PROINTE - Programa de Integração Estudantil

Oficina de Matemática Básica

Preceptora: Larissa Kethleen Conti

Coordenadora: Patrícia H. Baptistelli

Universidade Estadual de Maringá
Julho, 2023

Capítulo 1

Frações, Potenciação, Radiciação e Fatoração.

Para o que segue, vamos denotar os conjuntos dos números naturais, inteiros e reais por $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{R}$, respectivamente.

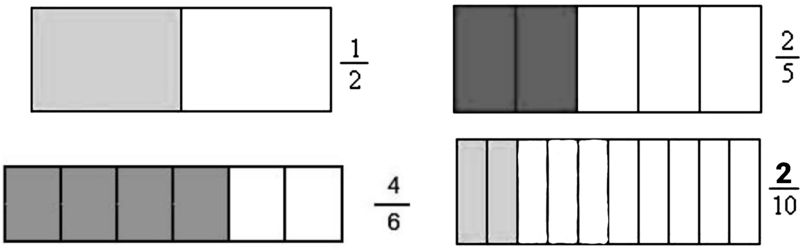
1.1 Frações

Uma fração é a representação de uma ou mais partes de um todo dividido em partes iguais. Ela também pode representar uma divisão ou um número racional. Para nossos propósitos, temos a seguinte definição.

Definição 1.1. *Uma fração é um número positivo ou negativo da forma* $\dfrac{a}{b}$*, com* $a,\ b \in \mathbb{Z}$ *e* $b \neq 0$*, em que "*a*" representa as partes tomadas do todo e "*b*" representa o total de partes iguais em que o todo foi dividido.*

Assim, uma fração nada mais é que uma divisão de números inteiros, também chamada de número racional. Em um fração, o inteiro "a" é chamado de numerador e "b" é chamado de denominador.

Exemplo 1.2. A fração $\frac{1}{2}$ é o mesmo que metade de um inteiro, utilizada para se referir a algo que deve ser dividido igualmente em duas partes. A fração $\frac{2}{5}$ representa duas partes de um inteiro dividido em cinco partes iguais. Analogamente, a fração $\frac{4}{6}$ representa quatro partes de um inteiro dividido em seis partes iguais.



Observe que a fração $\frac{2}{10}$ também pode ser representada por $\frac{1}{5}$. Esta equivalência ocorre quando multiplicamos o numerador e o denominador de uma fração simultaneamente por um inteiro diferente de zero. Isto equivale a multiplicar a fração por 1, como mostramos abaixo:

$$\frac{1}{5} = \frac{1}{5} \cdot 1 = \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{2} = \frac{1 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{2}{10}.$$

Assim, as frações $\frac{1}{5}$ e $\frac{2}{10}$ representam a mesma parte do todo e, portanto, o mesmo número racional. Neste caso, dizemos que elas são equivalentes.

Definição 1.3. *As frações equivalentes são aquelas que representam a mesma quantidade mesmo quando o numerador e o denominador são diferentes.*

Para encontrar uma fração equivalente, basta multiplicar ou dividir os numeradores e denominadores por algum número inteiro que seja diferente de zero. Lembre-se, tudo que for feito no numerador deve ser igualmente feito no denominador.

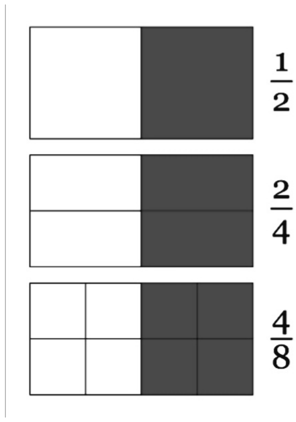


Figura 1.1: Frações Equivalentes.

Exemplo 1.4. As seguintes frações também são equivalentes:

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{9}{18} = \frac{27}{54}.$$

Todas os numeradores e denominadores foram multiplicados por 3.

O objetivo da simplificação de uma fração é obter uma fração irredutível, onde o numerador e o denominador não tenham um divisor comum.

1.2 Operações Com Frações

1.2.1 Soma e subtração de frações

Dividimos as operações de soma e de subtração de frações em dois casos:

a) **Frações com denominadores iguais:** quando os denominadores das frações forem iguais, mantemos o denominador e fazemos as operações de soma ou subtração apenas com os numeradores, ou seja,

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b},$$

para todo $a, b, c \in \mathbb{Z}$, com $b \neq 0$.

Exemplos:

1) $\frac{9}{7} + \frac{6}{7} = \frac{9+6}{7} = \frac{15}{7}$;
2) $\frac{3}{4} - \frac{2}{4} = \frac{3-2}{4} = \frac{1}{4}$;
3) $\frac{18}{43} + \frac{5}{43} - \frac{3}{43} = \frac{18+5-3}{43} = \frac{20}{43}$.

b) **Frações com denominadores diferentes:** quando os denominadores das frações forem diferentes, precisamos inicialmente determinar o mínimo múltiplo comum (MMC) dos denominadores, a fim de obter frações equivalentes com denominadores iguais e utilizar a regra anterior.

O MMC corresponde ao menor número inteiro positivo, diferente de zero, que é múltiplo ao mesmo tempo de dois ou mais números. O cálculo do MMC pode ser feito pelo método da fatoração, ou seja, decompondo os números em fatores primos.

Como um exemplo, determinamos abaixo o MMC entre os números 4, 8 e 10, denotado por MMC(4,8,10). Veja que MMC(4,8,10) = 40.

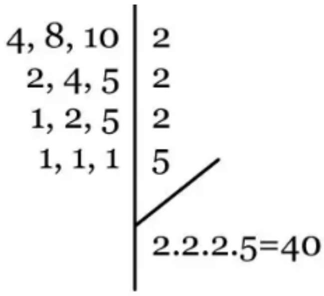


Figura 1.2: MMC entre $4, 8$ e 10.

Determinado o MMC, devemos obter as frações equivalentes cujo denominador é igual ao MMC e aplicar a regra do item a).

Exemplos:

1) Como MMC(4,8) = 8, obtemos $\frac{3}{4}+\frac{7}{8}=\frac{6}{8}+\frac{7}{8}=\frac{6+7}{8}=\frac{13}{8}$;

2) Como MMC(6,8) = 24, obtemos $\frac{5}{6}-\frac{3}{8}=\frac{20}{24}-\frac{9}{24}=\frac{20-9}{24}=\frac{11}{24}$;

3) Como MMC(5,7) = 35, obtemos $\frac{4}{5}-\frac{2}{7}=\frac{28}{35}-\frac{10}{35}=\frac{28-10}{35}=\frac{18}{35}$;

4) Como MMC(3,5) = 15, obtemos $\frac{2}{3}+\frac{1}{5}=\frac{10}{15}+\frac{3}{15}=\frac{10+3}{15}=\frac{13}{15}$.

1.2.2 Multiplicação ou produto de frações

A multiplicação de duas frações consiste em multiplicar o numerador da primeira fração com o numerador da segunda e multiplicar o denominador da primeira com o denominador da segunda fração. A operação continua sucessivamente em casos em que a multiplicação envolvem mais de duas frações.

Exemplos:

1) $\frac{7}{5}\cdot\frac{3}{4}=\frac{7\cdot 3}{5\cdot 4}=\frac{21}{20}$;

2) $\dfrac{11}{8} \cdot \dfrac{5}{6} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{11 \cdot 5 \cdot 1}{8 \cdot 6 \cdot 2} = \dfrac{55}{96}$;

3) $\dfrac{6}{4} \cdot \dfrac{9}{7} = \dfrac{6 \cdot 9}{4 \cdot 7} = \dfrac{54}{28}$.

Definimos a inversa de uma fração $\dfrac{a}{b}$, denotada por $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-1}$ como sendo outra fração cujo produto com $\dfrac{a}{b}$ é igual a 1. Veja que se $a \neq 0$, então

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{a \cdot b}{b \cdot a} = \frac{a \cdot b}{a \cdot b} = 1.$$

Logo, a fração $\dfrac{a}{b}$ possui inversa se $a \neq 0$ e, neste caso,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}.$$

Em particular,

$$a^{-1} = \left(\frac{a}{1}\right)^{-1} = \frac{1}{a},$$

para todo $a \in \mathbb{Z}$ não nulo.

1.2.3 Divisão de frações

Para realizar a divisão de uma fração por outra, devemos multiplicar a primeira fração pela inversa da segunda, ou seja,

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c},$$

para todo $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, com $b, c, d \neq 0$. É usual denotar $\dfrac{a}{b} \div \dfrac{c}{d}$ por $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$.

Exemplos:

1) $\dfrac{4}{5} \div \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{3}{2} = \dfrac{4 \cdot 3}{5 \cdot 2} = \dfrac{12}{10} = \dfrac{6}{5}$;

2) $\dfrac{1}{3} \div 5 \div \dfrac{12}{5} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{5} \div \dfrac{12}{5} = \dfrac{1}{15} \div \dfrac{12}{5} = \dfrac{1}{15} \cdot \dfrac{5}{12} = \dfrac{5}{180} = \dfrac{1}{36}$;

3) $\dfrac{15}{4} \div \dfrac{5}{2} = \dfrac{15}{4} \cdot \dfrac{2}{5} = \dfrac{30}{20} = \dfrac{3}{2}$.

1.3 Potenciação com Expoentes Naturais e Inteiros

1.3.1 Potenciação com expoente natural

A potenciação é uma multiplicação de números reais definida da seguinte forma: sejam $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ diferente de 0. A potência a^n é a multiplicação de a por si mesmo n vezes, ou seja,

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ vezes}}.$$

Chamamos "a" de base da potência, "n" de expoente e a^n de potenciação.

Exemplos:

1) $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$;

2) $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$;

3) $7^2 = 7 \cdot 7 = 49$;

4) $(0,5)^3 = 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,5 = 0,125$;

5) $0^9 = 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$;

6) $12^1 = 12$.

Por convenção, todo número elevado a zero é igual a 1, ou seja, $a^0 = 1$, para todo $a \in \mathbb{R}$. Como exemplo, temos $1^0 = 1$, $50^0 = 1$ e $1053^0 = 1$.

Em uma potência cuja base é um número inteiro negativo e o expoente é um número natural, temos o seguinte:

- Se n é ímpar, a potência é negativa. Por exemplo:

$$(-1)^3 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = -1.$$

- Se n é par, a potência é positiva. Por exemplo:

$$(-1)^4 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = 1.$$

A regra de sinais nos diz que o produto entre dois números que possuem mesmo sinal resulta em um número positivo. Mas o produto entre dois números de sinais contrários resulta em um número negativo.

Observação 1.5. Veja que $(-1)^2 \neq -1^2$, pois $(-1)^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$ e $-1^2 = -(1 \cdot 1) = -1$. Observe que no segundo caso apenas o 1 está elevado a 2 e não o -1, como no primeiro caso.

No caso em que a base é uma fração, pela própria definição de potenciação temos o seguinte:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdots \frac{a}{b}}_{n \text{ vezes}} = \frac{a \cdot a \cdots a}{b \cdot b \cdots b} = \frac{a^n}{b^n},$$

para todo $a, b \in \mathbb{Z}$, com $b \neq 0$.

Exemplos:

1) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{2^2}{3^2} = \dfrac{2 \cdot 2}{3 \cdot 3} = \dfrac{4}{9}$;

2) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^3 = \dfrac{1^3}{5^3} = \dfrac{1}{125}$;

3) $\left(\dfrac{7}{8}\right)^0 = \dfrac{7^0}{8^0} = \dfrac{1}{1} = 1$.

1.3.2 Potenciação com expoentes inteiros negativos

A potenciação cujo expoente é negativo é definida da seguinte forma: um número diferente de zero elevado a um expoente negativo é igual ao inverso desse número elevado ao oposto do expoente.

Mais especificamente, se $a \in \mathbb{R}$ não nulo e $n \in \mathbb{N}$, então

$$a^{-n} = (a^{-1})^n = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}.$$

Em particular, se a base for uma fração, temos a igualdade

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}\right)^n = \left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n},$$

para todo $a, b \in \mathbb{Z}$, com $a, b \neq 0$.

Exemplos:

1) $4^{-3} = \dfrac{1}{4^3} = \dfrac{1}{64}$;

2) $10^{-2} = \dfrac{1}{10^2} = \dfrac{1}{100}$;

3) $2^{-4} = \dfrac{1}{2^4} = \dfrac{1}{16}$;

4) $\left(\dfrac{4}{3}\right)^{-2} = \left(\dfrac{3}{4}\right)^{2} = \dfrac{3^2}{4^2} = \dfrac{9}{16}$.

As propriedades que enunciaremos a seguir é uma ferramenta útil no cálculo das potenciações.

Proposição 1.6. Dados $a, b \in \mathbb{R}$ e $n, m \in \mathbb{N}$, valem as seguintes propriedades:

(i) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$.

(ii) $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$, com $a \neq 0$.

(iii) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$.

(iv) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$, com $b \neq 0$.

(v) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.

Exemplos:

- $2^3 \cdot 2^2 = 2^{3+2} = 2^5 = 32$.
- $\dfrac{3^5}{3^3} = 3^{5-3} = 3^2 = 9$.
- $(2 \cdot 5)^2 = 2^2 \cdot 5^2 = 4 \cdot 25 = 100$.
- $\left(\dfrac{4}{7}\right)^2 = \dfrac{4^2}{7^2} = \dfrac{16}{49}$.
- $(2^3)^2 = 2^{3 \cdot 2} = 2^6 = 64$.

