

1 O CORPO DOS NÚMEROS COMPLEXOS

1.1 Os números reais

Vamos denotar por \mathbb{R} o conjunto dos números reais e supor conhecido suas principais propriedades tais como a sua relação de ordem, completude de \mathbb{R} , ou equivalentemente a existência de supremo e de ínfimo para conjuntos limitados, sequências, séries, continuidade e diferenciabilidade de funções reais de uma ou mais variáveis reais e suas propriedades.

Usaremos ao longo do texto o fato de \mathbb{R} ser um corpo completo.

1.2 O corpo dos números complexos

Definimos o conjunto dos números complexos, denotado por \mathbb{C} , como sendo o conjunto de todos os pares ordenados (a, b) em que $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{C} = \{(a, b); a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Munimos o conjunto \mathbb{C} com as seguintes operações:

1. Adição: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$;
2. Multiplicação: $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.

É fácil verificar que valem as seguintes propriedades:

- $(0, 0) + (a, b) = (a, b) + (0, 0) = (a, b)$,
- $(1, 0) \cdot (a, b) = (a, b) \cdot (1, 0) = (a, b)$.

Aos elementos de \mathbb{C} chamamos de números complexos. Os números complexos surgiram da necessidade de resolver equações algébricas tais como $x^2 + 1 = 0$. Um tratamento rigoroso para os números complexos só foi apresentado em 1837 e foi devido a Hamilton.

É usual denotar o par $(0, 0)$ por 0 e o par $(1, 0)$ por 1 e vamos adotar esta notação. Também vamos denotar o número complexo $(0, 1)$ por i .

Utilizaremos as letras $z, w, z_1, z_2, w_1, w_2, \dots$ para representar números complexos.

É fácil verificar que valem as seguintes propriedades.

Propriedades 1.1 *Para quaisquer números complexos z, z_1, z_2, z_3 valem:*

1. *Associatividade da adição:* $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$;
2. *Comutatividade da adição:* $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$;
3. *Existência do elemento neutro:* $0 + z = z$;
4. *Existência do elemento oposto:* dado $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ existe $-z = (-x, -y) \in \mathbb{C}$ tal que $z + (-z) = 0$;
5. *Associatividade da multiplicação:* $z_1(z_2z_3) = (z_1z_2)z_3$;
6. *Comutatividade da multiplicação:* $z_1z_2 = z_2z_1$;
7. *Existência do elemento unidade:* $1z = z$;
8. *Existência do inverso:* se $z = (x, y) \neq 0$, então existe $z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) \in \mathbb{C}$ tal que $zz^{-1} = 1$;
9. *Distributividade da multiplicação com relação a adição:* $z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$.

Essas propriedades nos dizem que \mathbb{C} , munido das operações definidas acima, é um corpo.

Como vamos denotar por i o número complexo $(0, 1)$, notemos que $i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$ e portanto, a equação $x^2 + 1 = 0$ tem em \mathbb{C} as soluções $\pm i$. O corpo dos complexos **não é ordenado**, pois em um corpo ordenado por uma relação de ordem \leq tem-se sempre $0 \leq w^2, \forall w$. Esta observação demonstra o seguinte resultado.

Proposição 1.2 *Não existe relação de ordem alguma sobre o corpo \mathbb{C} que o torne ordenado.*

Como $i = (0, 1)$ e $1 = (1, 0)$ podemos escrever o número complexo $z = (x, y) = x \cdot 1 + y \cdot i$ ou simplesmente $z = x + yi$. Em $z = x + yi$ chamamos x de a parte real de z e y a parte imaginária de z :

$$x = \operatorname{Re}z, \quad y = \operatorname{Im}z.$$

Dois números complexos $z = x_1 + iy_1$ e $w = x_2 + iy_2$ são iguais se e somente se, $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$. É claro que dois números complexos são iguais se, e somente se, possuem a mesma parte real e a mesma parte imaginária. Assim, se $z = x + iy$ é não nulo, segue que $x \neq 0$ ou $y \neq 0$.

Observe que, para um inteiro n , i^n pode assumir apenas quatro possíveis valores que são $1, i, -1, -i$. De fato, dividindo n por 4 obtemos restos iguais a $r = 0, 1, 2$ ou 3 , assim como $i^4 = 1$ temos $i^n = i^{4m+r} = (i^4)^m i^r = i^r$, para algum inteiro m e r , o que resulta em $1, i, -1, -i$.

\mathbb{R} como subconjunto de \mathbb{C} : Note que \mathbb{R} pode ser visto como um subconjunto de \mathbb{C} , pois todo $x \in \mathbb{R}$ é escrito como $x = x + i0$. Além disso, as operações de adição e multiplicação de \mathbb{R} são as mesmas definidas em \mathbb{C} . De fato, dados x e y reais temos

$$\begin{aligned}x + y &= x(1,0) + y(1,0) = (x + y)(1,0) = (x + y, 0) = (x + y)1 + 0i, \\xy &= (x,0)(y,0) = (xy - 0,0) = xy(1,0) = xy + 0i.\end{aligned}$$

Uma aplicação bijetora entre dois corpos que preserva a soma e o produto é chamada de isomorfismo de corpos. Da observação acima podemos enunciar o seguinte resultado.

Proposição 1.3 \mathbb{C} possui um subcorpo isomorfo a \mathbb{R} .

Demonstração: Defina $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $\phi(a) = (a, 0)$. Como vimos

$$\phi(a + b) = \phi(a) + \phi(b) \quad \text{e} \quad \phi(ab) = \phi(a)\phi(b).$$

Como $\phi(a) = \phi(1 \cdot a) = \phi(1)\phi(a)$ segue que se $\phi(1) = 0$, então $\phi \equiv 0$. Logo, como $\phi(a) \neq 0$ para algum $a \in \mathbb{R}$, segue que ϕ é isomorfismo entre \mathbb{R} e $\phi(\mathbb{R}) \subset \mathbb{C}$. \square

Note que na propriedade (8) apresentamos z^{-1} , que é de fácil dedução. De fato, se $z = x + iy$ é não nulo, então $z^{-1} = u + iv$ deve satisfazer

$$\begin{cases}xu - yv &= 1 \\yu + xv &= 0\end{cases} \quad (1.2.1)$$

que é um sistema de equações lineares nas variáveis u, v com determinante não nulo dado por $x^2 + y^2$. Logo, o sistema linear possui uma única solução que pode ser obtida usando a regra de Cramer:

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v = \frac{-y}{x^2 + y^2}.$$

Assim,

$$z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) + i \left(\frac{-y}{x^2 + y^2} \right). \quad (1.2.2)$$

Vamos provar agora outra importante propriedade: Se $z_1 z_2 = 0$, então $z_1 = 0$ ou $z_2 = 0$. De fato, sejam $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$ e suponha que $z_1 z_2 = 0$ mas $z_1 \neq 0$. Vamos provar que $z_2 = 0$. Como $z_1 z_2 = 0$ então temos que as equações

$$\begin{cases}x_1 x_2 - y_1 y_2 &= 0 \\y_1 x_2 + x_1 y_2 &= 0\end{cases} \quad (1.2.3)$$

devem ser satisfeitas. Como esse sistema homogêneo de equações lineares (nas variáveis x_2 e y_2) tem determinante não nulo dado por $x_1^2 + y_1^2$, segue que a única solução é $x_2 = y_2 = 0$. Ou ainda, como \mathbb{C} é um corpo e $z_1 \neq 0$, existe z_1^{-1} e então $0 = z_1^{-1}0 = z_1^{-1}(z_1 z_2) = (z_1^{-1} z_1) z_2 = z_2$, o que mostra que $z_2 = 0$.

