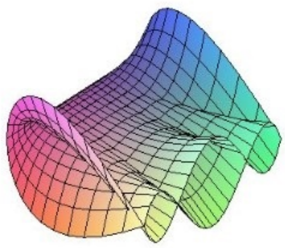

Cálculo Diferencial e Integral: um kit de sobrevivência

"Sistema de Coordenadas Esféricas"

Nayla Gabriela
Vitor Nelson
Rafaela Fuzioka
Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Martins.

1 Conceito de sistema de coordenadas

Um sistema de coordenadas é uma ferramenta matemática que nos permite definir e localizar um ponto qualquer no espaço. Dentre os sistemas utilizados com mais frequência, temos o sistema cartesiano, o qual utiliza a forma (x,y,z).

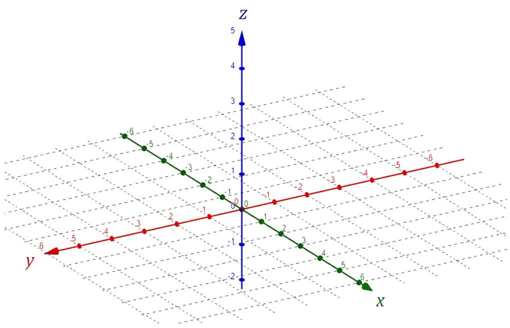

Figura 1: Plano cartesiano

Todavia, existem outros tipos de sistemas mais adequados para determinadas circunstâncias. No decorrer deste trabalho iremos abordar o sistema de coordenadas esféricas, o qual está inserido no grupo das coordenadas tridimensionais. Diferentemente do sistema cartesiano, o sistema de coordenadas esféricas possui a forma (ρ, θ, φ).

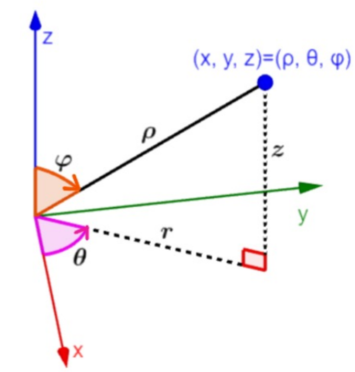

Figura 2: Coordenadas esféricas

Ele é utilizado em diversas áreas da Matemática e das Ciências, especialmente quando trabalhamos com sistemas esféricos ou esferoidais. Esse modelo de sistema possui diversas aplicações. Um exemplo é na Geografia e na Navegação, onde cada ponto da Terra possui coordenadas esféricas (ρ, θ, φ), em que ρ representa o raio (distância entre o ponto e o centro da Terra), θ é a latitude (medida em graus norte ou sul do Equador) e φ é a longitude (medida em graus leste ou oeste do meridiano principal). Na Física e na Engenharia, as coordenadas esféricas são utilizadas para simplificar modelos matemáticos em sistemas tridimensionais. Já no Cálculo Integral, faz-se a mudança de variáveis do sistema de coordenadas cartesianas para o sistema esférico a fim de calcular alguns tipos de integrais, por exemplo, para calcular o volume de uma esfera.

2 Coordenadas esféricas

A coordenada ρ refere-se à distância do ponto P até a origem, com $\rho \geq 0$, sendo coerente com a definição de módulo de um vetor. A coordenada θ é o ângulo entre o semi-eixo $x > 0$ e o ponto P' (projeção de P no plano xy), com $0 \leq \theta < 2\pi$. A coordenada φ é o ângulo entre a reta que liga a origem até o ponto P e o semi-eixo $z > 0$, com $0 \leq \varphi \leq \pi$.