1.4 Radiciação

A radiciação é considerada a operação inversa da potenciação. Para todo $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ maior do que 1, introduzimos a expressão $\sqrt[n]{a}$ que representa o número $b \in \mathbb{R}$ tal que $b^n = a$. Ou seja,

$$\sqrt[n]{a} = b \;\Leftrightarrow\; b^n = a.$$

O símbolo $\sqrt{}$ é chamado de radical, n é chamado de índice do radical, $a \in \mathbb{R}$ é o radicando e b é a raiz. Sempre que $n = 2$, omitiremos o n na notação $\sqrt[n]{}$.

Exemplos:

$$\sqrt{4} = 2, \text{ pois } 2^2 = 4;$$

$$\sqrt[3]{125} = 5, \text{ pois } 5^3 = 125.$$

Observação 1.7. Raízes reais de números negativos com índices pares não existem, pois não há um número real que elevado a uma potência par resulte em um número negativo. Logo, $\sqrt[n]{a} \notin \mathbb{R}$ se $a < 0$ e n é par. No entanto, sempre existem raízes reais de números negativos com índices ímpares. Por exemplo, $\sqrt[3]{-64} = -4$, pois $(-4)^3 = -64$. Assim, $\sqrt[n]{a}$ é um número real negativo para todo $a < 0$ e n ímpar.

Proposição 1.8. Dados $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, com $n > 1$, valem as seguintes propriedades:

(i) $\sqrt[n]{a^n} = a$.

(ii) $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$.

(iii) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, com $b \neq 0$.

(iv) $(\sqrt[n]{a^x})^y = \sqrt[n]{a^{xy}}$.

(v) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$.

(vi) $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[\frac{n}{k}]{a^{\frac{m}{k}}}$, com $k \neq 0$, sempre que n e m forem divisíveis por k.

(vii) $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$.

Exemplos:

- $\sqrt[5]{3^5} = 3$.
- $\sqrt[3]{8 \cdot 27} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{3^3} = 2 \cdot 3 = 6$.
- $\sqrt{\dfrac{25}{36}} = \dfrac{\sqrt{25}}{\sqrt{36}} = \dfrac{\sqrt{5^2}}{\sqrt{6^2}} = \dfrac{5}{6}$.
- $\left(\sqrt[5]{3^2}\right)^3 = \sqrt[5]{3^{2 \cdot 3}} = \sqrt[5]{3^6} = \sqrt[5]{3^5 \cdot 3} = \sqrt[5]{3^5} \cdot \sqrt[5]{3} = 3\sqrt[5]{3}$.
- $\sqrt{\sqrt[3]{25}} = \sqrt[2 \cdot 3]{25} = \sqrt[6]{25}$.
- $\sqrt[14]{64} = \sqrt[14]{2^6} = \sqrt[\frac{14}{2}]{2^{\frac{6}{2}}} = \sqrt[7]{2^3} = \sqrt[7]{8}$.
- $\sqrt{4} = 4^{\frac{1}{2}} = (2^2)^{\frac{1}{2}} = 2^{2 \cdot \frac{1}{2}} = 2^1 = 2$.

1.5 Fatoração de Polinômios

Polinômios são expressões algébricas formadas pela adição ou subtração de monômios, sendo cada monômio estruturado pelo produto de números (também chamados coeficientes) por variáveis (também chamada parte literal).

Exemplos de monômios são: x; $4x^2$; $-xy$; zy^3m; $7x^2y^3$.

Exemplos de polinômios são: $3xy^2 + xy - x^4y$; $xy^3 - 2x^2y$; $a + b^2 - c - 4$.

Os polinômios são classificados de acordo com a quantidade de termos que possuem: monômios (único produto com coeficiente e parte literal), binômios (dois monômios), trinômios (três monômios), polinômios (quatro ou mais monômios).

Podemos fatorar os polinômios, escrevendo-os como o produto de dois ou mais polinômios, de três formas distintas:

- **Fatoração com um fator comum em evidência**

  Observe que podemos escrever o polinômio $6ab + 10bc$ como

  $$6ab + 10bc = 2 \cdot 3 \cdot a \cdot b + 2 \cdot 5 \cdot b \cdot c.$$

  Os fatores 2 e b são comuns aos dois termos da adição. Dessa maneira, a igualdade acima pode ser reescrita como

  $$6ab + 10bc = 2b(3a + 5c).$$

  Portanto, o polinômio $6ab + 10bc$ foi fatorado como o produto do monômio $2b$ pelo binômio $3a + 5c$.

- **Fatoração por agrupamento**

  Queremos agora fatorar o polinômio $ax - az + 5x - 5z$. Primeiramente agrupamos os termos que possuem um fator comum e colocamos esse fator em evidência em cada parcela obtida. Por exemplo,

  $$ax - az + 5x - 5z = (ax - az) + (5x - 5z) = a(x - z) + 5(x - z).$$

  Note que $(x - z)$ é um fator comum às duas parcelas obtidas. Assim, colocamos $(x - z)$ em evidência, obtendo que:

  $$ax - az + 5x - 5z = a(x - z) + 5(x - z) = (a + 5)(x - z).$$

- **Fatoração por produtos notáveis:**

  Os produtos notáveis mais conhecidos são:

  i) O quadrado da soma de dois termos:

  $$a^2+2ab+b^2 = a^2+ab+ba+b^2 = a(a+b)+b(a+b) = (a+b)(a+b) = (a+b)^2.$$

  Exemplo: $x^2 + 6x + 9 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = (x + 3)^2$.

  ii) O quadrado da diferença de dois termos:

  $$a^2-2ab+b^2 = a^2-ab-ba+b^2 = a(a-b)-b(a-b) = (a-b)(a-b) = (a-b)^2.$$

  Exemplo: $4x^2 - 4xy^3 + y^6 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot y^3 + (y^3)^2 = (2x - y^3)^2$.

  iii) O produto da soma pela diferença:

  $$a^2 - b^2 = a^2 - ab + ba - b^2 = a(a - b) + b(a - b) = (a + b)(a - b).$$

  Exemplo: $4x^2 - 9y^2 = (2x)^2 - (3y)^2 = (2x + 3y)(2x - 3y)$.

1.6 Exercícios Resolvidos

1) Calcule as expressões abaixo e simplifique o resultado, quando possível.

a) $\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{8}-\dfrac{5}{10}=\dfrac{10}{40}+\dfrac{15}{40}-\dfrac{20}{40}=\dfrac{5}{40}=\dfrac{1}{8}.$

b) $\dfrac{5}{3}-7+\dfrac{8}{15}=\dfrac{25}{15}-\dfrac{105}{15}+\dfrac{8}{15}=-\dfrac{72}{15}=-\dfrac{24}{5}.$

c) $\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{2}{7}\cdot\dfrac{3}{5}=\dfrac{1\cdot 2\cdot 3}{6\cdot 7\cdot 5}=\dfrac{6}{210}=\dfrac{1}{35}.$

d) $\dfrac{10}{2}\div\left(\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{4}\div\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{10}{2}\div\left(\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{2}{1}\right)=\dfrac{10}{2}\div\left(\dfrac{1}{5}+\dfrac{2}{4}\right)$
$=\dfrac{10}{2}\div\left(\dfrac{4}{20}+\dfrac{10}{20}\right)=\dfrac{10}{2}\div\dfrac{14}{20}=\dfrac{10}{2}\cdot\dfrac{20}{14}=\dfrac{200}{28}=\dfrac{50}{7}.$

e) $\left(\dfrac{3}{8}\cdot\dfrac{9}{4}\right)+\left(9\div\dfrac{8}{3}\right)-\dfrac{1}{4}=\left(\dfrac{27}{32}\right)+\left(\dfrac{9}{1}\cdot\dfrac{3}{8}\right)-\dfrac{1}{4}=\dfrac{27}{32}+\dfrac{27}{8}-\dfrac{1}{4}$
$=\dfrac{27}{32}+\dfrac{108}{32}-\dfrac{8}{32}=\dfrac{127}{32}.$

2) Simplifique as expressões convertendo as raízes em potência e eliminando expoentes negativos. Se necessário, suponha que as variáveis são números positivos e os denominadores são não nulos.

a) $3^5\cdot 9^{-2}=3^5\cdot\dfrac{1}{9^2}=\dfrac{3^5}{9^2}=\dfrac{3^5}{(3^2)^2}=\dfrac{3^5}{3^4}=3^{5-4}=3.$

Outro modo: $3^5\cdot 9^{-2}=3^5\cdot(3^2)^{-2}=3^5\cdot 3^{-4}=3^{5-4}=3.$

b) $(a^5b^2)(b^{-3}a^{-2})=((a^5a^{-2})(b^2b^{-3})=a^{5-2}b^{2-3}=a^3b^{-1}=a^3\dfrac{1}{b}=\dfrac{a^3}{b}.$

c) $\dfrac{3y^2}{x^3}\cdot\dfrac{x^2}{y^{-3}}=\dfrac{3y^2x^2}{x^3y^{-3}}=3y^2x^2\dfrac{1}{x^3y^{-3}}=3y^2x^2x^{-3}y^3=3y^{2+3}x^{2-3}$
$=3y^5x^{-1}=3y^5\dfrac{1}{x}=\dfrac{3y^5}{x}.$

d) $\dfrac{(t^2)^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{t^2}}=\dfrac{t^{2\cdot\frac{1}{3}}}{\sqrt[2]{t^2}}=\dfrac{t^{\frac{2}{3}}}{t}=t^{\frac{2}{3}-1}=t^{-\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{t^{\frac{1}{3}}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{t}}.$

e) $\dfrac{3^{-\frac{1}{2}} \cdot 3x^{\frac{1}{2}}}{\sqrt[3]{x^2}} = \dfrac{3^{-\frac{1}{2}+1} \cdot x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{2}{3}}} = \dfrac{3^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{2}{3}}} = 3^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}-\frac{2}{3}} = 3^{\frac{1}{2}} \cdot x^{-\frac{1}{6}}$

$= 3^{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{x^{\frac{1}{6}}} = \dfrac{3^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{6}}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[6]{x}}.$

3) Fatore as expressões:

a) $9x^2 + 6xy + y^2 = (3x)^2 + 2 \cdot 3xy + y^2 = (3x+y)^2.$

b) $x^2 - xy + \dfrac{y^2}{4} = x^2 - 2x\dfrac{y}{2} + \left(\dfrac{y}{2}\right)^2 = \left(x - \dfrac{y}{2}\right)^2.$

c) $ax - 2a + bx - 2b = a(x-2) + b(x-2) = (a+b)(x-2).$

d) $x^2y^2 - 16a^2 = (xy)^2 - (4a)^2 = (xy+4a)(xy-4a).$

e) $$\begin{aligned} -3ax^2 + 24axy - 48ay^2 &= -3a(x^2 - 8xy + 16y^2) \\ &= -3a(x^2 - 2 \cdot 4y \cdot x + (4y)^2) \\ &= -3a(x-4y)^2. \end{aligned}$$

4) Determine as raízes abaixo:

a) $\sqrt{49} = \sqrt{7^2} = 7.$

b) $\sqrt{16}\sqrt{25} = \sqrt{16 \cdot 25} = \sqrt{400} = \sqrt{20^2} = 20.$

Ou $\sqrt{16} \cdot \sqrt{25} = \sqrt{4^2} \cdot \sqrt{5^2} = 4 \cdot 5 = 20.$

c) $\sqrt{\sqrt[3]{16}} = \sqrt[2\cdot 3]{16} = \sqrt[6]{16} = \sqrt[6]{2^4} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}.$

d) $\sqrt{\sqrt{25x^4}} = \sqrt[2\cdot 2]{25x^4} = \sqrt[4]{25x^4} = \sqrt[4]{25} \cdot \sqrt[4]{x^4} = \sqrt[4]{5^2}x = \sqrt{5}x.$

Capítulo 2

Equações e Inequações

2.1 Equações

Uma equação é uma sentença matemática expressa por uma igualdade em que há pelo menos uma incógnita (número desconhecido a ser determinado). O grau de uma equação está relacionado com o maior expoente de suas incógnitas. Nesta aula, estudaremos somente as equações de grau 1, mais conhecidas como equações de primeiro grau.

2.1.1 Equações de primeiro grau com uma incógnita

As equações de primeiro grau com uma incógnita são da forma $ax = b$, ou equivalentemente

$$ax - b = 0, \tag{2.1}$$

sendo $a, b, x \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$. Os números a, b são os coeficientes e x é a incógnita da equação.

Toda equação da forma (2.1) possui uma única solução, ou seja, existe um único valor de x que satisfaz tal igualdade. Neste caso, realizamos operações dos dois lados de (2.1), com o objetivo de isolar a incógnita e encontrar o seu valor.

Exemplos:

1) $x - 5 = 7$;

$$\begin{aligned} x - 5 &= 7 \\ x - 5 + 5 &= 7 + 5 \\ x &= 12. \end{aligned}$$

Logo, a igualdade $x - 5 = 7$ é válida somente para $x = 12$.

2) $4x = 8$;

$$\begin{aligned} 4x &= 8 \\ \frac{1}{4}4x &= \frac{1}{4}8 \\ x &= \ 2. \end{aligned}$$

Então, $x = 2$ é a única solução da equação $4x = 8$.