As operações subtração e divisão são consequências da adição e multiplicação:

- Subtração: $z - w = z + (-w)$;
- Divisão: $\frac{z}{w} = zw^{-1}$, desde que $w \neq 0$.

Segue imediatamente que:

- $\frac{z_1 + z_2}{z_3} = (z_1 + z_2)z_3^{-1} = z_1 z_3^{-1} + z_2 z_3^{-1} = \frac{z_1}{z_3} + \frac{z_2}{z_3}$.
- $\frac{z_1 z_2}{z_3 z_4} = (z_1 z_2) \cdot (z_3 z_4)^{-1} = (z_1 z_2) \cdot (z_3^{-1} z_4^{-1}) = \left(\frac{z_1}{z_3}\right) \cdot \left(\frac{z_2}{z_4}\right)$.

Representação no plano: Como o número complexo $z = (x, y)$ pode ser escrito com $z = x(1, 0) + y(0, 1)$ podemos identificar \mathbb{C} ao espaço vetorial de dimensão 2 sobre o corpo dos reais: \mathbb{R}^2 gerado pelos vetores $(1, 0)$ e $(0, 1)$. Assim, é possível representar um complexo $z = x + yi$ como sendo um ponto no sistema de coordenadas retangulares: a primeira coordenada x é marcada sobre o eixo horizontal, chamado eixo real; a segunda coordenada é marcada sobre o eixo vertical, chamado de eixo imaginário.

É também usual e útil em diversas representações gráficas, representar um complexo $z = (x, y)$ graficamente como um vetor com origem na origem do sistema e extremidade no ponto (x, y) .

Conjugado de um complexo: Se $z = x + iy \in \mathbb{C}$ definimos o conjugado de z , denotado por \bar{z} , por $\bar{z} = x - yi$. O conjugado \bar{z} tem uma representação geométrica simples: \bar{z} é o simétrico de z em relação ao eixo real. Veja a figura 1.1.

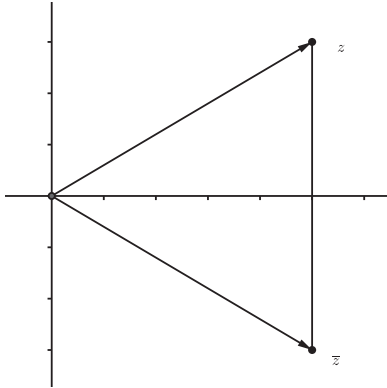


Figura 1.1: O conjugado de um número complexo

O módulo de z é denotado por $|z|$ e é definido por $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. A expressão $\sqrt{x^2 + y^2}$ aparece naturalmente no trabalho com números complexos e representa graficamente o comprimento do segmento de reta com extremidades na origem $(0,0)$ e em $z = (x,y)$. A expressão para o módulo pode ser deduzida por meio do teorema de Pitágoras. Veja a figura 1.2.

Note que tanto z quanto \bar{z} possuem o mesmo módulo: $|\bar{z}| = |z|$.

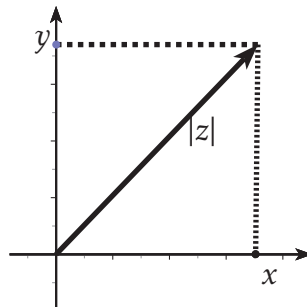


Figura 1.2: Módulo de um número complexo

Como $z\bar{z} = x^2 + y^2$, segue que $|z|^2 = z\bar{z}$. Portanto, se $z \neq 0$, tem-se

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2},$$

concordando com (1.2.2).

A distância entre dois complexos $z = x_1 + iy_1$ e $w = x_2 + iy_2$ é dada pela distância entre os pontos correspondentes do plano \mathbb{R}^2 :

$$d(z, w) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Assim, podemos notar que $d(z, w) = |z - w|$.

Concluimos que em \mathbb{C} há uma função distância que o torna um espaço métrico. Veremos mais tarde que \mathbb{C} é um espaço métrico completo no sentido que as sequências de Cauchy em \mathbb{C} são convergentes em \mathbb{C} .

Proposição 1.4 Dado o complexo $z = a + bi$, o polinômio $p(x) = x^2 - 2ax + a^2 + b^2$ tem z e \bar{z} como raízes.

Demonstração: Basta substituir no polinômio. □

Propriedades 1.5 Para quaisquer números complexos z e w valem:

1. $Re(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$;
2. $Im(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$;
3. $|\bar{z}| = |z|$;
4. $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$;
5. $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$;
6. $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$;
7. $\left| \frac{z}{w} \right| = \frac{|z|}{|w|}$, desde que $w \neq 0$;
8. $\overline{\bar{z}} = z$;
9. $Re(z) \leq |Re(z)| \leq |z|$ e $Im(z) \leq |Im(z)| \leq |z|$;
10. $|z + w| \leq |z| + |w|$ (desigualdade triangular). Veja figura 1.2.
11. $||z| - |w|| \leq |z + w|, \forall z, w \in \mathbb{C}$.

H]

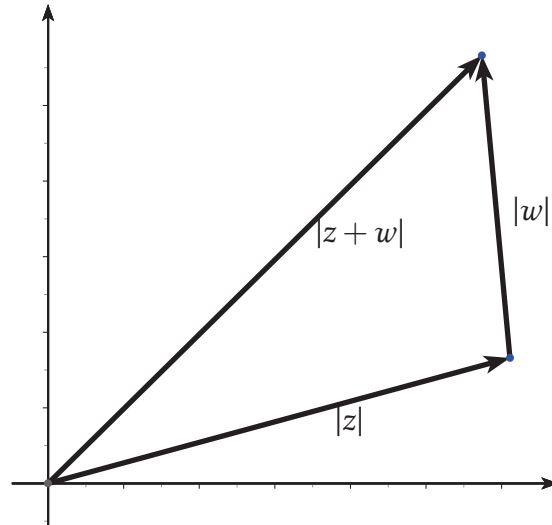


Figura 1.3: Ilustração da desigualdade triangular

Vamos demonstrar a desigualdade triangular.

$$\begin{aligned} |z+w|^2 &= (z+w)\overline{(z+w)} = (z+w)(\bar{z}+\bar{w}) \\ &= z\bar{z} + w\bar{w} + z\bar{w} + w\bar{z} \\ &= |z|^2 + |w|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) \\ &\leq |z|^2 + |w|^2 + 2|z\bar{w}| \\ &\leq |z|^2 + |w|^2 + 2|z||w| = (|z|+|w|)^2. \end{aligned}$$

Segue que

$$|z+w| \leq |z|+|w|, \forall z, w \in \mathbb{C}. \quad (1.2.4)$$

Por indução, pode-se mostrar que

$$\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |z_k|. \quad (1.2.5)$$

Agora a outra desigualdade:

$$||z|-|w|| \leq |z+w|, \forall z, w \in \mathbb{C}. \quad (1.2.6)$$

De fato, como $|z| = |(z+w) - w| \leq |z+w| + |w|$ e portanto, $|z| - |w| \leq |z+w|$. Do mesmo modo, $|w| = |(w+z) - z| \leq |z+w| + |z|$ e portanto, $|w| - |z| \leq |z+w|$. Logo, temos, $||w| - |z|| \leq |z+w|$.