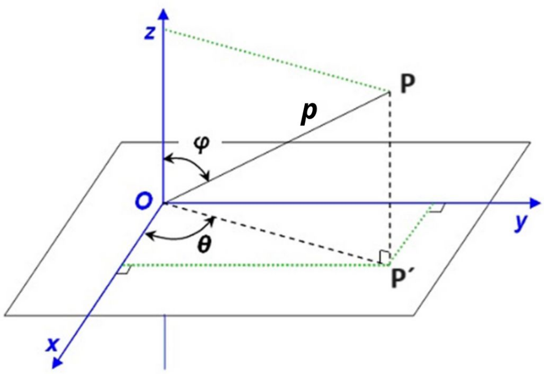

Figura 3: Spherical - coordinates

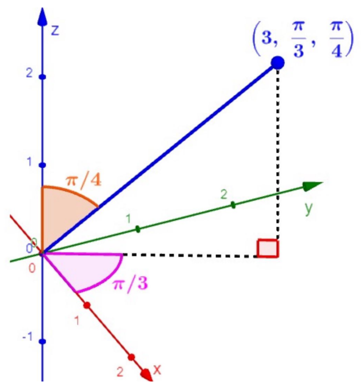

Figura 4: Neurochispas - Exemplo de um ponto na coordenada esférica

3 Relação entre os planos

É possível ainda definirmos uma relação entre o sistema cartesiano e o esférico, onde:

$$x = \rho \cos\theta \sin\varphi$$

$$y = \rho \sin\theta \sin\varphi$$

$$z = \rho \cos\varphi$$

sendo as inversas dadas por:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$
$$\theta = arctg\left(\frac{y}{x}\right)$$
$$\varphi = arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right)$$

4 Exercícios

Exercício 1 Se tivermos as coordenadas esféricas $(3, \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{4})$, qual é o seu equivalente em coordenadas cartesianas?

Resolução Podemos ver os valores $\rho = 3$, $\theta = \dfrac{2\pi}{3}, \varphi = \dfrac{\pi}{4}$. Usamos os valores com as fórmulas vistas acima para encontrar o valor de x:

$$x = \rho \sin(\varphi) \cos(\theta)$$
$$x = 3 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$
$$x = -1.06$$

O valor de y é:

$$y = \rho \sin(\varphi) \sin(\theta)$$
$$y = 3 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$
$$y = 1.84$$

O valor de z é:

$$z = \rho \cos(\varphi)$$
$$z = 3 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$
$$z = 2.12$$

As coordenadas cartesianas do ponto são (-1.06, 1.84, 2.12).

Exercício 2 Temos as coordenadas cartesianas (2,3,4). Qual é o seu equivalente em coordenadas esféricas?

Resolução: Podemos observar os valores x=2, y=3, z=4. Encontramos os valores de ρ, θ e φ, usando as fórmulas derivadas. Assim, o valor de ρ é:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$
$$\rho = \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2}$$
$$\rho = \sqrt{4 + 9 + 16}$$
$$\rho = \sqrt{29}$$
$$\rho = 5.39$$

Agora, usamos a tangente inversa para encontrar θ:

$$\theta = tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$
$$\theta = tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)$$
$$\theta = 0.98 \ rad$$

Esse valor é correto, pois o ponto está no primeiro quadrante (os valores de x e y são positivos).

Usamos o cosseno inverso para encontrar o valor de φ:

$$\varphi = cos^{-1}\left(\frac{z}{\rho}\right)$$
$$\varphi = cos^{-1}\left(\frac{4}{5.39}\right)$$
$$\varphi = 0.73\ rad$$

As coordenadas esféricas do ponto são (5.39, 0.98, 0.73).

Exercício 3 Transforme a equação da esfera centrada na origem com raio r: $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ para uma equação do sistema de coordenadas esférico.