3) $-2a - 4 = -8$;

$$\begin{aligned} -2a - 4 &= -8 \\ -2a - 4 + 4 &= -8 + 4 \\ -2a &= -4 \\ 2a &= 4 \\ \frac{1}{2}(2a) &= \frac{1}{2}(4) \\ a &= 2. \end{aligned}$$

Assim, $-2a - 4 = -8$ é válido se, e somente se, $a = 2$.

4) $3y = 13 + 5y$.

$$\begin{aligned} 3y &= 13 + 5y \\ 3y - 5y &= 13 + 5y - 5y \\ -2y &= 13 \\ -\frac{1}{2}(-2y) &= -\frac{1}{2}(13) \\ y &= -\frac{13}{2}. \end{aligned}$$

Desse modo, $y = -\dfrac{13}{2}$ é a única solução da equação $3y - 6 = 7 + 5y$.

2.1.2 Equações de primeiro grau com duas incógnitas

As equações do primeiro grau com duas incógnitas são da forma

$$ax + by = c, \tag{2.2}$$

sendo $a, b, c, x, y \in \mathbb{R}$, com $a, b \neq 0$. Os números a, b e c são os coeficientes e x, y são as incógnitas ou variáveis da equação.

Toda equação da forma (2.2) possui infinitas soluções, ou seja, existem infinitos valores de x e y que satisfazem tal igualdade. Para encontrar algumas das infinitas soluções da equação (2.2) atribuímos um valor qualquer para uma de suas variáveis e encontramos o valor da outra variável.

Exemplos:

1) $2x + 3y = 0$;

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 0 \\ 3y &= -2x \\ y &= -\frac{2}{3}x. \end{aligned}$$

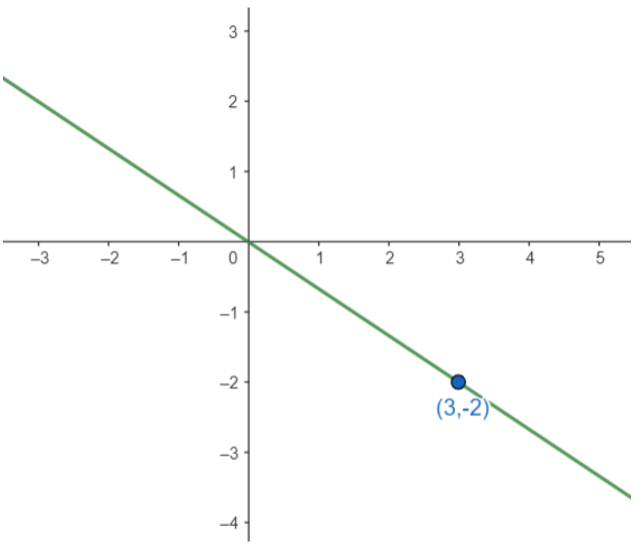


Figura 2.1: Soluções da equação $2x + 3y = 0$.

Geometricamente, a equação $y = -\dfrac{2}{3}x$ determina uma reta que passa pela origem (0,0). De fato, se $x = 0$, então $y = 0$. Se $x = 3$, então $y = -2$. Se $x = -1$, então $y = \frac{2}{3}$. Logo, algumas soluções para a equação $y = -\dfrac{2x}{3}$ são $(0, 0)$, $(3, -2)$ e $(-1, \frac{2}{3})$.

Escrevemos o conjunto solução como $\mathbf{S} = \left\{(x, -\dfrac{2}{3}x);\ x \in \mathbb{R}\right\}$.

2) $x + y = 6$;

$$\begin{aligned} x + y &= 6 \\ y &= -x + 6. \end{aligned}$$

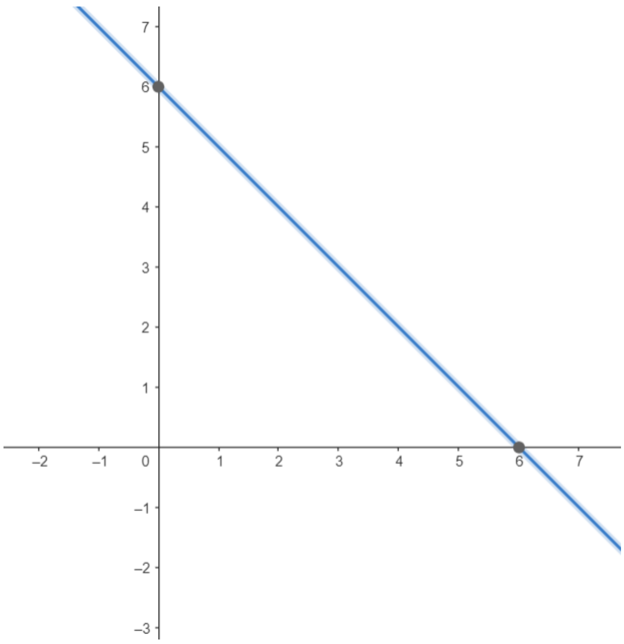


Figura 2.2: Soluções da equação $x + y = 6$.

Observe que $y = -x + 6$ consiste na equação de uma reta que passa pelos pontos $(6, 0)$ e $(0, 6)$. Outras soluções para tal equação são $(1, 5)$ e $(-2, 7)$. Mais geralmente, $\mathbf{S} = \{(x, -x + 6);\ x \in \mathbb{R}\}$.

3) $4a = 2b$.

$$\begin{aligned} 4a &= 2b \\ \frac{1}{4}4a &= \frac{1}{4}2b \\ a &= \frac{2b}{4} \\ a &= \frac{b}{2}. \end{aligned}$$

Assim, algumas soluções para a equação $4a = 2b$ são $(0,0)$, $(-2,-1)$ e $(2,1)$. Mais geralmente, $\mathbf{S} = \left\{(b, \frac{b}{2});\ b \in \mathbb{R}\right\}$ é o conjunto solução.

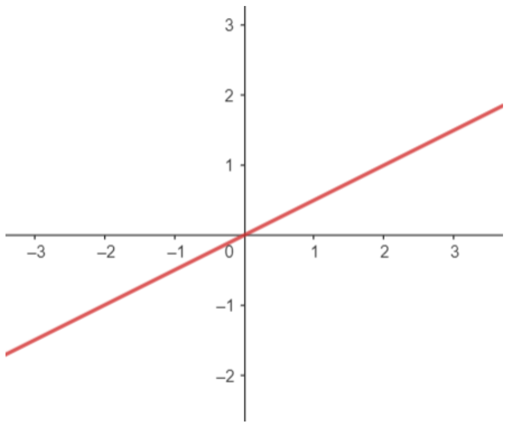


Figura 2.3: Soluções da equação $4a = 2b$.

Observação 2.1. Como observamos nos exemplos anteriores, todas as soluções de uma equação do primeiro grau com duas incógnitas da forma (2.2) são pontos pertencentes à reta de equação $y = -\dfrac{a}{b}x + \dfrac{c}{b}$.

2.1.3 Sistema de duas equações de primeiro grau com duas incógnitas

Um sistema de duas equações de primeiro grau com duas incógnitas é um sistema da forma

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

em que $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ e x, y são as variáveis. A resolução deste tipo de sistema consiste em determinar os valores de x e y que satisfazem simultaneamente as duas equações do sistema. Isto pode ser feito por meio de dois métodos resolutivos: o método da adição e o da substituição.

Método da Adição:

Para aplicarmos esse método devemos ter nas duas equações termos que quando somados resultem em zero. Caso contrário, devemos realizar operações de multiplicação afim de obter termos opostos.

Somando então as duas equações, obtemos uma equação com somente uma variável, sendo possível determinar facilmente o seu valor numérico. Para concluir a resolução, substituímos o valor da variável já encontrada em qualquer uma das equações do sistema inicial e encontramos o valor da outra variável.

Considere o sistema linear

$$\begin{cases} x + y = 515 \\ x - y = 45 \end{cases}.$$

Vamos resolvê-lo pelo método da adição. Perceba que a variável y possui sinais opostos em ambas as equações. Assim, somando as equações, obtemos a igualdade

$$2x = 560,$$

ou seja, $x = 280$. Substituindo tal valor em $x + y = 515$, obtemos

$$280 + y = 515,$$

ou seja, $y = 235$. Desse modo, os valores que satisfazem as equações do sistema são $x = 280$ e $y = 235$. Neste caso, escrevemos o conjunto solução como

$$\mathbf{S} = \{(280, 235)\}.$$

Método da Substituição:

O método da substituição é composto por 3 passos:

1. Primeiro, é necessário encontrar o valor algébrico de uma das incógnitas usando uma das equações. Este valor algébrico é encontrado quando uma incógnita é isolada. Qualquer uma delas, em qualquer uma das equações, pode ser escolhida.

2. Em seguida, substituímos este valor algébrico na outra equação (que ainda não foi usada). Com isso, encontra-se o valor numérico de uma das incógnitas.

3. Por último, substituímos o valor numérico encontrado em qualquer uma das equações para descobrir o valor numérico da outra incógnita.

Vamos elucidar o método da substituição utilizando novamente o exemplo anterior:

$$\begin{cases} x + y = 515 \\ x - y = 45 \end{cases} .$$

Pelo método descrito, devemos isolar uma das variáveis. Escolhemos isolar a variável x na primeira equação. Então temos:

$$\begin{aligned} x + y &= 515 \\ x &= 515 - y. \end{aligned}$$

Substituindo $x = 515 - y$ na segunda equação do sistema, obtemos:

$$\begin{aligned} x - y &= 45 \\ (515 - y) - y &= 45 \\ 515 - 2y &= 45 \\ -2y &= 45 - 515 \\ -2y &= -\,470 \\ y &= \frac{-470}{-2} \\ y &= 235. \end{aligned}$$

Substituindo $y = 235$ na igualdade $x = 515 - y$, concluímos que

$$x = 515 - 235 = 280.$$

Logo, os valores que satisfazem o sistema são $x = 280$ e $y = 235$. Sendo assim, o conjunto solução é dado por $\mathbf{S} = \{(280, 235)\}$.

2.2 Inequações

Inequações são sentenças matemáticas que possuem uma ou mais variáveis e são expressas por uma das seguintes desigualdades:

$>$ (maior que);

$<$ (menor que);

$\geq$ (maior ou igual a);

$\leq$ (menor ou igual a).

As inequações mais comuns são as do primeiro e segundo grau, como as ilustradas abaixo:

- $2x - 5 > 4$ (primeiro grau) ;
- $x^2 + 2x + 2 < -1$ (segundo grau);
- $5x + 1 \geq 4x - 3$ (primeiro grau);
- $x^2 - 4x \leq 0$ (segundo grau).

Nesta seção, vamos analisar apenas as inequações do primeiro grau com uma variável, as quais são basicamente divididas em 4 casos:

(i) $ax + b > 0$;

(ii) $ax + b < 0$;

(iii) $ax + b \geq 0$;

(iv) $ax + b \leq 0$,

sendo $a, b \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$. Para encontrar a solução de uma inequação (quando ela existir), utilizamos técnicas parecidas com as utilizadas para resolver equações:

- Em uma inequação, quando adicionamos ou subtraímos o mesmo número em ambos os membros da desigualdade, a desigualdade não se altera. Isso também acontece quando multiplicamos ou dividimos os dois membros por um número positivo.

Mas é necessário tomar alguns cuidados, por se tratar de uma desigualdade e não de uma igualdade.

- Quando multiplicamos ou dividimos os dois membros de uma inequação por um número negativo, invertemos o sinal da desigualdade para que a sentença continue verdadeira.

Diferentemente de uma equação do primeiro grau, que possui somente uma solução, a inequação do primeiro grau pode ter infinitas soluções. Em todos os casos, o método para encontrarmos o conjunto de soluções de uma inequação é isolarmos a variável, como mostrado nos seguintes exemplos.

Exemplo 2.2. Resolva a inequação $2 - 3x \geq x - 14$.

$$\begin{aligned}
2 - 3x &\geq x - 14 \\
-3x &\geq x - 14 - 2 \\
-3x &\geq x - 16 \\
-3x - x &\geq -16 \\
-4x &\geq -16 \\
-\frac{1}{4}(-4x) &\leq -\frac{1}{4}(-16) \\
x &\leq \frac{-16}{-4} \\
x &\leq 4.
\end{aligned}$$

Logo, o conjunto de soluções para a inequação dada é

$$\mathbf{S} = \{x \in \mathbb{R};\ x \leq 4\},$$

o que implica que qualquer valor real de x menor ou igual a 4 satisfaz a desigualdade $2 - 3x \geq x - 14$.