Proposição 1.6 (Desigualdade de Cauchy) *Sejam a_1, a_2, \dots, a_n e b_1, b_2, \dots, b_n números complexos. Então, vale a desigualdade*

$$|a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n|^2 \leq (|a_1|^2 + |a_2|^2 + \dots + |a_n|^2)(|b_1|^2 + |b_2|^2 + \dots + |b_n|^2).$$

Ou usando somatório:

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k b_k \right|^2 \leq \sum_{k=1}^n |a_k|^2 \sum_{k=1}^n |b_k|^2.$$

Demonstração: Podemos supor que todos os b_k são não nulos.

Seja λ um complexo arbitrário. Calculemos

$$\sum_{k=1}^n |a_k - \lambda \bar{b}_k|^2 \geq 0.$$

É fácil ver que

$$\sum_{k=1}^n |a_k - \lambda \bar{b}_k|^2 = \sum_{k=1}^n |a_k|^2 + |\lambda|^2 \sum_{k=1}^n |b_k|^2 - 2\operatorname{Re} \left(\bar{\lambda} \sum_{k=1}^n a_k b_k \right).$$

Como esta expressão é não negativa para todo λ , tomemos λ dado por

$$\lambda = \frac{\sum_{k=1}^n a_k b_k}{\sum_{k=1}^n |b_k|^2}.$$

Substituindo o valor de λ , obtemos

$$\sum_{k=1}^n |a_k|^2 - \frac{\left| \sum_{k=1}^n a_k b_k \right|^2}{\sum_{k=1}^n |b_k|^2} \geq 0,$$

de onde segue o resultado. □

Uma aplicação da desigualdade de Cauchy é o seguinte resultado devido a Laguerre, que dá um critério de localização de raízes de polinômios.

Teorema 1.7 (Laguerre) *Seja $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ polinômio com coeficientes reais e todas as suas raízes reais. Então, todas as raízes pertencem ao intervalo com extremidades*

$$\frac{-a_{n-1}}{n} \pm \frac{n-1}{n} \sqrt{a_{n-1}^2 - \frac{2n}{n-1}a_{n-2}}.$$

Demonstração: Seja y uma raiz e y_1, y_2, \dots, y_{n-1} as outras raízes. Logo,

$$p(x) = (x - y)(x - y_1) \cdots (x - y_{n-1}).$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned} -a_{n-1} &= y + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \\ a_{n-2} &= y(y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1}) + \sum_{i < j} y_i y_j \\ a_{n-1}^2 - 2a_{n-2} - y^2 &= \sum_{i=1}^{n-1} y_i^2. \end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Cauchy a $(y_1, y_2, \dots, y_{n-1})$ e $(1, 1, \dots, 1)$ temos

$$\begin{aligned} (a_{n-1} + y)^2 &= (y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1})^2 \\ &\leq (n-1) \sum_{i=1}^{n-1} y_i^2 = (n-1)(a_{n-1}^2 - 2a_{n-2} - y^2). \end{aligned}$$

Ou seja, $y^2 + \frac{2a_{n-1}}{n}y + \frac{2(n-1)}{n}a_{n-2} - \frac{n-2}{n}a_{n-1}^2 \leq 0$.

Assim, y está entre as duas raízes da função quadrática e estas são nossas extremidades.

□

Uma propriedade importante, consequência do conceito de conjugado, é a que afirma que em polinômios com coeficientes reais, as raízes complexas aparecem em pares conjugados. Vamos demonstrar este fato.

Proposição 1.8 *Seja $p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ um polinômio com coeficientes reais a_k , $k = 0, \dots, n$. Se $a + bi$ é uma raiz de $p(x)$, então $a - bi$ também é uma raiz.*

Demonstração: De fato, se $a + bi$ então $p(a + bi) = 0$. Mas como os coeficientes são reais podemos escrever

$$\begin{aligned} p(a - bi) &= p(\overline{a + bi}) = \sum_{k=0}^n a_k \overline{(a + bi)^k} \\ &= \overline{\sum_{k=0}^n a_k (a + bi)^k} \\ &= \overline{p(a + bi)} = \overline{0} = 0. \end{aligned}$$

Segue que $a - bi$ também é raiz de p . □

Um exemplo é o polinômio de coeficientes reais $p(x) = x^2 + 1$ que tem as raízes i e sua conjugada $-i$.

Exercícios 1.9

1. Demonstre as propriedades 1.1.
2. Demonstre a propriedade 1.5.
3. Determine as partes real e imaginária dos números complexos:
 - (a) $\frac{1}{z}$;
 - (b) $\frac{z - a}{z + a}, a \in \mathbb{R}$;
 - (c) z^2 ;
 - (d) $(1 + i)^3$.
4. Se $z \neq 0$, escreva z^{-1} em função de \bar{z} e $|z|$.
5. Mostre que $z = \bar{z}$ se, e somente se, z é real.
6. Se z e w são números complexos, mostre que:

- (a) $|z + w|^2 = |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) + |w|^2$.
- (b) $|z - w|^2 = |z|^2 - 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) + |w|^2$.
- (c) $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$.
7. $|z + w|^2 \leq (|z| + |w|)^2$.
8. Reduça cada número complexo à forma $a + bi$:
- (a) $\frac{1 + i}{1 - i}$.
- (b) $\frac{i}{1 - i} + \frac{1 - i}{i}$.
- (c) $i^{23} - 4i^9 - 4i$.
9. Determine para quais valores valem as igualdades:
- (a) $z = -z$.
- (b) $z = z^{-1}$.
- (c) $z = \bar{z}$.
- (d) $z^{-1} = \bar{z}$.

Exercícios 1.10

1. **Existência da raiz quadrada:** Dados os complexos $a + bi$, determine explicitamente o complexo $x + yi$ tal que $(x + yi)^2 = a + bi$.
Sugestão: como $(x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$, então comparando temos

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases} \quad (1.2.7)$$

Elevando cada equação ao quadrado e somando tem-se

$$(x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2 = (x^2 + y^2)^2 = a^2 + b^2.$$

Logo, $x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$. Juntando com a primeira equação de 1.2.7 obtemos

$$x^2 = \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + b^2}) \quad (1.2.8)$$

$$y^2 = \frac{1}{2}(-a + \sqrt{a^2 + b^2}). \quad (1.2.9)$$

As equações 1.2.8 e 1.2.9 produzem dois valores opostos para x e dois valores opostos para y . Eles não podem ser combinados de qualquer maneira. Estes valores devem satisfazer a segunda equação de 1.2.7. Assim, devemos tomar cuidado para escolher um valor para x e um valor para y de modo que a segunda equação em 1.2.7 tenha o mesmo sinal de b .

A solução é dada por

$$x + iy = \sqrt{a + bi} = \pm \left(\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} + i \frac{b}{|b|} \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \right),$$

se $b \neq 0$. Se $b = 0$ a solução é $\pm\sqrt{a}$, se $a \geq 0$ ou $\pm i\sqrt{-a}$, se $a < 0$.

