

Cálculo Diferencial e Integral: um kit de sobrevivência "Sistema de Coordenadas"

Eloísa Gabrieli Alves dos Santos
Manuela Cristina Souza Brito
Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Martins

História do Sistema de Medidas

A criação do sistema internacional de medidas foi cheia de conflitos e estratégias. Antes da organização de ideias para a consolidação desse sistema, existiam outras formas de medir, por exemplo: o côncavo, palmo, jarda, entre outras. Lugares como Egito, Canã e Mesopotâmia usavam essa estratégia para medir altura, largura, profundidade e distância. Apesar de côncavo não ser uma palavra muito comum, é de acesso genial e simples. A medida do côncavo é a distância do cotovelo até a ponta do dedo do meio. A medida varia bastante, mas é de aproximadamente 45 centímetros. Veja a Figura 01 abaixo para melhor compreensão:

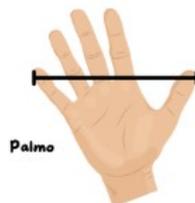
Figura 01: Medida do côncavo.



Fonte: próprias autoras

A Figura 01 exemplifica exatamente o que é a medida côncavo. Além dessa estratégia, foram usadas outras, como o palmo, que consiste nos quatro dedos juntos, medido pela distância entre o dedo mindinho e o polegar. Veja na Figura 02 abaixo:

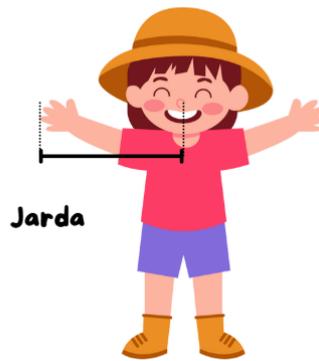
Figura 02: Medida do palmo.



Fonte: próprias autoras

Tivemos ainda outras medidas, como a jarda, utilizada na Inglaterra e nos Estados Unidos. É dada pela distância entre o nariz e a ponta do polegar, com o braço esticado. Observe a Figura 03 abaixo mostrando a medida jarda:

Figura 03: Medida da jarda



Fonte: próprias autoras

Todas essas medidas têm como base o corpo humano, algumas ainda são utilizadas até hoje. Tanto utilizadas pelos nossos avós no cotidiano, quanto em empresas. Porém, podemos notar que essas proporções de medidas podem mudar de pessoa para pessoa, conseqüentemente gerando conflitos e erros que podem comprometer financeiramente.

A partir desses conflitos e da Revolução Francesa, foi criado o sistema métrico. Foi originalmente implantado na França, mas boa parte dos países também adquiriu esse sistema. A criação se deu por meio da definição do metro utilizando somente a natureza, ou seja, foi tomado como medida o décimo de milionésimo da distância do Pólo Norte ao Equador. A linha de longitude que vai do pólo à Linha do Equador, que seria usada para determinar o comprimento do novo padrão, era o Meridiano de Paris.

O processo de implementação do novo sistema acabou gerando muita discussão, pois a população da época não queria abandonar as medidas tradicionais, o que resultou em um período de conflitos. Porém, em 1840 foi oficializada a utilização do novo sistema de medidas, usando assim um padrão.

Com o passar do tempo, as instituições internacionais mais antigas do mundo decidiram criar o Escritório Internacional de Pesos e Medidas (BIPM, na sigla em francês). Estabelecido originalmente para preservar os padrões internacionais, o BIPM promove a uniformidade de sete unidades internacionais de medida: o metro, o quilograma, o segundo, o ampere (que mede a intensidade da corrente elétrica), o kelvin (unidade de temperatura), o mol (quantidade de substância) e a candela (intensidade luminosa).

Na década de 1980, o BIPM redefiniu o metro como a distância percorrida pela luz no vácuo em um intervalo específico de tempo, tornando-o mais preciso do que nunca. Desde então, definido pelas leis universais da física, tornou-se finalmente uma medida verdadeiramente baseada na natureza.

Definição de métricas

De acordo com o Instituto Butantan, abril foi o mês mais crítico de 2021 para o Brasil em relação ao falecimento de pessoas que foram infectadas pelo coronavírus. O que vamos ressaltar dessa informação é o termo muito utilizado durante esse período. Muito se falava sobre “distância” nos noticiários, redes sociais, panfletos, cartazes. Todos remetem às recomendações do Ministério da Saúde, em manter-se à distância de 1 metro de outras pessoas.

Quando os indivíduos receberam essa recomendação, a maioria das pessoas começou a respeitar e seguir esse cuidado. Então, podemos dizer que o conceito de distância já é um conhecimento prévio, ou seja, eles já dominam o que é distância. O que queremos dizer com isso é que a definição da expressão que introduziremos pode ser conceitualizada como a ideia geral de distância, ou melhor, métrica.