Exemplo 2.3. Resolva a desigualdade $8(x + 1) < 2(2 - 8x)$.

$$\begin{aligned}
8(x + 1) &< 2(2 - 8x) \\
8x + 8 &< 4 - 16x \\
8x + 16x &< 4 - 8 \\
24x &< -4 \\
\frac{1}{24}(24x) &< \frac{1}{24}(-4) \\
x &< \frac{-4}{24} \\
x &< -\frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

Logo, o conjunto de soluções para a inequação dada é

$$\mathbf{S} = \left\{ x \in \mathbb{R};\ x < -\frac{1}{6} \right\},$$

o que implica que qualquer valor real de x menor do que $-\frac{1}{6}$ satisfaz a desigualdade. Um outro modo de escrever o conjunto solução é

$$\mathbf{S} = \left(-\infty, -\frac{1}{6} \right).$$

2.3 Exercícios Resolvidos

1) Resolva as equações:

a) $12 - 4(x-2) = 2x - 5(3+x)$;

$$\begin{aligned}
12 - 4(x-2) &= 2x - 5(3+x) \\
12 - 4x + 8 &= 2x - 15 - 5x \\
20 - 4x &= -\,3x - 15 \\
-4x + 3x &= -\,15 - 20 \\
-x &= -\,35 \\
x &= 35.
\end{aligned}$$

b) $\dfrac{2x+4}{3} = \dfrac{6x+9}{6}$;

$$\begin{aligned}
\frac{2x+4}{3} &= \frac{6x+9}{6} \\
6\left(\frac{2x+4}{3}\right) &= 6\left(\frac{6x+9}{6}\right) \\
2(2x+4) &= 6x + 9 \\
4x + 8 &= 6x + 9 \\
4x - 6x &= 9 - 8 \\
-2x &= 1 \\
-\frac{1}{2}(-2x) &= -\,\frac{1}{2}(1) \\
x &= -\,\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

c) $\dfrac{2x-3}{4} \div 2 = \dfrac{3x+6}{3}$;

$$\begin{aligned}
\frac{2x-3}{4} \div 2 &= \frac{3(x+2)}{3} \\
\frac{2x-3}{4} \cdot \frac{1}{2} &= x+2 \\
\frac{2x-3}{8} &= x+2 \\
8\left(\frac{2x-3}{8}\right) &= 8(x+2) \\
2x-3 &= 8x+16 \\
2x-8x &= 16+3 \\
-6x &= 19 \\
-\frac{1}{6}(-6x) &= -\frac{1}{6}(19) \\
x &= -\frac{19}{6}.
\end{aligned}$$

d) $\dfrac{8x-2}{3} = \dfrac{5x+1}{2} - 8x$.

$$\begin{aligned}
\frac{8x-2}{3} &= \frac{5x+1}{2} - 8x \\
6\left(\frac{8x-2}{3}\right) &= 6\left(\frac{5x+1}{2} - 8x\right) \\
2(8x-2) &= 3(5x+1) - 48x \\
16x - 4 &= 15x + 3 - 48x \\
16x - 15x + 48x &= 3 + 4 \\
49x &= 7 \\
x &= \frac{7}{49} \\
x &= \frac{1}{7}.
\end{aligned}$$

2) Sabendo que os sistemas possuem solução, resolva-os.

a) $\begin{cases} x - 3y = 9 \\ 2x + 3y = 6 \end{cases}$;

Somando a primeira equação com a segunda temos:

$$\begin{aligned}(x-3y)+(2x+3y) &= 9+6\\ 3x &= 15\\ x &= \frac{15}{3}\\ x &= 5.\end{aligned}$$

Substituindo $x=5$ na segunda equação do sistema, obtemos:

$$\begin{aligned}2x+3y &= 6\\ 2(5)+3y &= 6\\ 10+3y &= 6\\ 3y &= 6-10\\ 3y &= -\,4\\ y &= -\,\frac{4}{3}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathbf{S}=\left\{\left(5,-\frac{4}{3}\right)\right\}$$

é o conjunto solução do sistema.

b) $\begin{cases}2x+y=-3\\ x+y=-1\end{cases}$;

Isolando x na segunda equação, obtemos $x=-1-y$. Substituindo na primeira equação, temos:

$$\begin{aligned}2x+y &= -\,3\\ 2(-1-y)+y &= -\,3\\ -2-2y+y &= -\,3\\ -y &= -\,3+2\\ -y &= -\,1\\ y &= 1.\end{aligned}$$

Fazendo $y=1$ na igualdade $x=-1-y$, obtemos:

$$x=-1-1=-2.$$

Portanto, $\mathbf{S} = \{(-2, 1)\}$, ou seja, $(-2, 1)$ é a única solução do sistema.

c) $\begin{cases} x = 3y \\ 2x - 4y = 6 \end{cases}$;

Substituindo a primeira equação na segunda obtemos:

$$\begin{aligned} 2x - 4y &= 6 \\ 2(3y) - 4y &= 6 \\ 6y - 4y &= 6 \\ 2y &= 6 \\ y &= \frac{6}{2} \\ y &= 3. \end{aligned}$$

Substituindo $y = 3$ na primeira equação, temos $x = 3(3) = 9$. Logo,

$$\mathbf{S} = \{(9, 3)\}$$

é o conjunto solução do sistema.

d) $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 5x - 3y = 2 \end{cases}$.

Multiplicando a primeira equação por 3 e a segunda por 2, obtemos

$$\begin{cases} 9x + 6y = 15 \\ 10x - 6y = 4 \end{cases}.$$

Somando as duas equações, temos:

$$\begin{aligned} 9x + 6y + 10x - 6y &= 15 + 4 \\ 19x &= 19 \\ x &= 1. \end{aligned}$$

Substituindo $x = 1$ na primeira equação:

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 5 \\ 3 + 2y &= 5 \\ 2y &= 5 - 3 \\ 2y &= 2 \\ y &= 1. \end{aligned}$$

Portanto, o conjunto solução é:

$$\mathbf{S} = \{(1,1)\}.$$

3) Resolva as inequações e apresente a solução em forma de intervalo e conjunto.

a) $2x - 3 \geq 4 + 3x$;

$$\begin{aligned} 2x - 3 &\geq 4 + 3x \\ 2x - 3x &\geq 4 + 3 \\ -x &\geq 7 \\ x &\leq -7. \end{aligned}$$

Logo, $\mathbf{S} = \{x \in \mathbb{R};\ x \leq -7\} = (-\infty, -7]$.

b) $\dfrac{3x}{4} + \dfrac{1}{2} > 5$;

$$\begin{aligned} \frac{3x}{4} + \frac{1}{2} &> 5 \\ \frac{3x}{4} + \frac{2}{4} &> 5 \\ 4\left(\frac{3x+2}{4}\right) &> 4(5) \\ 3x + 2 &> 20 \\ 3x &> 20 - 2 \\ 3x &> 18 \\ x &> \frac{18}{3} \\ x &> 6. \end{aligned}$$

Logo, $\mathbf{S} = \{x \in \mathbb{R};\ x > 6\} = (6, \infty)$.

c) $\dfrac{6x}{4} \cdot \dfrac{1}{5} - \dfrac{x}{3} \leq \dfrac{4x}{2}$.

$$\begin{aligned}
\frac{6x}{4} \cdot \frac{1}{5} - \frac{x}{3} &\leq \frac{4x}{2} \\
\frac{6x}{20} - \frac{x}{3} &\leq 2x \\
\frac{3x}{10} - \frac{x}{3} &\leq 2x \\
\frac{9x - 10x}{30} &\leq 2x \\
-\frac{x}{30} - 2x &\leq 0 \\
30\left(-\frac{x}{30} - 2x\right) &\leq 0 \\
-x - 60x &\leq 0 \\
-61x &\leq 0 \\
x &\geq 0.
\end{aligned}$$

Logo, $\mathbf{S} = \{x \in \mathbb{R};\ x \geq 0\} = [0, \infty)$.

Capítulo 3

Função Real de uma Variável

3.1 Funções

Para o que segue, A e B denotam subconjuntos não vazios do conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais.

Definição 3.1. *Uma função de A em B, denotada por $f : A \to B$, é uma regra que associa cada elemento de A a um único elemento de B.*

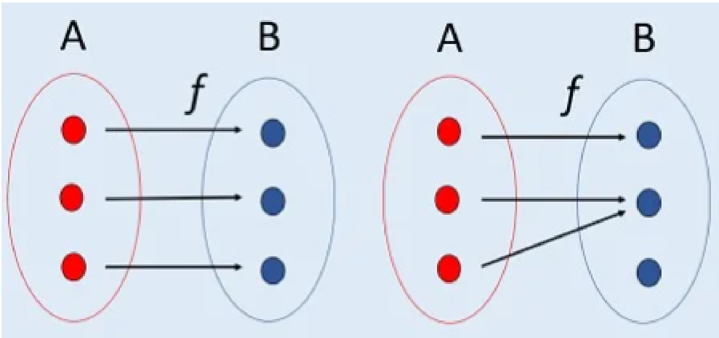


Figura 3.1: Exemplos de funções $f : A \to B$.

Escrevemos $y = f(x)$ para indicar o elemento de B associado a $x \in A$. Em símbolos,

$$\begin{aligned} f : A &\to B \\ x &\to y = f(x). \end{aligned}$$

Observe que o diagrama abaixo não representa uma função, pois existe um elemento de A associado a dois elementos de B.

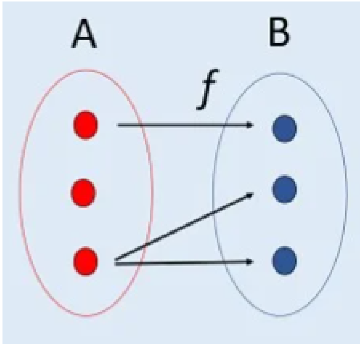


Figura 3.2: Não é uma função.

Exemplo 3.2. Dados os conjuntos $A = \{-1, 0, 1\}$ e $B = \{-1, 0, 1, 2\}$, considere as funções $f : A \to B$ e $g : A \to B$ definidas por $f(x) = x + 1$ e $g(x) = x^2$. Então:

$$\begin{aligned} f(-1) &= 0; \qquad & g(-1) &= 1; \\ f(0) &= 1; \qquad & g(0) &= 0; \\ f(1) &= 2; \qquad & g(1) &= 1; \end{aligned}$$

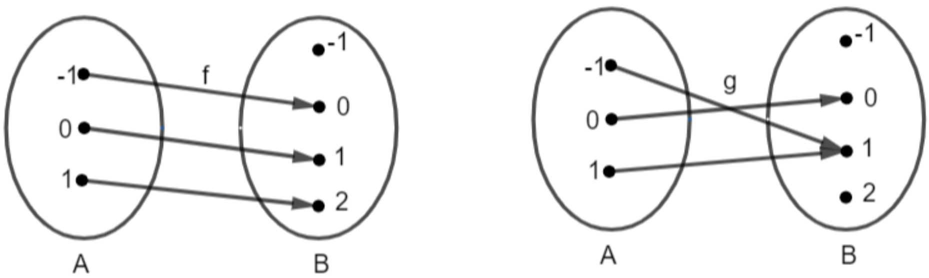


Figura 3.3: Diagramas das funções $f : A \to B$ e $g : A \to B$.

3.2 Domínio, Contradomínio e Imagem

Dada uma função $f : A \to B$, o conjunto A é chamado domínio de f, representando todos os valores reais que podem ser associados por f a valores de B. Também denotamos o domínio de f por $Dom(f)$.

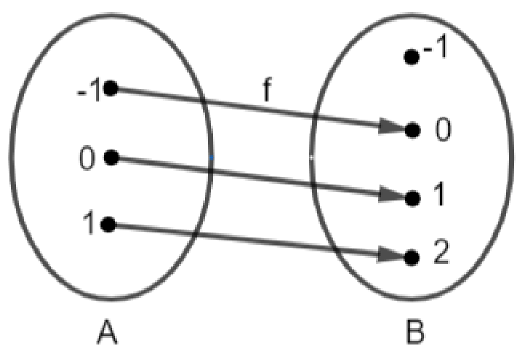
O conjunto B é chamado contradomínio de f e representa todos os valores que podem ou não estar associados a um número do domínio. Também denotamos B como $CD(f)$.

A imagem de f, denotada por $Im(f)$, é o conjunto formado por todos os elementos do contradomínio que estão relacionados a algum elemento de $Dom(f)$, ou seja,

$$Im(f) = \{f(x) \in B;\ x \in A\}.$$

Também é usual chamarmos o elemento $y = f(x)$ de imagem de x pela função f. Observe o exemplo a seguir.

Exemplo 3.3. Considere a função $f(x) = x + 1$ cujo diagrama é apresentado abaixo.



Temos que:

- $A = Dom(f) = \{-1, 0, 1\}$;
- $B = CD(f) = \{-1, 0, 1, 2\}$;
- $Im(f) = \{f(-1), f(0), f(1)\} = \{0, 1, 2\}$.

Veja que $Im(f)$ é um subconjunto do contradomínio B, que pode ou não ser igual a B. Claramente, a função $f(x) = x + 1$ poderia ter um domínio maior. De fato, ela está definida para todo $x \in \mathbb{R}$. Neste caso,

$$Dom(f) = Im(f) = \mathbb{R}.$$

Exemplo 3.4. Determine o domínio da função $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 9}$.