Portanto, concluímos que raiz quadrada de um número complexo existe sempre e é um número complexo.

2. Determine as raízes de $z^2 + z + 9 = 0$.
3. Determine as raízes de $z^2 - z + 3 = 0$.
4. Determine as raízes de $z^4 + 16 = 0$.
5. Determine as raízes de $z^2 + z + 1 = 0$.
6. Dizemos que um corpo $(K, +, \cdot)$ é ordenado se existe uma relação \leq entre os elementos de K que satisfaz:
 - (a) $a \leq a$ para todo $a \in K$ (reflexiva);
 - (b) $a \leq b$ e $b \leq a$, então $a = b$ (anti-simétrica);
 - (c) $a \leq b$ e $b \leq c$, então $a \leq c$ (transitiva);

(d) dados $a, b \in K$ tem-se $a < b$, ou $b < a$ ou $a = b$, onde $x < y$ significa $a \leq b$ e $a \neq b$;

(e) se $a \leq b$, então $a + c \leq b + c$ para todo $c \in K$;

(f) se $a \leq b$, então $a \cdot c \leq b \cdot c$ para todo $0 \leq c$.

Verifique que em todo corpo ordenado tem-se $0 \leq x \cdot x$. Conclua que \mathbb{C} não pode ser corpo ordenado.

7. Verifique que a aplicação $\phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\phi(x + yi) = (x, y)$ é uma bijeção. Como ambos lados, domínio e contra-domínio são grupos, verifique que ϕ é um isomorfismo de grupos.

8. Verifique que a aplicação $\phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{M}$ definida por $\phi(x + yi) = \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix}$ é uma bijeção, onde \mathcal{M} é o conjunto das matrizes quadradas de ordem 2 com entradas reais da forma $\begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix}$.

Munindo \mathcal{M} com as operações usuais de adição e multiplicação de matrizes, verifique:

(a) se A e B são elementos de \mathcal{M} então $AB \in \mathcal{M}$.

(b) se A e B são elementos de \mathcal{M} então $AB = BA$.

(c) se $A \in \mathcal{M}$ é não nula, então $A^{-1} \in \mathcal{M}$.

(d) verifique que $(\mathcal{M}, +, \cdot)$ é um corpo.

(e) verifique que ϕ é um isomorfismo de corpos.

9. Seja $P[x]$ o espaço dos polinômios com coeficientes reais. Dados polinômios p e q , mostre que a relação $p \sim q$ se, e somente se, $p - q$ é divisível por $x^2 + 1$, é uma relação de equivalência. Mostre que $P[x]/\sim$ pode ser identificado ao corpo dos números complexos.

10. Os inteiros gaussianos são os complexos $z = a + bi$ em que a e b são inteiros. Verifique que o conjunto dos inteiros gaussianos é um subanel dos números complexos. Verifique que as unidades são ± 1 e $\pm i$

1.3 Representação polar e fórmula de Moivre

Dado $z = x + iy$ não nulo seja θ_0 o ângulo que o eixo real positivo forma com o vetor correspondente a z , no sentido anti-horário. Veja a figura 1.3.

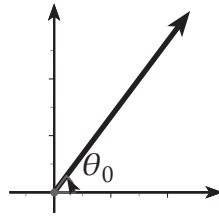


Figura 1.4: argumento de z

Do nosso conhecimento de geometria, desde que $z \neq 0$, obtemos

$$\begin{aligned}\cos(\theta_0) &= \frac{x}{|z|}, \\ \sin(\theta_0) &= \frac{y}{|z|},\end{aligned}$$

e portanto,

$$z = |z|(\cos \theta_0 + i \sin \theta_0).$$

Note que

$$z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta) \tag{1.3.1}$$

ainda vale para $\theta = \theta_0 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, o que mostra que z tem infinitas representações da forma 1.3.1.

Uma representação da forma 1.3.1 é chamada de **representação polar** de z e θ é chamado de um argumento de z , denotado por $\arg(z)$. Observamos que

$$\arg(z) = \{\theta = \theta_0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Note que $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$.

O argumento de z pertencente ao intervalo $(-\pi, \pi]$ é chamado de **argumento principal** do complexo z e é representado por $\text{Arg}(z)$.

Dado $z \in \mathbb{C}$ não nulo, se $\alpha = \text{Arg}(z)$, a representação dada por

$$z = |z|(\cos \alpha + i \sin \alpha) \quad (1.3.2)$$

é chamada de **forma polar** de z .

É importante observar que $\text{Arg}(zw) \neq \text{Arg}(z) + \text{Arg}(w)$ e $\text{Arg}(z^{-1}) \neq -\text{Arg}(z)$. De fato, tome como exemplo $z = -1$ e $w = +i$.

Voltaremos à função argumento principal na seção §?? do capítulo ?? página ??.

Fórmula de De Moivre: Sejam dados os complexos z e w , ambos não nulos, e

$$z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta), \quad (1.3.3)$$

$$w = |w|(\cos \alpha + i \sin \alpha) \quad (1.3.4)$$

suas representações polares. Segue que zw é dado por

$$zw = |z||w|(\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \alpha + i \sin \alpha) \quad (1.3.5)$$

$$zw = |z||w|[(\cos \theta \cos \alpha - \sin \theta \sin \alpha) + i(\cos \theta \sin \alpha + \sin \theta \cos \alpha)] \quad (1.3.6)$$

$$zw = |z||w|[\cos(\theta + \alpha) + i \sin(\theta + \alpha)]. \quad (1.3.7)$$

Logo,

$$\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w). \quad (1.3.8)$$

Veja a figura 1.3 que ilustra esse fato.

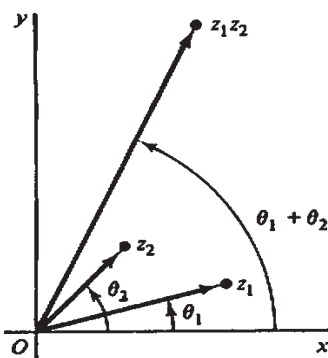


Figura 1.5: Ilustração do argumento no produto

Considerando $z = w$ e por indução, obtemos de (1.3.7) que

$$z^n = |z|^n [\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)], \quad (1.3.9)$$

para todo natural $n \geq 1$.

Como $z\bar{z} = x^2 + y^2 > 0$, então $\arg(z\bar{z}) = 0 + 2k\pi$. Logo, $\arg(z) + \arg(\bar{z}) = 2k\pi$ e assim $\arg(\bar{z}) = -\arg(z) + 2k\pi = -\arg(z)$.

De $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ temos que

$$\arg(z^{-1}) = \arg(\bar{z}) = -\arg(z). \quad (1.3.10)$$

Segue que

$$z^{-1} = |z|^{-1} [\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)]. \quad (1.3.11)$$

Se $n \geq 1$ é inteiro, obtemos

$$z^{-n} = |z|^{-n} [\cos(-n\theta) + i \sin(-n\theta)]. \quad (1.3.12)$$

Assim, se $n \in \mathbb{Z}$ temos

$$z^n = |z|^n [\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)]. \quad (1.3.13)$$

Observe que demonstramos em (1.3.13) que vale a igualdade

$$|z|^n [\cos(\theta) + i \sin(\theta)]^n = |z|^n [\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)], \forall n \in \mathbb{Z} \quad (1.3.14)$$

e portanto

$$\boxed{[\cos(\theta) + i \sin(\theta)]^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta), n \in \mathbb{Z}.} \quad (1.3.15)$$

A equação (1.3.15) é chamada de fórmula de De Moivre ¹.