Resolução Dado um ponto arbitrário (x,y,z) dessa esfera, vimos anteriormente que:

$$x = \rho \cos\theta \sin\varphi$$
$$y = \rho \sin\theta \sin\varphi$$
$$z = \rho \cos\varphi$$

Substituindo as igualdades na equação dada no enunciado, obtemos:

$$(\rho \cos\theta \sin\varphi)^2 + (\rho \sin\theta \sin\varphi)^2 + (\rho \cos\varphi)^2 = r^2$$
$$\rho^2 \cos^2\theta \sin^2\varphi + \rho^2 \sin^2\theta \sin^2\varphi + \rho^2 \cos^2\varphi = r^2$$
$$\rho^2(\cos^2\theta \sin^2\varphi + \sin^2\theta \sin^2\varphi + \cos^2\varphi) = r^2$$
$$\rho^2((\cos^2\theta + \sin^2\theta)\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) = r^2$$
$$\rho^2(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) = r^2$$
$$\rho^2 = r^2$$

Como $r > 0$ e $\rho \geq 0$, concluímos que $\rho = r$. Isso significa que os pontos (x,y,z) que pertencem a essa esfera são tais que, transformando em coordenadas esféricas (ρ, θ, φ), satisfazem a equação $\rho = r$, sendo θ e φ quaisquer, com $\theta \in [0, 2\pi)$ e $\varphi \in [0, \pi]$. Logo, temos uma equação para a esfera centrada na origem de raio r, no sistema esférico (sendo ela uma equação bem mais simplificada).

Observe que, pela definição, uma esfera centrada na origem e com raio r é formada por todos os pontos cuja distância à origem é igual a r. Isso é exatamente o que temos em $\rho = r$.

Exercício 4 Transforme a equação de um cone com vértice na origem e eixo paralelo ao eixo Oz, dada por $z^2 = x^2 + y^2$, para uma equação do sistema de coordenadas esférico.

Seja (x,y,z) um ponto arbitrário do cone, diferente da origem. Relembramos que:

$$x = \rho \cos\theta \sin\varphi$$
$$y = \rho \sin\theta \sin\varphi$$
$$z = \rho \cos\varphi$$

Como (x,y,z) não é a origem, então $\rho > 0$. Substituindo as igualdades acima na equação $z^2 = x^2 + y^2$, obtemos:

$$(\rho \cos\varphi)^2 = (\rho \cos\theta \sin\varphi)^2 + (\rho \sin\theta \sin\varphi)^2$$
$$\rho^2 \cos^2\varphi = \rho^2 \cos^2\theta \sin^2\varphi + \rho^2 \sin^2\theta \sin^2\varphi$$

$$\rho^2 \cos^2 \varphi = \rho^2(\cos^2 \theta \sin^2 \varphi + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi)$$
$$\rho^2 \cos^2 \varphi = \rho^2[(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \sin^2 \varphi]$$
$$\rho^2 \cos^2 \varphi = \rho^2 \sin^2 \varphi$$

Como $\rho > 0$, então:

$$\cos^2 \varphi = \sin^2 \varphi$$
$$\cos \varphi = \pm \sin \varphi$$
$$\varphi = \frac{\pi}{4} \textit{ ou } \varphi = \frac{3\pi}{4}$$

Portanto, $\Lambda = \left\{ (\rho, \theta, \varphi) : \varphi = \frac{\pi}{4} \textit{ ou } \varphi = \frac{3\pi}{4} \right\}$ é o conjunto dos pontos que satisfazem essa equação.

Logo, encontramos uma equação no sistema de coordenadas esférico que corresponde à equação do cone no plano cartesiano, de modo mais simplificado.

Referências

[1] BRUSAMARELLO, R.; FRANCO, V. **Geometria Analítica**. Vol. 3. Maringá, PR, Eduem. 2009.

[2] HUERA, J. **Coordenadas Esféricas - Fórmulas e Exemplos**. Neurochispas. Disponível em: https://br.neurochispas.com/trigonometria/coordenadas-esfericas-formulas-e-exemplos. Acesso em: 20 jan. 2024.

[3] FLEMING, H. **Coordenadas Esféricas**. Disponível em: https://fma.if.usp.br/ fleming/diffeo/node4.html. Acesso em: 10 jul. 2024.