Veja que f não está definida quando seu denominador é nulo. Portanto, f estará definida para todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^2 - 9 \neq 0$. Assim,

$$\begin{aligned} x^2 &\neq 9 \\ x &\neq \pm\sqrt{9} \\ x &\neq \pm 3. \end{aligned}$$

Portanto,

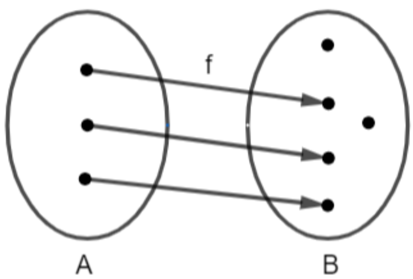
$$Dom(f) = \{x \in \mathbb{R};\ x \neq 3 \ e \ x \neq -3\}.$$

Como $f(x) \neq 0$ para todo $x \in Dom(f)$, então

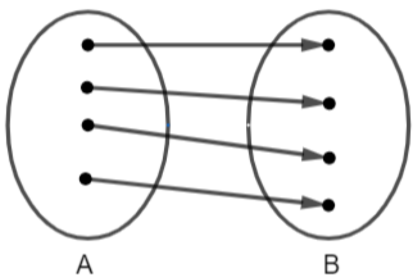
$$Im(f) = \mathbb{R}^* = \{y \in \mathbb{R};\ y \neq 0\}.$$

3.3 Função Injetora

Definição 3.5. *Dizemos que uma função é injetora (ou injetiva) quando diferentes elementos de A estão associados a diferentes elementos de B, ou seja, se $x_1, x_2 \in A$ forem tais que $x_1 \neq x_2$, então $f(x_1) \neq f(x_2)$.*

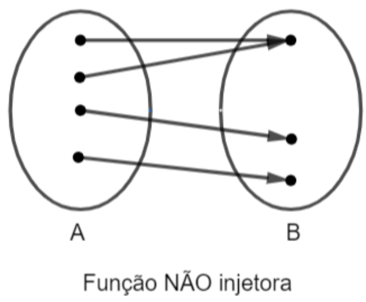


Função injetora



Função injetora

De modo análogo, dizemos que f é injetora quando $f(x_1) = f(x_2)$ implicar que $x_1 = x_2$. A seguinte função não é injetora, pois existem dois elementos de A associados a um mesmo elemento de B.



Exemplo 3.6. Vejamos que a função $f(x) = x + 3$ é injetora. De fato, se $f(x_1) = f(x_2)$, então
$$x_1 + 3 = x_2 + 3.$$
Subtraindo 3 de ambos os lados da igualdade, concluímos que $x_1 = x_2$.

No entanto, a função $g(x) = x^2$ não é injetora, pois $g(1) = 1 = g(-1)$. Logo $x_1 = -1$ e $x_2 = 1$ possuem a mesma imagem por g, embora $x_1 \neq x_2$.

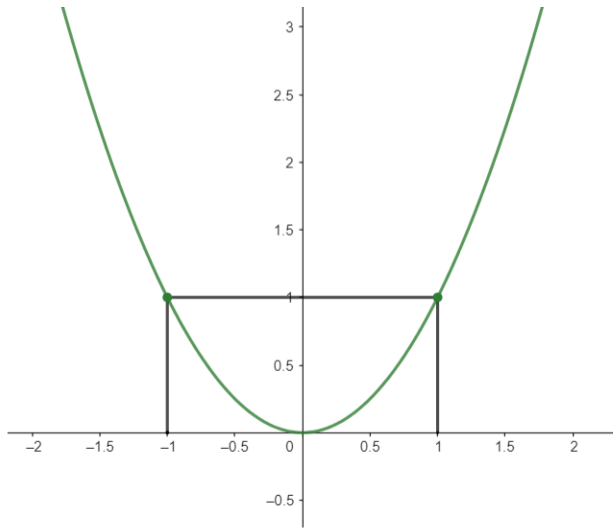
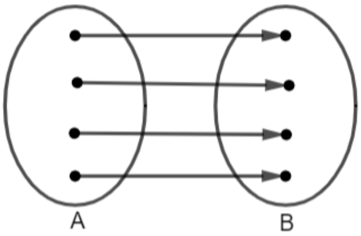


Figura 3.4: Função $g(x) = x^2$.

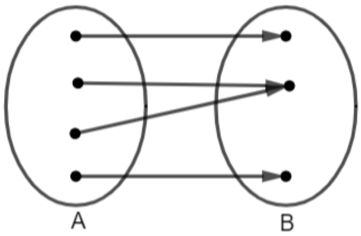
Se tomássemos $Dom(g) = \mathbb{R}_+$ (reais não negativos), então g seria injetora. De fato, se $g(x_1) = g(x_2)$, então $x_1^2 = x_2^2$, o que resulta em $x_1 = \pm x_2$. Como $x_1, x_2 \geq 0$, então $x_1 = x_2$.

3.4 Função Sobrejetora

Definição 3.7. *Dizemos que uma função é sobrejetora (ou sobrejetiva) quando todo elemento de* B *for a imagem de pelo menos um elemento de* A*, isto é,* $Im(f) = B = CD(f)$.

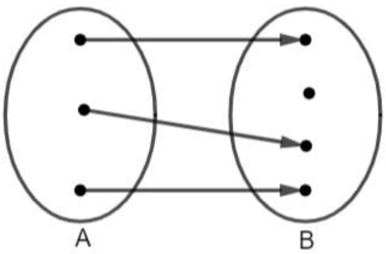


Função sobrejetora e injetora



Função sobrejetora e NÃO injetora

Observe que a função abaixo não é sobrejetora, pois existe um elemento de B que não está associado a nenhum elemento de A.



Função injetora e NÃO sobrejetora

Exemplo 3.8. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x + 3$ é sobrejetora. De fato, como

$$f(y - 3) = y - 3 + 3 = y,$$

concluímos que dado $y \in \mathbb{R}$, existe $x = y - 3 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = y$.

No entanto, a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = x^2$ não é sobrejetora, pois não existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $g(x) = -1$. Assim, não existe $x \in Dom(g)$ associado a $y = -1$ (nem a qualquer número negativo), uma vez que $g(x) \geq 0$.

3.5 Função Bijetora e Inversa

Dizemos que uma função é bijetora (ou bijetiva) se ela for simultaneamente injetora e sobrejetora.

Exemplo 3.9. Mostramos anteriormente que a função $f(x) = x+3$ é injetora e sobrejetora. Logo, f é bijetora.

A função $g(x) = x^2$ não é sobrejetora. Portanto, g não é bijetora.

Sendo f uma função bijetora, por definição, todo elemento do contradomínio possui um único correspondente no domínio. Neste caso, é possível definir uma outra função (chamada função inversa de f) que inverte a operação de f, ou seja, que desfaz o que a f faz.

Definição 3.10. *Uma função $f : A \to B$ é inversível (ou admite inversa) se, e somente se, f é bijetora. Denotamos a função inversa de f por*

$$f^{-1} : B \to A.$$

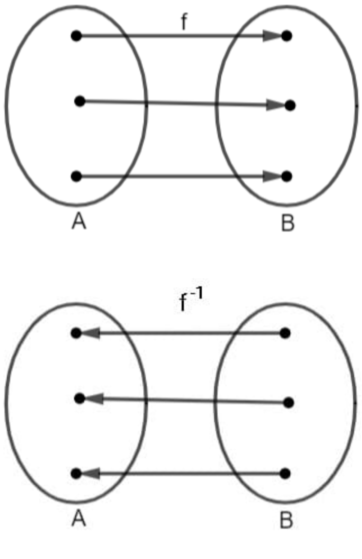


Figura 3.5: Função f e sua inversa f^{-1}.

Nem sempre é fácil determinar a função inversa de uma função bijetora. Mas existe um método que pode nos ajudar. O primeiro passo consiste em inverter as incógnitas, ou seja, trocar x por y e y por x. Posteriormente, devemos isolar a incógnita y.

Exemplo 3.11. Dada a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3x - 5$, determine a sua inversa.

Primeiramente, afirmamos que f é bijetora. De fato, cálculos diretos nos mostram que se $f(x_1) = f(x_2)$, então

$$\begin{aligned} 3x_1 - 5 &= 3x_2 - 5 \\ 3x_1 &= 3x_2 \\ x_1 &= x_2. \end{aligned}$$

Portanto, f é injetora. Além disso, dado $y \in \mathbb{R}$, temos que $x = \dfrac{y+5}{3}$ é um número real tal que

$$\begin{aligned} f(x) &= 3\left(\frac{y+5}{3}\right) - 5 \\ f(x) &= y + 5 - 5 \\ f(x) &= y. \end{aligned}$$

Assim, f também é sobrejetora e, portanto, é bijetora.

Para determinar a inversa da função temos que:

1º Passo: Fazer a troca de x por y na expressão $y = 3x - 5$. Assim, teremos $x = 3y - 5$.

2º Passo: Isolar a variável y.

$$\begin{aligned} x &= 3y - 5 \\ x + 5 &= 3y \\ y &= \frac{x+5}{3}. \end{aligned}$$

Portanto, a função $f(x) = 3x - 5$ tem sua inversa igual a $f^{-1}(x) = \dfrac{x+5}{3}$.

Observação 3.12. Também podemos proceder simplesmente obtendo-se x em função de y, ou seja, se $y = 3x - 5$, então $3x = y + 5$, de modo que $x = \dfrac{y+5}{3}$. Como $f^{-1}(y) = x$, concluímos que $f^{-1}(y) = \dfrac{y+5}{3}$.

Exemplo 3.13. Vamos determinar a inversa da função $f : \mathbb{R} - \{\frac{5}{3}\} \to \mathbb{R} - \{\frac{2}{3}\}$ definida por

$$f(x) = \frac{2x+3}{3x-5}.$$

Veja que $3x - 5 \neq 0$ implica em $x \neq \frac{5}{3}$. Por isso, $Dom(f) = \mathbb{R} - \{\frac{5}{3}\}$. Do mesmo modo, $\{\frac{2}{3}\} \notin Im(f)$, pois se $f(x) = \frac{2}{3}$, então

$$\begin{aligned} \frac{2x+3}{3x-5} &= \frac{2}{3} \\ 3(2x+3) &= 2(3x-5) \\ 6x + 9 &= 6x - 10 \\ 9 &= -10, \end{aligned}$$

o que não ocorre. Portanto, não existe x tal que $f(x) = \frac{2}{3}$.

Realizando a troca das variáveis x e y temos:

$$x = \frac{2y+3}{3y-5}.$$

Isolando o y na expressão obtida:

$$\begin{aligned} x(3y-5) &= 2y + 3 \\ 3xy - 5x &= 2y + 3 \\ 3xy - 2y &= 5x + 3 \\ (3x-2)y &= 5x + 3 \\ y &= \frac{5x+3}{3x-2}. \end{aligned}$$

Portanto, a função f tem inversa $f^{-1} : \mathbb{R} - \{\frac{2}{3}\} \to \mathbb{R} - \{\frac{5}{3}\}$ dada por $f^{-1}(x) = \dfrac{5x+3}{3x-2}$.

3.6 Função Afim

Chamamos de função afim toda função do tipo

$$f(x) = ax + b,$$

em que $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Chamamos a de coeficiente de x e b de termo independente.

Exemplo 3.14. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x + 1$ é uma função afim, onde $a = 2$ e $b = 1$.

Toda função afim é injetora e sobrejetora, dependendo da escolha do contradomínio. De fato, se $f(x_1) = f(x_2)$, então

$$ax_1 + b = ax_2 + b,$$

de onde segue que $x_1 = x_2$. Ainda, dado $y \in \mathbb{R}$, tomando $x = \dfrac{y-b}{a}$, temos que

$$f(x) = a(\frac{y-b}{a}) + b = y - b + b = y.$$

3.6.1 Gráfico de uma função afim

O gráfico de uma função afim é uma reta não perpendicular e não paralela ao eixo x. Para o esboço do gráfico de uma função afim é suficiente determinar dois pontos $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$, onde x_1 e x_2 pertencem ao domínio da função.

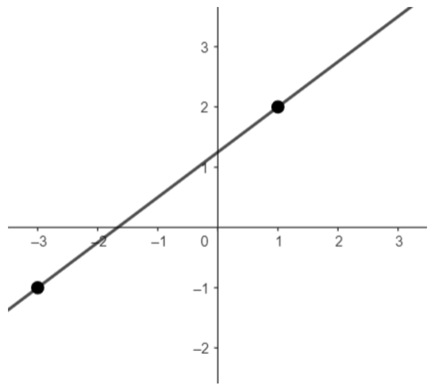


Figura 3.6: Função afim crescente

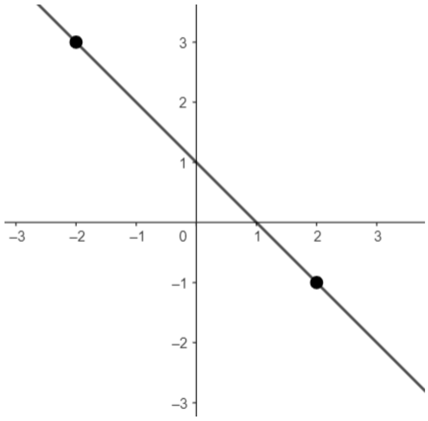


Figura 3.7: Função afim decrescente

Exemplo 3.15. Vamos construir o gráfico da função afim $f(x) = x + 2$.

x	$y = x + 2$	(x, y)
-1	$y = 1$	$(-1, 1)$
1	$y = 3$	$(1, 3)$

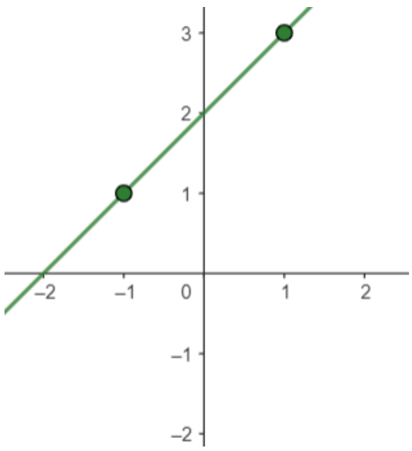
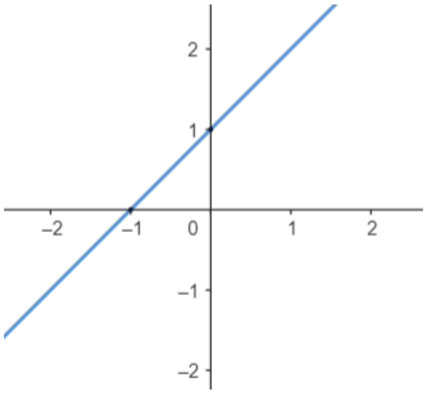


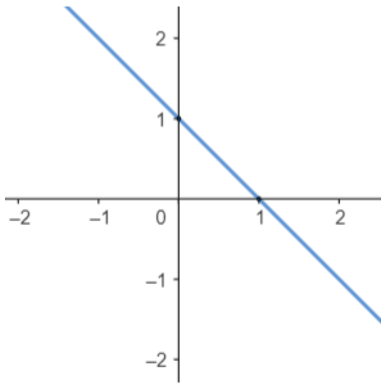
Figura 3.8: Gráfico da função $f(x) = x + 2$.

