APLICAÇÕES DA DIFERENCIAÇÃO

Regra de L'Hopital

Preceptora:	Isadora Honório Guimarães
Coordenadora:	Patrícia Hilário Tacuri Córdova

Teorema 0.1 *Suponha que f e g sejam funções diferenciáveis e $g'(x) \neq 0$ próximo a a (exceto possivelmente em a). Suponha que:*

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \quad e \quad \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

ou que:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty \quad e \quad \lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$$

(Em outras palavras, temos uma forma intedeterminada do tipo $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$). Então

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

se o limite do lado direito existir (ou é ∞ ou é $-\infty$).

Exercício 1: Seja $f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = x + 1$ calcule

$$\lim_{x \to -1} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Como

$$\lim_{x \to -1} x^2 - 1 = (-1)^2 - 1 = 1 - 1 = 0$$

e

$$\lim_{x \to -1} x + 1 = -1 + 1 = 0,$$

então, o $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^2-1}{x+1}$ resulta em uma indeterminação do tipo $\dfrac{0}{0}$, portanto é possível aplicar a Regra de L'Hopital.

Pela Teorema:

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{(x^2-1)'}{(x+1)'}$$

Como $(x^2-1)' = 2x$ e $(x+1)' = 1$, então:

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{2x}{1}$$

Logo,

$$\lim_{x\to -1} \frac{2x}{1} = \frac{2\cdot(-1)}{1} = \frac{-2}{1} = -2$$

Pelo Teorema, pode-se concluir que:

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x+1} = -2.$$

Exercício 2: Seja $f(x) = e^x - 1$ e $g(x) = \operatorname{sen} x$, calcule o

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Como

$$\lim_{x\to 0} e^x - 1 = e^0 - 1 = 1 - 1 = 0$$

e

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} 0 = 0$$

então, o $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{\operatorname{sen} x}$ resulta em uma indeterminação do tipo $\dfrac{0}{0}$, portanto, é possível aplicar a Regra de L'Hopital.

Pelo Teorema:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} \frac{(e^x-1)'}{(\operatorname{sen} x)'}$$

Como $(e^x-1)' = e^x$ e $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$, então:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{\cos x}$$

Logo,

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x}{\cos x} = \frac{e^0}{\cos 0} = \frac{1}{1} = 1$$

Pelo Teorema, pode-se concluir que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\operatorname{sen} x} = 1$$

Exercício 3: Seja $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = \ln x$, calcule o

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) \cdot g(x).$$

Como $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$ e $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$, então há uma indeterminação do tipo $0 \cdot (-\infty)$, porém, para que seja possível aplicar a Regra de L'Hopital, é necessário que haja um quociente e não um produto, logo, é essencial que $f(x) \cdot g(x)$ seja transformado em $\dfrac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}$ ou em $\dfrac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$. Então, basta escolher qual quociente ficará mais fácil de calcular:

$$\sqrt{x} \cdot \ln x = \frac{\sqrt{x}}{\frac{1}{\ln x}} \text{ ou } \frac{\ln x}{\frac{1}{\sqrt{x}}}.$$

Neste exemplo, será usado $\dfrac{\ln x}{\frac{1}{\sqrt{x}}}$. É possível reescrever esta fração da seguinte maneira:

$$\frac{\ln x}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{\ln x}{\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}} = \frac{\ln x}{x^{-\frac{1}{2}}}$$

Agora, será possível calcular o limite utilizando a regra de L'Hopital, pois nesse quociente há uma indeterminação do tipo $\dfrac{-\infty}{\infty}$. Derivando o numerador e o denominador:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^{-\frac{1}{2}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{2x^{\frac{3}{2}}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{1}\right) =$$
$$\lim_{x\to 0^+} -\frac{2x^{\frac{1}{2}}}{1} = \lim_{x\to 0^+} -2x^{\frac{1}{2}} = -2 \cdot 0^{\frac{1}{2}} = -2 \cdot 0 = 0$$

Logo,

$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} \cdot \ln x = 0.$$

Referências

[1] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. *Um curso de cálculo: volume 1*. Rio de Janeiro. LTC–Livros Técnicos e Científicos. 5ª edição, 2001.

[2] STEWART, James. *Cálculo*, Volume 1. Editora Cengage Learning, 7ª edição, 2013.