• Exemplo 1.11

Um exemplo simples para usar a fórmula de De Moivre: calcular $(1 + i)^{80}$.

Como $1 + i = \sqrt{2} \left[\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right]$ temos que $(1 + i)^{80} = (\sqrt{2})^{80} \left[\cos \frac{80\pi}{4} + i \sin \frac{80\pi}{4} \right]$. Isto resulta em $(1 + i)^{80} = 2^{40} [\cos(20\pi) + i \sin(20\pi)] = 2^{40}$.

¹Matemático francês (1667–1754).

1.3.1 Extração de Raízes

A fórmula de De Moivre é importante ferramenta para a extração de raiz de números complexos. Dado w complexo e $n \neq 0$ natural, dizemos que z é uma raiz n -ésima de w se $z^n = w$. Se $w = 0$, é claro que $z = 0$ é a única raiz. Logo, podemos supor $w \neq 0$ e escrever w na sua forma polar

$$w = |w|(\cos \theta_0 + i \sin \theta_0)$$

e uma representação polar para z

$$z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta).$$

Como $z^n = w$, então temos

$$|z|^n [\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)] = |w|(\cos \theta_0 + i \sin \theta_0)$$

e portanto

$$|z| = |w|^{\frac{1}{n}} \tag{1.3.16}$$

$$\theta = \frac{\theta_0 + 2k\pi}{n}, k \in \mathbb{Z}. \tag{1.3.17}$$

Assim podemos reescrever z :

$$z = |w|^{\frac{1}{n}} \left[\cos\left(\frac{\theta_0 + 2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\theta_0 + 2k\pi}{n}\right) \right]. \tag{1.3.18}$$

Obtemos n distintas raízes para $z^n = w$, variando k de 0 a $n - 1$:

$$z_k = |w|^{\frac{1}{n}} \left[\cos\left(\frac{\theta_0 + 2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\theta_0 + 2k\pi}{n}\right) \right], k = 0, 1, \dots, n - 1. \tag{1.3.19}$$

- **Exemplo 1.12**

No caso particular $z^n = 1$, observamos que as raízes $z_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$, possuem todas módulo igual a 1. Isto é, elas localizam-se sobre a circunferência $|z| = 1$. Como possuem argumentos $\frac{2k\pi}{n}, k = 0, 1, \dots, n - 1$, elas são igualmente espaçadas sobre a circunferência.

- **Exemplo 1.13**

Consideremos a equação $z^6 = 1$. Vamos utilizar a fórmula de De Moivre para obter todas as soluções. Primeiramente, escrevemos 1 na forma polar

$$1 = \cos 0 + i \sin 0,$$

com $\theta_0 = 0$ e usamos (1.3.19)

$$z_k = 1 \left[\cos \left(\frac{0 + 2k\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{0 + 2k\pi}{6} \right) \right], k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

As raízes estão no vértice do hexágono regular, veja a figura 1.3.1.

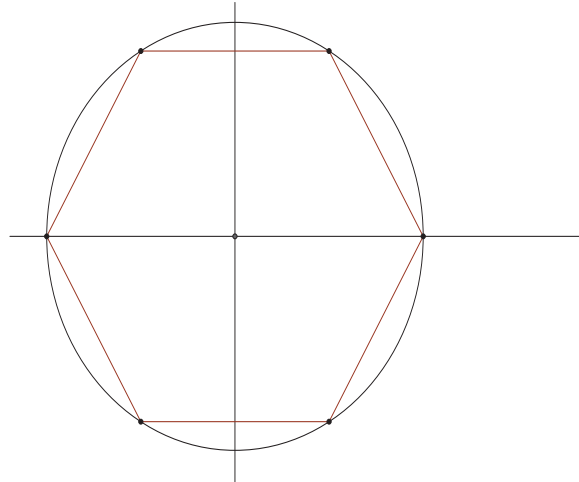


Figura 1.6: Os vértices do hexágono regular são as raízes de $z^6 = 1$.

- Para $k = 0$, obtemos $z_0 = 1$,
- Para $k = 1$, obtemos $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}$,
- Para $k = 2$, obtemos $z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}$,
- Para $k = 3$, obtemos $z_3 = -1$,
- Para $k = 4$, obtemos $z_4 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}$,
- Para $k = 5$, obtemos $z_5 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}$.

Exercícios 1.14

1. Determine as soluções do monômio $z^4 + 16 = 0$.
2. Calcule as n -ésimas raízes da unidade quando $n = 3, 5, 7, 10$, isto é, calcule todas as soluções de $z^n = 1$.
3. Calcule a raiz quadrada de i , isto é, determine z tal que $z^2 = i$.
4. Calcule a raiz cúbica de i , isto é, determine z tal que $z^3 = i$.
5. Calcule a raiz cúbica de $1 + i$, isto é, determine z tal que $z^3 = 1 + i$.
6. Calcule a raiz cúbica de $2\sqrt{2} + \sqrt{3}i$.
7. Calcule a raiz cúbica de $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$.
8. Calcule a raiz cúbica de $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}i$.
9. Determine $\arg(z)$ e $\text{Arg}(z)$ para os complexos dados:
 - (a) $z = -\sqrt{12} - 2i$.
 - (b) $z = 2 - 2i$.
10. Expresse $z = -5 + i\sqrt{75}$ na forma polar.
11. Expresse $z = \sqrt{3} + 1i$ na forma polar.
12. Resolva a equação $z^2 + i = 0$ e use-a para resolver $z^4 + 2iz^2 - 1 = 0$.
13. Represente graficamente os seguintes conjuntos:
 - (a) $\arg(z) = \frac{\pi}{4}$.
 - (b) $0 < \arg(z) < \frac{\pi}{4}$.
 - (b) $-\pi < \arg(z) \leq \pi$.
14. Mostre que $z\bar{z} - z\bar{z}_0 - z_0\bar{z} = r^2 - a^2 - b^2$ representa o círculo de raio r e centro $z_0 = a + bi$.

1.4 O plano complexo

Como vimos, cada número complexo z está naturalmente identificado a um único ponto $(\operatorname{Re}z, \operatorname{Im}z)$ do plano \mathbb{R}^2 . A adição de números complexos é exatamente a lei de adição de vetores de \mathbb{R}^2 . Dados $z_1 = (x_1, y_1)$ e $z_2 = (x_2, y_2)$ números complexos, tracemos os segmentos orientados com origens em $(0,0)$ e extremidades nos pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) . O quarto vértice do paralelogramo é a soma $z_1 + z_2$. Veja a figura 1.4.

A diferença pode ser representada pelo vetor deslocamento do ponto $z_2 = (x_2, y_2)$ até o ponto $z_1 = (x_1, y_1)$, como mostra a figura 1.4.