Há duas situações a serem analisadas no gráfico de uma função afim $f(x) = ax + b$.

i) Se $a > 0$, então $f(x)$ é crescente e teremos um gráfico do tipo:



ii) Se $a < 0$, então $f(x)$ é decrescente e teremos um gráfico do tipo:



Exemplo 3.16. Vamos esboçar o gráfico das funções afins $y = 4x + 5$ e $y = -3x + 3$.

x	$4x + 5$
0	5
$-\frac{5}{4}$	0

x	$-3x + 3$
0	3
1	0

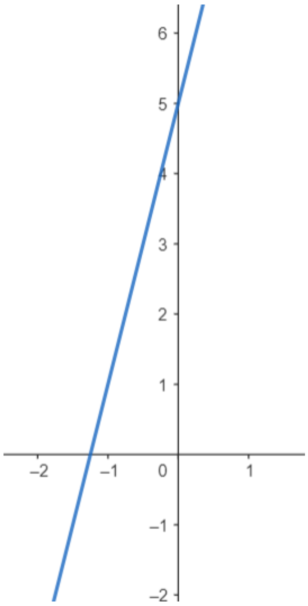


Figura 3.9: Gráfico de $f(x) = 4x + 5$.

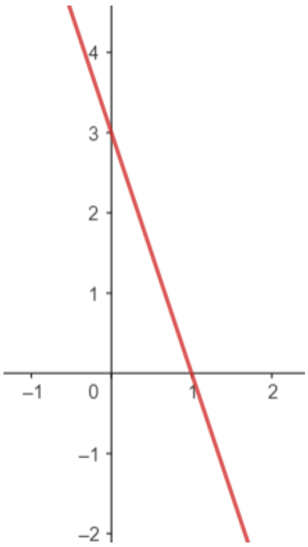


Figura 3.10: Gráfico de $f(x) = -3x + 3$.

3.7 Exercícios Resolvidos

1. Expresse o domínio das funções a valores reais definidas por:

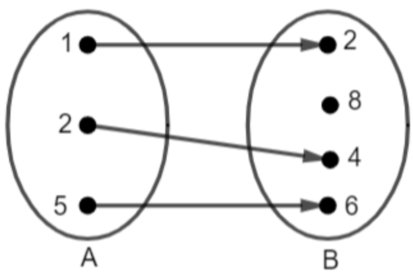
   a) $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$;
   $x - 3 \neq 0 \Rightarrow x \neq 3 \Rightarrow Dom(f) = \mathbb{R} - \{3\}$.

   b) $h(x) = \dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+3}}$;
   $x + 3 > 0 \Rightarrow x > -3$.
   $x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$.
   $Dom(h) = \{x \in \mathbb{R};\ x \geq 2\}$.

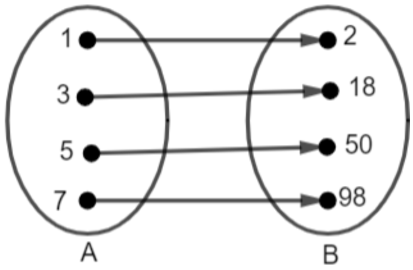
   c) $g(x) = \sqrt{x^2 - 9}$;
   $x^2 - 9 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 9 \Rightarrow |x| \geq \sqrt{9} \Rightarrow |x| \geq 3 \Rightarrow x \leq -3$ ou $x \geq 3$.
   $Dom(g) = \{x \in \mathbb{R};\ x \leq -3 \text{ e } x \geq 3\}$.

   d) $m(x) = 18x + 10$;
   $Dom(m) = \mathbb{R}$, pois $m(x)$ está bem definida para todo $x \in \mathbb{R}$.

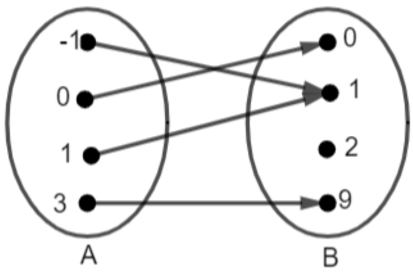
2. Verifique se as seguintes funções $f : A \to B$ são injetoras, sobrejetoras ou bijetoras.



   a) A função é injetora, pois cada elemento de A está associado a um único elemento de B.
   A função NÃO é sobrejetora, pois $Im(f) = \{2, 4, 6\}$ e $CD(f) = \{2, 4, 6, 8\}$. Logo, $Im(f) \neq CD(f)$.
   Portanto a função não é bijetora.



b) A função é injetora, pois cada elemento de A está associado a um único elemento de B.
A função é sobrejetora, pois $Im(f) = \{2, 18, 50, 98\} = CD(f)$.
Portanto, a função é bijetora, pois é injetora e sobrejetora simultaneamente.



c) A função não é injetora, pois -1 e 1 estão associados a um mesmo elemento em B.
A função não é sobrejetora, pois $Im(f) = \{0, 1, 9\}$ e $CD(f) = \{0, 1, 2, 9\}$.
Portanto, a função não é bijetora.

3. Considere a função inversível $f : \mathbb{R} - \{4\} \to \mathbb{R} - \{14\}$ definida por

$$f(x) = \frac{14x + 9}{x - 4}.$$

Qual é a lei de formação da sua inversa?

Trocando as incógnitas x e y, temos:

$$\begin{aligned} x &= \frac{14y+9}{y-4} \\ x(y-4) &= 14y+9 \\ xy-4x &= 14y+9 \\ xy-14y &= 9+4x \\ y(x-14) &= 9+4x \\ y &= \frac{9+4x}{x-14}. \end{aligned}$$

Logo, $f^{-1}(x) = \dfrac{4x+9}{x-14}$ e seu domínio é $Dom(f^{-1}) = \mathbb{R} - \{14\}$.

4. Determine a função inversa de cada função abaixo, esboçando o gráfico da função e de sua inversa.

   a) $f(x) = -2x + 1$;

$$\begin{aligned} y &= -2x+1 \\ x &= -2y+1 \\ x-1 &= -2y \\ y &= \frac{1-x}{2} \\ f^{-1}(x) &= -\frac{x}{2} + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

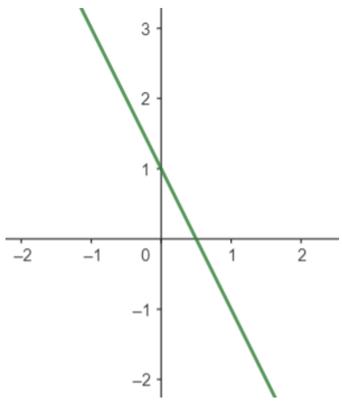


Figura 3.11: Gráfico de $f(x) = -2x + 1$.

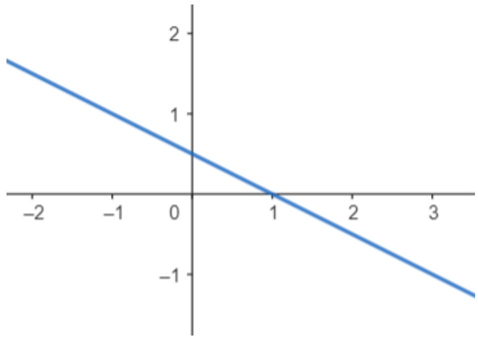


Figura 3.12: Gráfico de $f^{-1}(x) = -\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{2}$.

b) $g(x) = \dfrac{18x}{4}$;

$$\begin{aligned} y &= \frac{18x}{4} \\ x &= \frac{18y}{4} \\ 4x &= 18y \\ y &= \frac{4x}{18} \\ g^{-1}(x) &= \frac{4x}{18}. \end{aligned}$$

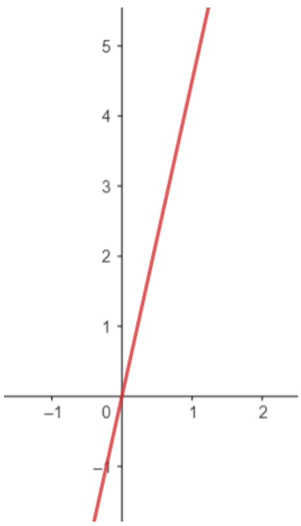


Figura 3.13: Gráfico de $g(x) = \dfrac{18x}{4}$.

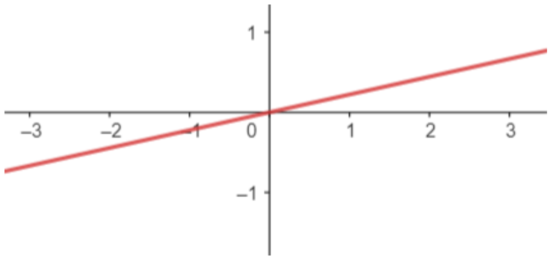


Figura 3.14: Gráfico de $g^{-1}(x) = \dfrac{4x}{18}$.

Capítulo 4

Função Quadrática

Chamamos de função quadrática toda função da forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

com a, b e $c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Chamamos a de coeficiente de x^2, b de coeficiente de x e c de termo independente.

Exemplo 4.1. A função $f(x) = x^2 + 2x + 6$ é uma função quadrática, com coeficientes $a = 1$, $b = 2$ e $c = 6$.

4.1 Gráfico de uma Função Quadrática

O gráfico deste tipo de função é uma curva plana chamada de parábola. Seu formato é semelhante à letra U, podendo ser mais "aberta" ou mais "fechada", dependendo dos coeficientes que a definem.

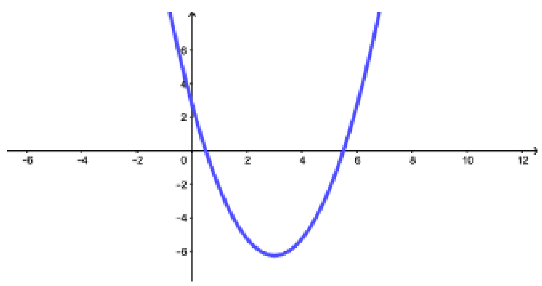
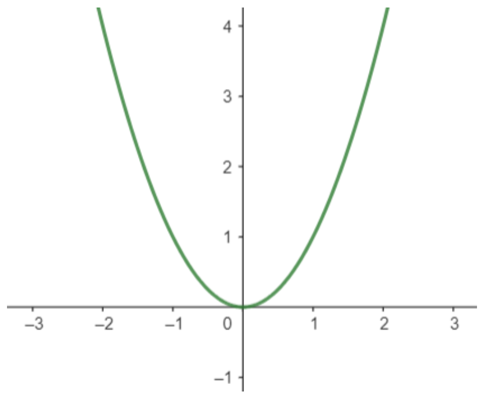


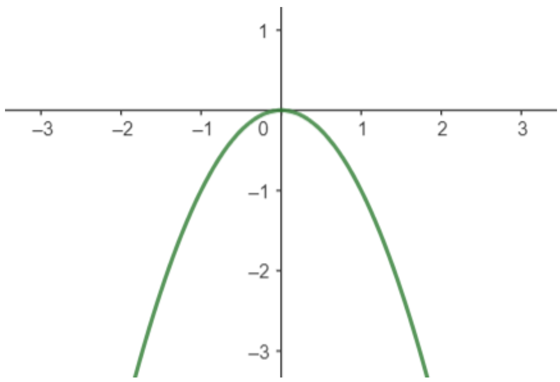
Figura 4.1: Parábola.

A parábola pode ter a concavidade voltada para cima ou para baixo de acordo com o coeficiente a:

- Se $a > 0$, a concavidade da parábola é voltada para cima;



- Se $a < 0$, a concavidade da parábola é voltada para baixo.



Toda parábola possui um eixo de simetria, que é uma reta imaginária em torno da qual é possível refleti-la. O ponto em que o eixo de simetria e a parábola se intersectam é chamado vértice, cujas coordenadas são indicadas por (x_v, y_v).

Para determinar as coordenadas do vértice do gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, podemos utilizar as seguintes relações:

$$x_v = -\frac{b}{2a} \quad \text{e} \quad y_v = -\frac{\Delta}{4a},$$

onde $\Delta = b^2 - 4ac$ é chamado discriminante de f. Observe que também é possível obter y_v fazendo

$$y_v = f(x_v) = ax_v^2 + bx_v + c.$$

As raízes da função quadrática são os valores de x nas quais a parábola intercepta o eixo x, ou seja, os valores de x tais que $f(x) = 0$.