A distância de 1 metro de uma pessoa para outra pode ser interpretada também como a métrica. Por exemplo, considerando uma pessoa “x” e outra pessoa “y” estando a 1 metro de distância entre si, diremos então que $d(x,y) = 1$, isto é, pode-se dizer também que a métrica delas é 1. A imagem representativa do nosso exemplo pode ser visualizada na Figura 04.

Figura 04: Exemplo de distância



Fonte: próprias autoras

A partir de agora, vamos definir a métrica de forma precisa e, para isso, é necessário seguir quatro critérios. Utilizaremos o exemplo anterior para nos auxiliar. Na Figura 05, temos duas pessoas, cada uma será um objeto de estudo. O rapaz de camiseta azul será chamado de “x” e a senhora de camiseta branca será chamada de “y”. Veja abaixo de forma ilustrativa.

Figura 05: Exemplo da explicação

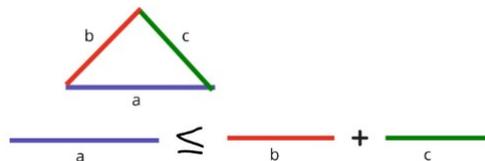


Fonte: próprias autoras

Com base na imagem como exemplo, vamos fazer algumas ponderações:

- **A distância entre x e y não é negativa:** isso quer dizer que a distância entre quaisquer dois pontos não é negativa, pois é uma quantidade escalar;
- **A distância entre x e y pode ser nula:** nesse quesito, no nosso exemplo temos que a distância não é nula, ela é equivalente a 1 metro, mas a distância poderia ser nula caso x e y estivessem na mesma posição, ou seja, no mesmo ponto.
- **A distância entre x e y é simétrica:** temos que a distância entre x e y é a mesma distância entre y e x.
- **A distância entre x e y é menor ou igual à soma das distâncias entre x e z com y e z:** essa afirmação se trata de uma desigualdade triangular. Para facilitarmos nosso entendimento, veja a Figura 06 abaixo:

Figura 06: Exemplificação da desigualdade triangular



Fonte: próprias autoras

Essa condição pode parecer um pouco diferente das demais, mas complementa as validações da métrica. Outra forma de expressar essa condição é: $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$.

Definição de Superfície

Para definirmos a palavra superfície, vamos contextualizar em quais sentidos ela é empregada no nosso vocabulário. Veja a tirinha abaixo na Figura 07:

Figura 07: Tirinha usando o termo "superfície"



Fonte: próprias autoras

Podemos observar que, no último quadrinho, é utilizado o termo “superfície” para descrever um local superior a outro. Outro exemplo são as situações de desmoronamento, quando, nos noticiários, é dito: “trouxeram as vítimas para a superfície”, e assim por diante.

Existem vários contextos em que o termo em destaque se aplica, mas no nosso caso queremos nos aprofundar no conceito definido e utilizado pela Matemática.

Definição: Superfície é uma grandeza com duas dimensões, enquanto área é a medida dessa grandeza, portanto, um número. A unidade fundamental de superfície chama-se metro quadrado. O metro quadrado (m^2) é a medida correspondente à superfície de um quadrado com 1 metro de lado.

Definição de Superfície Diferencial

De modo geral, a Geometria Diferencial é muito abrangente. Neste tópico, vamos citar alguns conceitos e exemplos para podermos definir sistema de coordenadas, que é o nosso foco.

Na Física, o termo superfície é utilizado para considerar a deformação ou rompimento de uma folha de papel ou a colagem de alguns pedaços de papéis.

Uma superfície pode ser definida como um conjunto de pontos do espaço euclidiano bidimensional com a característica de que qualquer ponto da mesma pode ser descrito localmente por duas coordenadas. Dentre as várias classificações das superfícies, segundo Do Carmo (2012), são de interesse ao estudo aquelas que não apresentam pontos singulares ou auto interseções. Tais superfícies são denominadas superfícies regulares e admitem uma parametrização, sendo que as coordenadas de cada ponto dessa superfície podem ser descritas por uma função de duas variáveis.

A definição de superfície que utilizaremos é:

Definição: Uma **superfície parametrizada regular**, ou simplesmente uma **superfície**, é uma aplicação $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, onde U é um aberto de \mathbb{R}^2 , tal que:

a) X é diferenciável de classe C^∞ ;

b) Para todo $q = (u,v) \in U$, a diferencial de X em q , $dX_q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, é bijetora.

As variáveis u, v são parâmetros da superfície. O subconjunto S de \mathbb{R}^3 obtido pela imagem da aplicação X é denominado **traço** de X .