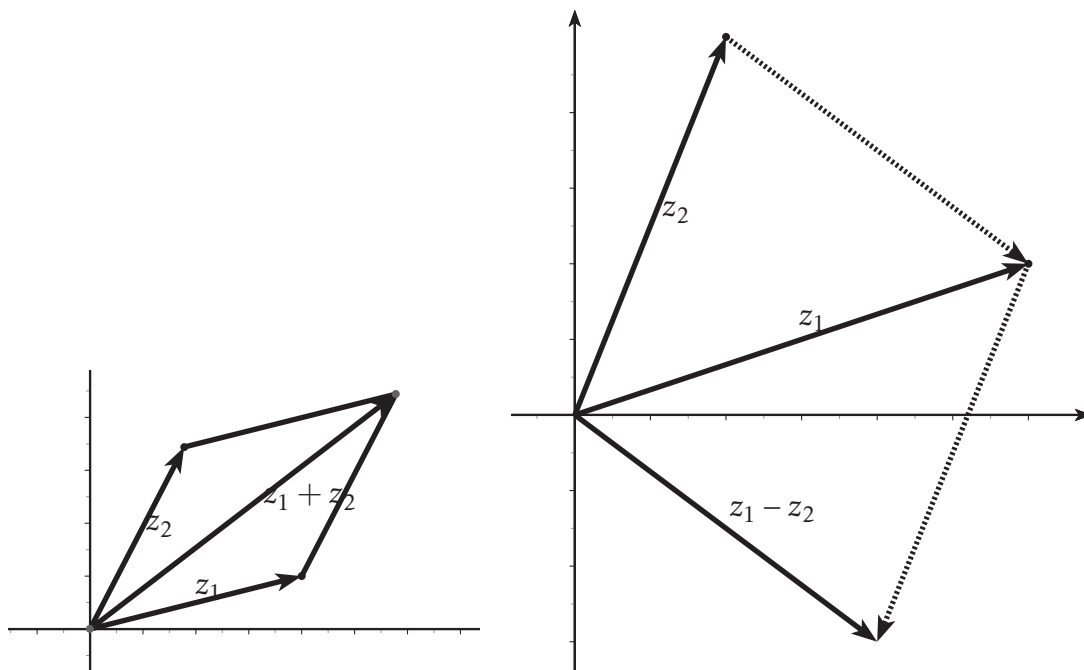


Figura 1.7: Ilustração da adição e da subtração

O exercício 1.10, 6 (c), mostra a lei do paralelogramo: a soma dos quadrados dos comprimentos dos lados de um paralelogramo é igual a soma dos quadrados dos comprimentos de suas diagonais.

1.5 Retas e semi-planos

Da geometria analítica sabemos que um ponto $z_0 = (x_0, y_0)$ e um vetor $w = (x, y)$ determinam uma reta L , sendo dada pelo conjunto

$$L = \{z \in \mathbb{C}; z = z_0 + tw, t \in \mathbb{R}\}.$$

Notemos que $z \in L$ se, e somente se, $z = z_0 + tw$, para algum $t \in \mathbb{R}$. Ou equivalentemente, $t = \frac{z - z_0}{w}$, desde que $w \neq 0$. Segue que se $w \neq 0$, temos que $z \in L$ se, e somente se, $\text{Im}\left(\frac{z - z_0}{w}\right) = 0$. Assim,

$$L = \{z \in \mathbb{C}; \text{Im}\left(\frac{z - z_0}{w}\right) = 0\}.$$

São semi-planos os conjuntos dados por

$$H = \{z \in \mathbb{C}; \text{Im}\left(\frac{z - z_0}{w}\right) > 0\}$$

$$K = \{z \in \mathbb{C}; \text{Im}\left(\frac{z - z_0}{w}\right) < 0\}.$$

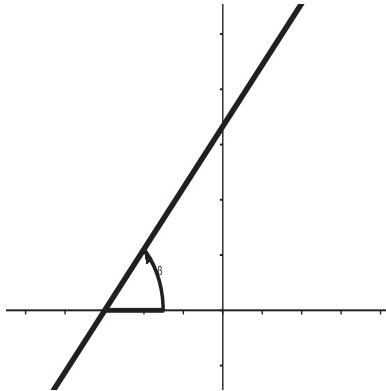


Figura 1.8: Exemplo de reta e semi-planos

Perguntamos em qual dos lados da reta está situado cada semi-plano? Como w é uma direção, podemos assumir que $|w| = 1$ e assim $w = \cos \beta + i \sin \beta$, onde β é o argumento

principal de w . Vamos assumir também que $z_0 = 0$; pois retas com $z_0 \neq 0$ são translações dessa. Façamos

$$H_0 = \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Im}\left(\frac{z}{w}\right) > 0\},$$

$$K_0 = \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Im}\left(\frac{z}{w}\right) < 0\}.$$

Se $z = r[\cos \theta + i \sin \theta]$, então

$$\frac{z}{w} = r[\cos(\theta - \beta) + i \sin(\theta - \beta)].$$

Segue que $z \in H_0$ se, e somente se, $\operatorname{Im}\left(\frac{z}{w}\right) = \sin(\theta - \beta) > 0$, isto é, $\beta < \theta < \pi + \beta$. Logo, H_0 é o semi-plano que está a esquerda de L quando caminhamos sobre L na direção de w .

Voltando a H e K , vemos que $H = z_0 + H_0$ e $K = z_0 + K_0$. Assim, H é o semi-plano à esquerda de L quando caminhamos sobre L na direção de w . Analogamente, K , é o semi-plano à direita de L quando caminhamos sobre L na direção de w .

1.6 O plano estendido e sua representação esférica

No estudo de funções de variável complexa, o valor de uma função pode se aproximar do infinito quando a variável se aproxima de um determinado ponto. Com frequência precisamos abordar essa situação, para isso precisamos introduzir o plano estendido $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, que é a união de \mathbb{C} com um ponto ∞ .

Por analogia ao caso real, estabelecemos que

$$z + \infty = \infty + z = \infty, \forall z \in \mathbb{C}, \quad z \cdot \infty = \infty \cdot z = \infty, \forall z \neq 0,$$

inclusive quando $z = \infty$.

Não é possível definir

$$\infty + \infty, \quad 0 \times \infty, \quad \frac{0}{0}.$$

mas podemos definir

$$\frac{z}{0} = \infty, \quad \frac{z}{\infty} = 0, \quad z \neq 0.$$

Uma representação geométrica para este conjunto é dada por meio da esfera unitária no \mathbb{R}^3 .

Consideremos a esfera do espaço \mathbb{R}^3

$$S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

e o polo norte $N = (0, 0, 1)$. Identificando \mathbb{C} com os pontos $(x_1, x_2, 0)$ do espaço, vemos que \mathbb{C} corta S^2 no equador.

Tomemos um ponto $z \in \mathbb{C}$. A reta unindo os pontos N e z corta a esfera S^2 em um único ponto $z' \neq N$. Temos que z' está no hemisfério norte se $|z| > 1$ e no hemisfério sul se $|z| < 1$. É claro que $z' = z$ se $|z| = 1$. Temos que, deste modo, o plano complexo é representado sobre a esfera de modo biunívoco, com exceção do polo norte N que não corresponde a ponto algum do plano complexo. É então conveniente fazer corresponder a N o ponto infinito ∞ .