Podemos encontrar até duas raízes reais para uma função quadrática. Considerando $\Delta = b^2 - 4ac$, temos os seguintes casos:

- Se $\Delta < 0$, a função não possui raiz real;
- Se $\Delta = 0$, a função possui somente uma raiz real;
- Se $\Delta > 0$, a função possui duas raízes reais distintas.

Nos dois últimos casos, obtemos as raízes por meio da igualdade

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Observe que a média das duas raízes nos dá x_v:

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)}{2} = \frac{-2b}{4a} = -\frac{b}{2a} = x_v.$$

Ao contrário da reta, a parábola não pode ser determinada por apenas dois pontos. Por esta razão, para esboçar o gráfico de uma função quadrática é preciso determinar os seguintes elementos:

1. Sua concavidade;
2. Suas raízes;
3. Seu vértice;
4. O ponto em que o gráfico intersecta o eixo Oy, ou seja, o ponto $(0, f(0))$.

Exemplo 4.2. Construa o gráfico da função $f(x) = -x^2 + 4x + 1$.

Para $f(x) = -x^2 + 4x + 1$, os coeficientes são $a = -1$, $b = 4$ e $c = 1$. Como $a = -1$, a parábola possui a concavidade voltada para baixo.

O discriminante é dado por $\Delta = b^2 - 4ac$. Logo,

$$\Delta = 4^2 - 4(-1)1 = 16 + 4 = 20.$$

Como $\Delta > 0$, a função possui duas raízes reais distintas que são obtidas através da fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{20}}{2(-1)} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{5}}{-2}.$$

Então, as raízes de f são:

$$x_1 = \frac{-4 + 2\sqrt{5}}{-2} = 2 - \sqrt{5} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-4 - 2\sqrt{5}}{-2} = 2 + \sqrt{5},$$

ou seja, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos $(2-\sqrt{5}, 0)$ e $(2+\sqrt{5}, 0)$.

Para o vértice, temos que:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2(-1)} = 2$$

e

$$y_v = f(2) = -2^2 + 4 \cdot 2 + 1 = 5.$$

Logo, o vértice é dado pelo ponto $(2, 5)$.

O ponto $(0, f(0))$ nos fornece onde a parábola corta o eixo O_y. Neste caso, $(0, f(0)) = (0, 1)$, pois $f(0) = 0 + 0 + 1 = 1$.

Com essas informações, é possível esboçar o gráfico.

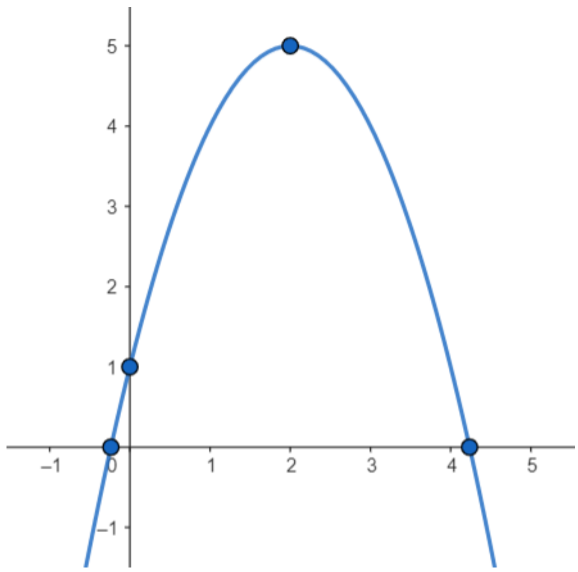


Figura 4.2: Gráfico de $f(x) = -x^2 + 4x + 1$.

4.2 Máximos e Mínimos

O vértice de uma parábola corresponde ao ponto máximo ou mínimo de uma função quadrática. Se a concavidade da parábola é voltada para baixo ($a < 0$), o vértice corresponde ao ponto máximo e chamamos y_v de valor máximo da função. Quando a concavidade da parábola é voltada para cima, o vértice corresponde ao ponto mínimo e y_v é chamado valor mínimo da função.

Exemplo 4.3. Certo salto realizado por um piloto de motocross descreveu uma trajetória que pode ser representada pela função quadrática

$$y = -0,04x^2 + 1,2x,$$

onde x indica a distância (em metros) percorrida e y indica a altura (em metros) que a motocicleta atingiu no decorrer do salto.

Qual a altura máxima que a motocicleta alcançou? Realize o esboço da trajetória da motocicleta.

A função que descreve a trajetória é $y = -0,04x^2+1,2x$, onde $a = -0,04$, $b = 1,2$ e $c = 0$.

Como $a < 0$, as coordenadas do vértice correspondem ao ponto máximo da função, pois sua concavidade é voltada para baixo. Temos:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = \frac{-1,2}{2(-0,04)} = \frac{-1,2}{-0,08} = 15$$

e

$$y_v = f(15) = -0,04(15)^2 + 1,2(15) = -9 + 18 = 9.$$

Assim, a altura máxima que a motocicleta irá alcançar é de 9 metros, pois y_v é o valor máximo da função.

Para realizar o esboço do gráfico da função, vamos calcular o discriminante

$$\Delta = b^2 - 4ac = (1,2)^2 - 4(-0,04) \cdot 0 = 1,44.$$

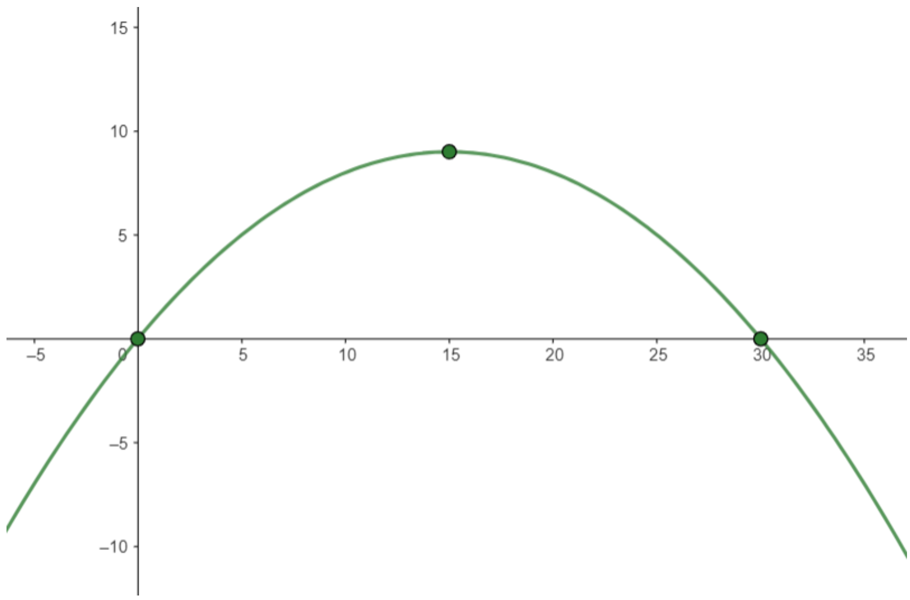
Então, a função possui duas raízes reais:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1,2 \pm \sqrt{1,44}}{2(-0,04)} = \frac{-1,2 \pm 1,2}{-0,08}.$$

Concluímos que

$$x_1 = \frac{-1,2 + 1,2}{-0,08} = 0 \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-1,2 - 1,2}{-0,08} = 30.$$

Desse modo, o gráfico da função intercepta o eixo x nos pontos $(0, 0)$ e $(30, 0)$. Com essas informações, o gráfico da função é esboçado abaixo:



4.3 Exercícios Resolvidos

1. Verifique quais das funções abaixo são da forma ax^2+bx+c, com $a \neq 0$. Neste caso, identifique os valores dos coeficientes a, b e c.

   a) $f(x) = (x-2)(x-3)-4$;
   Como
   $$(x-2)(x-3)-4 = x^2-3x-2x+6-4 = x^2-5x+2,$$
   f é uma função quadrática com $a = 1$, $b = -5$ e $c = 2$.

   b) $h(x) = 5x(2x-1)$;
   Como
   $$h(x) = 5x(2x-1) = 10x^2-5x,$$
   temos que h é uma função quadrática com $a = 10$, $b = -5$ e $c = 0$.

c) $g(x) = (x+1)^2 - x(x+2)$;
Como

$$g(x) = (x+1)^2 - x(x+2) = x^2 + 2x + 1 - x^2 - 2x = 1,$$

g não é uma função quadrática, pois não possui grau 2.

d) $i(x) = (x-3)(x+3) + x^2$;
Temos que

$$i(x) = (x-3)(x+3) + x^2 = x^2 - 9 + x^2 = 2x^2 - 9.$$

Logo, i é uma função quadrática com $a = 2$, $b = 0$ e $c = -9$.

2. Determine os vértices dos gráficos das seguintes funções quadráticas:

a) $f(x) = x^2 + 2x + 1$;
Temos que $a = 1$, $b = 2$ e $c = 1$. Assim,

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2 \cdot 1} = -\frac{2}{2} = -1.$$

Então

$$y_v = f(-1) = (-1)^2 + 2(-1) + 1 = 1 - 2 + 1 = 0.$$

Portanto, o vértice do gráfico da função f é o ponto $(-1, 0)$.

b) $g(x) = -x^2 + 4x + 8$;
Com $a = -1$, $b = 4$ e $c = 8$, temos:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2(-1)} = \frac{-4}{-2} = 2.$$

Então,

$$y_v = g(2) = -2^2 + 4(2) + 8 = -4 + 16 = 12.$$

O vértice do gráfico da função g é o ponto $(2, 12)$.

3. Determine as raízes (ou zeros) reais das seguintes funções, caso existam.

a) $f(x) = x^2 - x - 2$;
Como $a = 1$, $b = -1$ e $c = -2$, temos que

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(1)(-2) = 1 + 8 = 9.$$

Desse modo, a função possui duas raízes reais:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}.$$

Portanto, as raízes de f são

$$x_1 = \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2 \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{1-3}{2} = \frac{-2}{2} = -1.$$

b) $g(x) = x^2 - 2x + 1$;
Como $a = 1$, $b = -2$ e $c = 1$, temos que

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(1)(1) = 4 - 4 = 0.$$

Então, a função possui somente uma raiz real dada por

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 1} = \frac{2}{2} = 1,$$

a qual coincide com o vértice da função.

c) $h(x) = 2x^2 + 3x + 4$;
Temos $a = 2$, $b = 3$ e $c = 4$. Assim,

$$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4(2)(4) = 9 - 32 = -23.$$

Como $\Delta < 0$, a função não possui raiz real.

4. Faça um esboço do gráfico das seguintes funções:

a) $g(x) = -x^2 - 2x + 3$;
Temos $a = -1$, $b = -2$ e $c = 3$. Como $a < 0$, a parábola possui concavidade voltada para baixo.
Sendo

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(-1)3 = 4 + 12 = 16,$$

concluímos que a função possui duas raízes reais distintas:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{16}}{2(-1)} = \frac{2 \pm 4}{-2}.$$

Portanto, as raízes são:

$$x_1 = \frac{2+4}{-2} = \frac{6}{-2} = -3 \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{2-4}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1.$$

Para encontrar x_v, podemos fazer a média entre as raízes. Assim:

$$x_v = \frac{-3+1}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

e

$$y_v = g(-1) = -(-1)^2 - 2(-1) + 3 = -1 + 2 + 3 = 4.$$

Portanto, o vértice da parábola é o ponto $(-1, 4)$.
Também temos $(0, f(0)) = (0, 3)$, ou seja, o gráfico intersecta o eixo Oy em $y = 3$. Segue abaixo o gráfico de g.

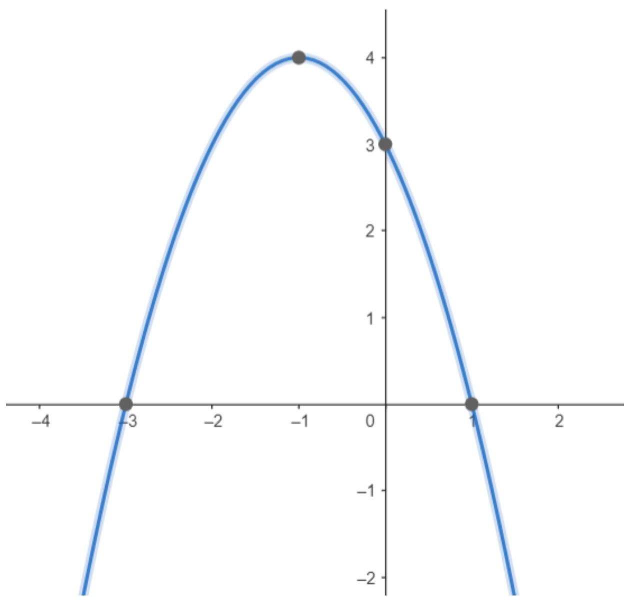


Figura 4.3: Gráfico de $g(x) = -x^2 - 2x + 3$.

b) $r(x) = x^2 - 4$;

Vamos esboçar o gráfico de r de um modo mais direto. Facilmente vemos que $r(x) = 0$ se, e somente se, $x^2 - 4 = 0$, isto é, $x^2 = 4$. Logo, a função r possui duas raízes distintas $x_1 = -2$ e $x_2 = 2$. Agora, iremos encontrar x_v por meio da média entre as raízes:

$$x_v = \frac{2 + (-2)}{2} = \frac{0}{2} = 0.$$

Assim, $y_v = h(0) = 0^2 - 4 = -4$. Como $a = 1 > 0$, a concavidade da parábola é voltada para cima. Então o esboço do gráfico de r é dado abaixo:

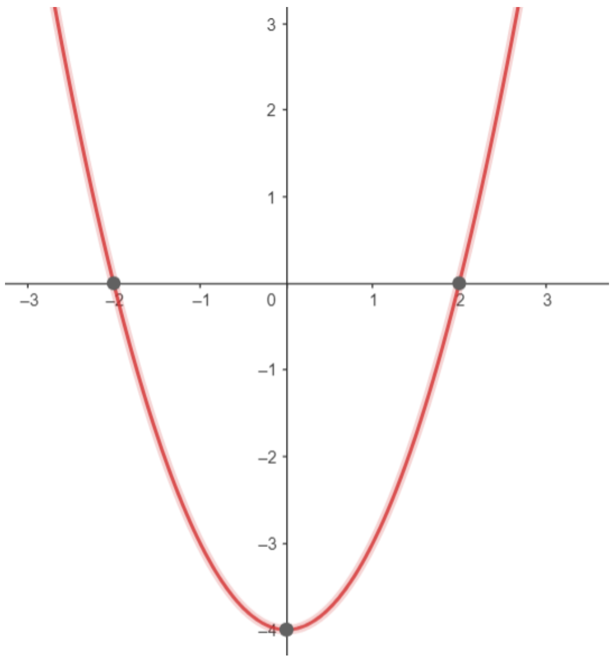


Figura 4.4: Gráfico de $r(x) = x^2 - 4$.