Em outras palavras, as superfícies regulares são aquelas que, em cada ponto da mesma, está definido um plano tangente e que, conseqüentemente, é possível utilizar-se dos conceitos do Cálculo Diferencial e Integral para se efetuar medições nessa superfície, como por exemplo distâncias, ângulos e áreas.

Uma superfície também pode ser definida do ponto de vista topológico, de uma maneira mais abstrata, como uma variedade. Uma variedade é um espaço que pode ser descrito localmente através de coordenadas, sendo o número de coordenadas ou o número de direções independentes necessárias para representar todos os pontos próximos de um ponto dado num objeto chamado de dimensão da variedade. Esse número de direções pode ser compreendido intuitivamente como o número observado por alguém que “viva” sobre a variedade, e não o número de dimensões necessárias para conter o objeto. No caso das superfícies, sua dimensão é igual a dois.

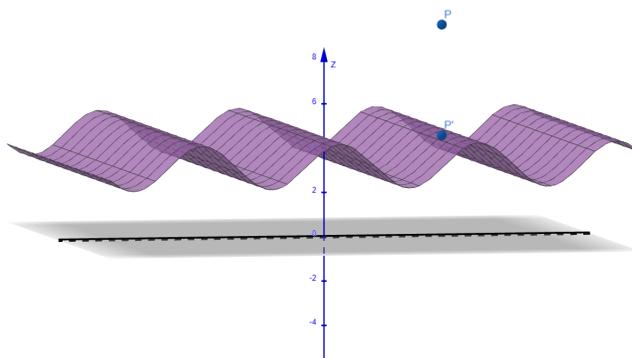
Sistema de Coordenadas

O objetivo de um sistema de coordenadas, de forma breve e sucinta, é basicamente a localização. No sistema de coordenadas cartesianas, o mais usual, qualquer ponto que considerarmos no espaço tem coordenadas tridimensionais, digamos (x, y, z) , sendo (x, y) sua localização em relação ao plano Oxy e z , à altura em relação a esse plano.

No entanto, um sistema de coordenadas não precisa, necessariamente, ser constituído de um plano juntamente com uma reta para indicar a altura. No lugar do plano, poderíamos ter uma superfície, desde que ela mapeie todo o plano.

Seja S uma superfície parametrizada por $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ e considere uma reta que mede a altura z em relação a S , onde a superfície S corresponde à altura zero. Dado um ponto P qualquer do espaço, observe que podemos descrever P através das coordenadas $(f(x, y), z)$, onde $f(x, y) = P'$ é a projeção de P em S . Desta forma, se $z=0$, então $P = P'$ e P está na superfície. Vejamos um exemplo na Figura 08 abaixo:

Figura 08: Exemplo de sistema de coordenadas



Fonte: próprias autoras

Neste sistema de coordenadas, a superfície S tem o mesmo papel do plano Oxy , no sistema de coordenadas cartesianas.

Referências

- [1] TAUSK, D.V. Superfície Regulares. **IME**. Disponível em: <https://www.ime.usp.br/tauski/texts/Superficie.pdf>. Acesso em: 10 abr. 2025.
- [2] Medidas de Superfície. **Só Matemática**. Disponível em: <https://www.somatematica.com.br/fundam/medsup.php>. Acesso em: 07 abr. 2025.
- [3] Superfície - O que é, conceito e definição. **Conceito.DE**. Disponível em: <https://conceito.de/superficie>. Acesso em: 07 abr. 2025.
- [4] Grande, A. L. Uma introdução ao estudo das superfícies parametrizadas regulares utilizando o GeoGebra, 2019. **CIAEM**. Disponível em: <https://conferencia.ciaem-redumate.org/index.php/xvciaem/xv/paper/viewFile/569/372>. Acesso em: 10 abr. 2025.
- [5] Lima, R. F. Introdução à Geometria Diferencial, 2016. **SBM**. Disponível em: https://sbm.org.br/wp-content/uploads/2021/10/Introducao-a-Geometria-Diferencial_Ronaldo-Freire-Lima.pdf. Acesso em: 10 abr. 2025.

- [6] Sant, D. O que é métrica, noções básicas sobre métricas para cientistas de dados, 2023. **PW**. Disponível em: <https://planejadorweb.com.br/o-que-e-metrica/>. Acesso em: 2 Mar. 2025.
- [7] Ramani, M. A incrível história de como a França criou o sistema métrico decimal, 2022. **BBC**. Disponível em: <https://www.bbc.com/portuguese/vert-tra-59576741>. Acesso em: 10 Mar. 2025.
- [8] Tenenblat, K. Introdução à Geometria Diferencial. São Paulo: Yangraf Gráfica e Editora, 2008.