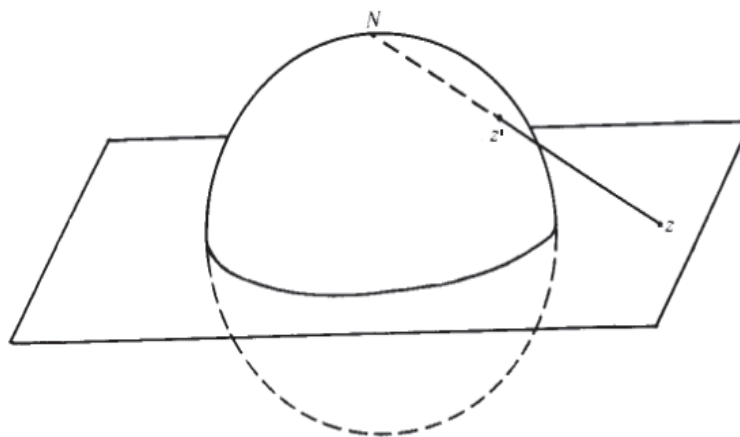


Figura 1.9: modelo para \mathbb{C}_∞ com o plano passando pelo polo sul

A reta que passa pelos pontos N e $z = x + iy$ é dada por

$$L = \{tN + (1-t)z, t \in \mathbb{R}\}.$$

Reescrevendo L , temos

$$L = \{((1-t)x, (1-t)y, t), t \in \mathbb{R}\}.$$

Se t é tal que $((1-t)x, (1-t)y, t) \in S^2$ as coordenadas satisfazem

$$(1-t)^2 x^2 + (1-t)^2 y^2 + t^2 = 1.$$

Logo,

$$\begin{aligned} 1 &= (1-t)^2(x^2 + y^2) + t^2 \\ 1 &= (1-t)^2|z|^2 + t^2 \\ 1-t^2 &= (1-t)^2|z|^2. \end{aligned}$$

Como $t \neq 1$, pois $z \neq \infty$, um cálculo simples fornece

$$t = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}.$$

Assim, obtemos as coordenadas de z' , o ponto sobre a esfera:

$$x_1 = \frac{2x}{|z|^2 + 1} = \frac{z + \bar{z}}{|z|^2 + 1}, \quad (1.6.1)$$

$$x_2 = \frac{2y}{|z|^2 + 1} = \frac{-i(z - \bar{z})}{|z|^2 + 1}, \quad (1.6.2)$$

$$x_3 = t = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}. \quad (1.6.3)$$

Assim, existe uma aplicação bijetora ϕ dada por

$$\phi(x, y) = \left(\frac{2x}{|z|^2 + 1}, \frac{2y}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right)$$

que aplica \mathbb{C} sobre $S^2 - \{N\}$.

Notamos que quando $|z| \rightarrow \infty$ temos que z' se aproxima de N . Assim, é natural definir $\phi(\infty) = N$ e portanto, ϕ pode ser estendida biunivocamente, $\phi : \mathbb{C}_\infty \rightarrow S^2$. Desta forma podemos identificar \mathbb{C}_∞ a S^2 .

Se nos foi dado $z' = (x_1, x_2, x_3) \in S^2 - \{N\}$, obtemos $z \in \mathbb{C}$ tomando $x_3 = t$ e observando que $z = x + iy$ deve satisfazer

$$(1 - x_3)x = x_1, \quad (1 - x_3)y = x_2.$$

Logo,

$$x = \frac{x_1}{1 - x_3}, \quad y = \frac{x_2}{1 - x_3}$$

e portanto

$$z = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}. \quad (1.6.4)$$

Assim, obtemos uma aplicação bijetora $P : S^2 - \{N\} \rightarrow \mathbb{C}$ que aplica cada ponto de $S^2 - \{N\}$ em \mathbb{C} . Definindo $P(N) = \infty$ estendemos P com domínio S^2 e imagem \mathbb{C}_∞ . A aplicação assim obtida $P : S^2 \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ é uma aplicação bijetora. Esta aplicação é chamada de projeção estereográfica. Por meio desta aplicação também identificamos \mathbb{C}_∞ à esfera S^2 .

Esta técnica de inclusão de um ponto, permite transformar um espaço de Hausdorff não-compacto (\mathbb{C} é apenas localmente compacto) em um espaço globalmente compacto, através da inclusão de um único ponto, é conhecida com compactificação de ponto único, ou de Alexandrov², possui aplicações mais gerais, como na teoria de cordas da Física subnuclear.

Definimos a distância entre z e w do plano estendido como sendo a distância entre z' e w' correspondentes, distância do \mathbb{R}^3 : se $z' = (x_1, x_2, x_3)$ e $w' = (x'_1, x'_2, x'_3)$, então

$$d(z, w) = \sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + (x_3 - x'_3)^2}.$$

Usando que z' e w' estão em S^2 , obtemos

$$d(z, w) = \sqrt{2 - 2(x_1x'_1 + x_2x'_2 + x_3x'_3)}.$$

Usando as expressões de x_1, x_2, x_3 , obtemos

$$d(z, w) = \frac{2|z - w|}{\sqrt{(1 + |z|^2)(1 + |w|^2)}}.$$

Se $w \rightarrow \infty$, para a fórmula correspondente obtemos

$$d(z, \infty) = \frac{2}{\sqrt{1 + |z|^2}}.$$

A relação P entre os pontos de S^2 e os pontos de \mathbb{C}_∞ é chamada de projeção estereográfica. Esta aplicação é indispensável para mapas de navegação devido a suas propriedades especiais. Uma destas propriedades é que a projeção estereográfica transforma círculos em círculos (a retas são consideradas círculos de raio infinito).

Outra importante propriedade é que esta aplicação conserva ângulos: isto é, se sobre a esfera duas curvas se cruzam formando um ângulo, então as curvas projetadas sobre o plano mantém o mesmo ângulo.

²Pavel Alexandrov, 1896-1982

Exercícios 1.15

1. Refaça a dedução para as coordenadas da projeção estereográfica dadas em 1.6.1-1.6.3.
2. Deduza a equação 1.6.4.
3. Dados $z = 1 + i$ e $2 + \sqrt{2}i$ determine os pontos correspondentes em S^2 .
4. Represente graficamente no plano complexo os subconjuntos:
 - (a) $\{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$;
 - (b) $\{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$;
 - (c) $\{z \in \mathbb{C}; |z - i| < 1\}$;
 - (d) $\{z \in \mathbb{C}; 1 < |z - 1| < 2\}$;
 - (e) $\{z \in \mathbb{C}; \text{Im}(z) > 0\}$;
 - (f) $\{z \in \mathbb{C}; \text{Im}(z^2) > 0\}$.
5. Encontre as raízes de $z^4 + 4 = 0$ e use-as para fatorar $z^4 + 4$ em dois fatores quadráticos reais.
6. Estabeleça a seguinte identidade

$$\sum_{k=0}^n z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}, z \neq 1, 0$$

e deduza a identidade trigonométrica de Lagrange

$$1 + \cos(\theta) + \cos(2\theta) + \dots + \cos(n\theta) = \frac{1}{2} + \frac{\sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta\right]}{2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)},$$

$$0 < \theta < 2\pi;$$

7. Mostre que se $w \neq 1$ é uma raiz n -ésima da unidade, então $\sum_{k=0}^{n-1} w^k = 0$.

1.7 Raízes de polinômios – história

O problema de encontrar raízes de um polinômio é antigo. Já por volta de 1600 AC os babilônios possuíam tabelas que permitiam resolver equações quadráticas. Os gregos antigos resolviam equações quadráticas por meio de construções geométricas, não existia sinal algum de formulação algébrica até 100 DC. Os gregos também tinham métodos aplicáveis a equações cúbicas envolvendo interseção de cônicas.

