustra o caso em que $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ e $r > 0$.



$x = r \cdot \cos\theta$
$y = r \cdot \sin\theta$

Exemplo 1: Temos as coordenadas polares $(6, \frac{2\pi}{3})$. Qual é o seu equivalente em coordenadas cartesianas?
Resolução: Utilizando as fórmulas de conversão estudadas acima, temos:

$$x = r \cdot \cos\theta$$
$$x = 6 \cdot \cos\frac{2\pi}{3}$$
$$x = 6 \cdot (-0.5)$$
$$x = -3$$

$$y = r \cdot \sin\theta$$
$$y = 6 \cdot \sin\frac{2\pi}{3}$$
$$y = 6 \cdot (0.866)$$
$$y \approx 5.2$$

Portanto, as coordenadas cartesianas são $(-3, 5.2)$.

Conversão de coordenadas cartesianas para polares:

Seja P um ponto de coordenadas cartesianas (x, y). Considerando P com coordenadas polares (r, θ), temos as relações já mostradas acima.

Como $x^2 + y^2 = r^2 \cos^2\theta + r^2 \sin^2\theta = r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r^2 \cdot 1 = r^2$, temos que $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Se $r = 0$, isto significa que $x = y = 0$, logo podemos tomar θ qualquer. Se $r > 0$, θ é tal que $\cos\theta = \frac{x}{r}$ e $\sin\theta = \frac{y}{r}$.

Exemplo 2: Tendo as coordenadas cartesianas $(1, 1)$, encontre o equivalente em coordenadas polares.

Resolução: Pelas fórmulas estudadas acima, temos:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$r = \sqrt{1^2 + 1^2}$$
$$r = \sqrt{2}$$

E ainda:

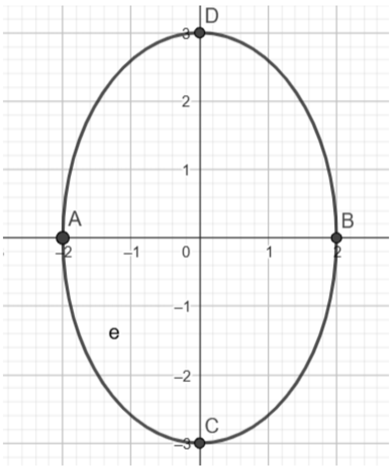
$$\cos\theta = \frac{x}{y} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Logo, $\theta = \frac{\pi}{4}$. Portanto, temos as coordenadas polares $(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$.

Conversão de objetos:

Podemos também trabalhar a conversão de qualquer objeto para coordenadas polares.

Exemplo 3: Considere a seguinte elipse em coordenadas cartesianas:



Eq. em Coord. Cartesianas
$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

Dessa forma, considerando as relações de x e y já mencionadas nos exemplos acima, basta fazer tais substituições:

$$\frac{(r.\cos\theta)^2}{4} + \frac{(r.\sin\theta)^2}{9} = 1$$
$$\frac{r^2.\cos^2\theta}{4} + \frac{r^2.\sin^2\theta}{9} = 1$$
$$r^2\left(\frac{\cos^2\theta}{4} + \frac{\sin^2\theta}{9}\right) = 1$$

Multiplicando por 36:

$$r^2(9\cos^2\theta + 4\sin^2\theta) = 36$$
$$r^2(5\cos^2\theta + 4\cos^2\theta + 4\sin^2\theta) = 36$$
$$r^2(5\cos^2\theta + 4(\cos^2\theta + \sin^2\theta)) = 36$$
$$r^2(5\cos^2\theta + 4) = 36$$

Portanto, a equação simplificada polar dessa elipse é:

$$r^2(5\cos^2\theta + 4) = 36$$

Aplicações

As coordenadas polares podem ser utilizadas em qualquer situação em que as coordenadas retangulares sejam difíceis ou inadequadas de se aplicar. Em qualquer aplicação envolvendo geometria circular ou movimento radial, a melhor opção é usar as coordenadas polares, pois seus gráficos são mais curvilíneos ou circulares na aparência em comparação aos sistemas de coordenadas retangulares. Dessa forma, as coordenadas polares têm uso para retratar modelos de fenômenos do mundo real que têm formas arredondadas semelhantes.

Além disso, as coordenadas polares são de grande importância na Astronomia, na modelagem dos movimentos orbitais e em viagens espaciais. Os gráficos desse sistema de coordenadas também foram utilizados para modelar campos sonoros produzidos por alto-falantes em diferentes locais e as áreas onde diferentes tipos de microfone podem captar melhor o som. E ainda, podem ser muito usadas em diferentes engenharias com diversas finalidades.

Por fim, sabendo que as coordenadas polares nos trazem maior facilidade na descrição de movimentos circulares, podemos concluir que as aplicações dessas coordenadas são bastante variadas.

Referências

[1] GUZMAN, J. **Coordenadas Polares – Fórmulas e Exercícios.** Neurochispas Aprende Intuitivamente. Disponível em: https://br.neurochispas.com/trigonometria/coordenadas-polares-formulas-e-exercicios/ Acesso em: 8 jul. 2024.

[2] GIOVANINI, A. **Coordenadas Polares e Cartesianas.** 2021. Disponível em: https://adenilsongiovanini.com.br/blog/coordenadas-polares-e-cartesianas-o-que-sao/ Acesso em: 8 jul. 2024.

[3] **O que é: Coordenada polar.** Aero Engenharia. 2023. Disponível em: https://aeroengenharia.com/glossario/o-que-e-coordenada-polar/ Acesso em: 6 ago. 2024.

[4] NASCIMENTO, M. **Coordenadas Polares.** Unesp. Disponível em: https://wwwp.fc.unesp.br/ mauri/Down/Polares.pdf Acesso em: 6 jul. 2024.

[5] BERNI, J. **Apoio Polares.** IME USP. Disponível em: https://www.ime.usp.br/ jeancb/ApoioPolares.pdf Acesso em: 6 ago. 2024.

[6] **Coordenadas Polares.** PORTAL São Francisco. Disponível em : https://www.portalsaofrancisco.com.br/matematica/coordenadas-polares Acesso em: 08 ago. 2024.