A solução algébrica da cúbica era desconhecida. Em 1494, Pacioli em sua “Summa Arithmetica” observa que a solução das equações $x^3 + mx = n$ e $x^3 + n = mx$ eram impossíveis.

Em Bolonha, durante a Renascença, os matemáticos descobriram que a equação geral da cúbica poderia ser reduzida aos três tipos básicos: $x^3 + px = q$, $x^3 = px + q$ e $x^3 + q = px$. A separação em casos foi necessário pois eles não conheciam números negativos.

Scipio del Ferro resolveu todos os três casos e certamente passou o seu método a um estudante, Fior. Nicollo Fontana (ou Tartaglia) em 1535 redescobriu o método. Fontana usou o seu método numa competição pública com Fior, mas recusou-se a revelar os detalhes. Finalmente ele foi convencido pelo físico Girolano Cardano a revelar o segredo, mas com a condição de Cardano não revelar a mais ninguém. Quando a “Artis Magnae” de Cardano apareceu em 1545 ela continha uma completa discussão da solução de Fontana. Continha também o método de Ludovico Ferrari, discípulo de Cardano, para resolver a equação de quarto grau por redução a uma cúbica. Girolano sentiu-se desobrigado de cumprir o trato com Tartaglia pois descobriu que o seu método de solução já era conhecido. A solução de Fontana para $x^3 + px = q$ é

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}}.$$

A expressão acima só envolve os coeficientes da equação, adição, subtração, multiplicação, divisão e extração de raiz. Tais expressões são conhecidas como expressões radicais.

O corpo \mathbb{C} foi construído para conter todas as raízes de polinômios reais irreduzíveis. É fácil ver que o polinômio $g(x) = x^2 + ax + b$, com $a, b \in \mathbb{C}$ tem raízes em \mathbb{C} , pois

$$g(x) = \left(x + \frac{a}{2} + d\right) \cdot \left(x + \frac{a}{2} - d\right),$$

onde $\frac{a^2}{4} - b = d^2$. Assim todo polinômio de grau 2 se fatora num produto de dois polinômios complexos lineares.

Para polinômios de grau 3, $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$, com coeficientes em \mathbb{C} , fazendo $h = -\frac{b}{3}$, obtemos

$$f(y + h) = y^3 + py + q, \quad p, q \in \mathbb{C}.$$

Agora usando a substituição de Viète $y = z - \frac{p}{3z}$ obtemos que

$$f\left(z - \frac{p}{3z}\right) = z^3 - \frac{p^3}{27z^3} + q.$$

Assim,

$$z^3 - \frac{p^3}{27z^3} + q = 0$$

é uma equação quadrada em z^3 e portanto

$$z_1^3 = \frac{-q + \sqrt{-\frac{D}{27}}}{2},$$

$$z_2^3 = \frac{-q - \sqrt{-\frac{D}{27}}}{2},$$

são as raízes, onde $D = -(4p^3 + 27q^2)$.

Como $(z_1 z_2)^3 = \frac{-p^3}{27}$ segue que $z_1 z_2 = \frac{-p}{3}\omega$, onde ω é uma raiz cúbica da unidade, por exemplo

$$w = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right).$$

Substituindo z_2 , se necessário, por $z_2\omega$ ou $z_2\omega^2$ podemos supor que

$$z_1 z_2 = -p/3$$

e as raízes da equação $y^3 + py + q = 0$ serão:

$$y_1 = z_1 + z_2, \quad y_2 = wz_1 + w^2z_2, \quad y_3 = w^2z_1 + wz_2.$$

Assim,

$$y_1 = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}}.$$

Segue que polinômios de grau 3 com coeficientes em \mathbb{C} , também tem suas raízes expressas por meio de radicais.

A equação polinomial geral do quarto grau pode ser reduzida, via mudança de variáveis, para

$$z^4 + pz^2 + qz + r = 0,$$

e em seguida reduzida, com $u, v, w \in \mathbb{C}$ convenientes, para a forma

$$\left(z^2 + \frac{u}{2}\right)^2 - (vz + w)^2 = 0.$$

Comparando obtemos que

$$\begin{aligned} p &= u - v^2, \\ q &= -2vw, \\ r &= \frac{u^2}{4} - w^2. \end{aligned}$$

Substituindo em $r = \frac{u^2}{4} - w^2$ obtemos, após uma conta fácil,

$$v^6 + 2pv^4 + (p^2 - 4r)v^2 - q^2 = 0,$$

que é uma equação cúbica em v^2 e as raízes desta equação são determinadas explicitamente por meio de radicais.

Como todas as equações de grau menor ou igual a 4 foram resolvidas por meio de radicais, é natural perguntar como a equação de grau 5 poderia ser resolvida. Muitos matemáticos tentaram em vão, por exemplo Euler e Lagrange. O sentimento geral era que a equação do quinto grau não poderia ser resolvida por radicais. Ruffini em 1813 tentou dar uma prova desta impossibilidade, mas coube a Abel em 1824 provar que a equação geral do quinto grau, é em geral, insolúvel por radicais.

O problema agora era encontrar uma maneira de decidir se uma dada equação de grau 5 poderia ser resolvida por radicais. Em 1832 Evariste Galois, um jovem matemático francês, morre num duelo, mas deixa um belíssimo critério para decidir se uma equação de quinto grau é ou não solúvel por radicais.

Para finalizar esta seção faremos um pequeno comentário sobre a bibliografia. Veja abaixo a lista. Em Hasse temos uma prova diferente para o Teorema fundamental da Álgebra e em Hardy temos a prova dada por Gauss. Em Stewart temos uma prova do Teorema Fundamental da Álgebra que usa a teoria de Galois, esta prova é devido a Legendre. Kuhn apresenta uma prova diferente e um procedimento numérico para localizar as raízes de um polinômio em \mathbb{C}

Referências

- [1] G. Cardano. *Artis Magnae, sive de regulis algebraicis*. T. R. Witmer, trans. ed (1968). MIT Press, Cambridge, Mas.
- [2] W. K. Clifford. *Mathematical Papers*. Chelsea (1968), New York.
- [3] C. Feferman. A easy proof of the fundamental theorem of algebra. *Am. Monthly* 74, 854-55
- [4] C. F. Gauss. *Disquisitiones Arithmeticae*. A.A. Clarke, Trans. (1966) Yale Univ. Press. New Haven.
- [5] H. Hasse. *Number Theory*. Springer Verlag (1978), New York.
- [6] G. H. Hardy. *A course of pure mathematics*. Cambridge (1966).
- [7] L. H. Jacy Monteiro. *Elementos de Álgebra*. LTC (1978), São Paulo.
- [8] H. W. Kuhn. A new proof of the fundamental theorem of algebra. *Mathematical Programming studies* 1, 148-158.
- [9] E. C. Titchmarsh. *The theory of functions*. Oxford (1960).
- [10] I. Stewart. *Galois Theory*. Chapman and Hall (1973), London.