Capítulo 5

Matrizes

Uma matriz A de ordem $m \times n$ é um arranjo de $m \cdot n$ elementos, sendo m o número de linhas e n o número de colunas da matriz.

Os elementos de A são indicados por a_{ij}, onde i determina a linha e j a coluna em que a_{ij} está na matriz. Para nosso estudo, vamos considerar $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Tais elementos são também chamados de entradas da matriz A cuja notação é

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}. \tag{5.1}$$

Exemplo 5.1. São exemplos de matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} -8 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 & 13 \\ 2 & 6 & 10 & 14 \\ -3 & 7 & 11 & -15 \end{bmatrix}.$$

A matriz A é de ordem 2×2, B de ordem 2×1 e C de ordem 3×4.

Daqui por diante, vamos denotar a matriz A dada em (5.1) simplesmente por $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ou $A = (a_{ij})$. Também denotaremos por $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ o conjunto de todas as matrizes de ordem $m \times n$ e entradas reais.

Na próxima seção, abordaremos os tipos existentes de matrizes.

5.1 Tipos de Matrizes

i) Matriz Nula.

Uma matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$ é dita nula se todos os seus elementos são nulos, ou seja, $a_{ij} = 0$ para todo $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$.

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

ii) Matriz Quadrada.

Uma matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$ é dita quadrada se $m = n$, ou seja, o número de linhas é igual ao de colunas. Neste caso, dizemos que A tem ordem n.

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{5} \\ \frac{4}{3} & 2 \end{bmatrix}$.

Se A for uma matriz quadrada, definimos a diagonal principal de A como os elementos da matriz em que $i = j$, ou seja, as entradas a_{ii}, para todo $1 \leq i \leq m$.

Exemplo: $\quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 4 & -8 \\ 2 & \frac{5}{8} & 7 \\ 13 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$

A diagonal secundária da matriz é formada pelos elementos a_{ij} tais que $i + j = n + 1$, onde n é a ordem da matriz.

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$.

Neste caso, como $n = 2$, então $i + j = 3$. Assim, a_{12} e a_{21} determinam os elementos da diagonal secundária.

iii) Matriz Identidade.

A matriz identidade $I = (a_{ij})_{n\times n}$ é uma matriz quadrada satisfazendo:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ se } i = j \\ 0 \text{ se } i \neq j \end{cases}.$$

Exemplo: $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

A matriz acima é a matriz identidade de ordem 3.

iv) Matriz Diagonal.

Uma matriz $A = (a_{ij})$ é dita diagonal se for quadrada e $a_{ij} = 0$, para todo $i \neq j$.

Exemplo: $\quad A = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{5}}{7} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$

v) Matriz Triangular.

Uma matriz quadrada A é chamada triangular superior se todos os elementos abaixo da diagonal principal forem nulos.

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$

Analogamente, A é chamada triangular inferior se todos os elementos acima da diagonal principal forem nulos.

Exemplos: $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4}{5} & -3 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 5 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$

vi) Matriz Simétrica.

Uma matriz quadrada é simétrica se $a_{ij} = a_{ji}$, para todo $1 \leq i,\, j \leq m$.

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 0 \\ 8 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & -7 \end{bmatrix}.$

Veja que

$$a_{12} = a_{21} = 8; \quad a_{13} = a_{31} = 0; \quad a_{23} = a_{32} = 3.$$

vii) Matriz Antissimétrica.

Uma matriz é antissimétrica se $a_{ij} = -a_{ji}$, para todo $1 \leq i,\ j \leq m$. Neste caso, os elementos da diagonal principal são sempre nulos, já que $a_{ii} = -a_{ii}$ se, e somente se, $a_{ii} = 0$.

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.

Veja que

$$b_{12} = -b_{21} = 1; \quad b_{13} = -b_{31} = -2; \quad b_{23} = -b_{32} = -3.$$

5.2 Operações no Conjunto de Matrizes

Existem três operações definidas no conjunto das matrizes: soma de matrizes, multiplicação por escalar e multiplicação de matrizes. Antes de apresentarmos tais operações, vamos estabelecer quando duas matrizes são iguais.

Definição 5.2. *Duas matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{p\times q}$ são iguais se elas têm o mesmo número de linhas e de colunas ($m = p$ e $n = q$) e todos os seus elementos correspondentes são iguais, ou seja, $a_{ij} = b_{ij}$ para todo $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$.*

Por exemplo, as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 3^2 & 1 & \operatorname{sen} \pi \\ 2 & 2^2 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 9 & \cos 0 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

são iguais, pois ambas tem 2 linhas, 3 colunas e os elementos em cada linha e coluna coincidem. Portanto, $A = B$.

5.2.1 Soma e subtração de matrizes

Sejam $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{m\times n}$ matrizes de mesma ordem. Definimos a soma de A e B, denotada por $A + B$, como a matriz

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n}.$$

Por exemplo, se

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 4 \\ 7 & 1 \end{bmatrix},$$

então

$$A + B = \begin{bmatrix} 2+0 & 1+(-1) \\ -1+0 & 3+4 \\ 4+7 & 0+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 7 \\ 11 & 1 \end{bmatrix}.$$

Definição 5.3. *A matriz oposta de uma matriz* $A = (a_{ij})_{m\times n}$ *é a matriz* $-A = (-a_{ij})_{m\times n}$.

Dadas as matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{m\times n}$, definimos a subtração de A por B, denotada por $A - B$, como

$$A - B = A + (-B),$$

sendo $-B$ a matriz oposta de B.

Exemplo: Se

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ -3 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

então

$$-B = \begin{bmatrix} -1 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} A - B &= \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3-1 & 2-4 & 1+2 \\ 0+3 & -4+0 & -2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 3 & -4 & -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Proposição 5.4. Sejam $A, B, C \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Denote por 0 a matriz nula de ordem $m \times n$. Então valem as seguintes propriedades:

1) $A + (B + C) = (A + B) + C$;

2) $A + B = B + A$;

3) $A + 0 = A$;

4) $A + (-A) = 0$.

5.2.2 Multiplicação de matrizes por escalar

Sejam $A = (a_{ij})_{m\times n}$ uma matriz e $k \in \mathbb{R}$. Definimos o produto de A pelo escalar k, denotado por $k \cdot A$, como

$$k \cdot A = (k \cdot a_{ij})_{m\times n}.$$

Em outras palavras, ao multiplicarmos uma matriz A por k, estamos multiplicando cada entrada de A por este escalar.

Exemplo: Sejam $k = 3$ e

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{5} & -8 & 0 \\ \frac{1}{7} & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Então

$$k \cdot A = 3 \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{5} & -8 & 0 \\ \frac{1}{7} & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot \sqrt{5} & 3 \cdot (-8) & 3 \cdot 0 \\ 3 \cdot \frac{1}{7} & 3 \cdot 2 & 3 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\sqrt{5} & -24 & 0 \\ \frac{3}{7} & 6 & 3 \end{bmatrix}.$$

Facilmente vemos que

$$1 \cdot A = (1 \cdot a_{ij})_{m\times n} = (a_{ij})_{m\times n} = A$$

e

$$-1 \cdot A = (-1 \cdot a_{ij})_{m\times n} = (-a_{ij})_{m\times n} = -A.$$

Daqui em diante, vamos trocar a notação $k \cdot A$ por kA. Outras propriedades também são válidas:

Proposição 5.5. Sejam $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ e $k, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$. Então:

1) $k(A + B) = kA + kB$;

2) $(k_1 + k_2)A = k_1 A + k_2 A$;

3) $k_1(k_2 A) = (k_1 k_2)A$.

5.2.3 Produto de matrizes

Sejam $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{n\times p}$ matrizes cujo número de colunas de A coincide com o número de linhas de B.

Definimos o produto de A por B, denotado por AB, como sendo a matriz $C = (c_{ik})_{m\times p}$ tal que

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{in}b_{nk},$$

para cada $i \in \{1, ..., m\}$ e $k \in \{1, ..., p\}$.

Exemplo 5.6. Sejam $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Como A tem ordem 1×2 e B tem ordem 2×3, o produto AB é a matriz $C = (c_{ik})$ de ordem 1×3 tal que

$$c_{11} = \sum_{j=1}^{2} a_{1j}b_{j1} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} = 5 \cdot 4 + 2 \cdot 5 = 30,$$

$$c_{12} = \sum_{j=1}^{2} a_{1j}b_{j2} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} = 5 \cdot 3 + 2 \cdot 0 = 15,$$

$$c_{13} = \sum_{j=1}^{2} a_{1j}b_{j3} = a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} = 5 \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 2.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 5 \cdot 4 + 2 \cdot 5 & 5 \cdot 3 + 2 \cdot 0 & 5 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 30 & 15 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

O produto de matrizes NÃO é comutativo, pois em geral $AB \neq BA$. De fato, mesmo que o produto AB esteja bem definido, o produto BA pode não estar. E mesmo que AB e BA estejam bem definidos, pode não ocorrer a igualdade.

Observe o exemplo anterior. É possível multiplicar A por B pois o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B. Já a multiplicação de B por A não ocorre, pois B possui 3 colunas e A apenas 1 linha. Vejamos mais um exemplo.

Exemplo 5.7. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$. Temos que

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 2 & 1 \cdot 7 + 2 \cdot 6 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 0 & 3 \cdot 7 + 4 \cdot 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 19 \\ 15 & 45 \end{bmatrix},$$

$$BA = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \cdot 1 + 7 \cdot 3 & 5 \cdot 2 + 7 \cdot 4 \\ 0 \cdot 1 + 6 \cdot 3 & 0 \cdot 2 + 6 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 & 38 \\ 18 & 24 \end{bmatrix}.$$

Portanto, A e B não comutam, já que $AB \neq BA$.

Proposição 5.8. Sejam A, B, C matrizes com as ordens adequadas para que cada produto esteja bem definido. Valem as seguintes propriedades:

1) $AI = A$ e $IA = A$, onde I é a matriz identidade de determinada ordem;

2) $A(B + C) = AB + AC$;

3) $(A + B)C = AC + BC$;

4) $(AB)C = A(BC)$;

5) $0 \cdot A = 0$ e $A \cdot 0 = 0$, onde 0 é a matriz nula de determinada ordem.

5.2.4 Transposta de uma matriz

Embora a transposição não seja uma operação entre duas matrizes, ela pode ser vista como uma operação que transforma uma matriz A em outra matriz, denotada por A^t.

Definimos a transposta de uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$, denotada por A^t, como a matriz de ordem $n \times m$ cujas linhas são as colunas de A e cujas colunas são as linhas de A, isto é,

$$A^t = (a_{ji})_{n \times m}.$$

Exemplo 5.9. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{7}{4} & 3 & 2 & \frac{1}{3} \\ 2 & -1 & 2 & \frac{2}{5} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 2 & 0 & 11 \\ 5 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Então

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -\frac{7}{4} & -1 \\ 3 & 2 \\ 2 & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 7 & 0 & 2 \\ 3 & 11 & 4 \end{bmatrix}.$$

Proposição 5.10. Sejam $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ e $k \in \mathbb{R}$. Então:

1) $(A+B)^t = A^t + B^t$;

2) $(kA)^t = kA^t$;

3) $(AB)^t = B^t A^t$;

4) $(A^t)^t = A$.

5.3 Determinante de uma Matriz

O determinante de uma matriz quadrada $A = (a_{ij})_{n\times n}$, denotado por $\det(A)$ ou $|A|$, é um número real definido recursivamente como:

a) Se $n = 1$, então $\det(A) = a_{11}$;

b) Se $n > 1$, então fixada uma linha i de A temos:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}), \tag{5.2}$$

onde A_{ij} é a submatriz de ordem $n-1$ obtida de A retirando-se sua i-ésima linha e sua j-ésima coluna, ou seja,

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-11} & \dots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \dots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & \dots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \dots & a_{i+1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

A expressão dada em (5.2) é conhecida como Teorema de Laplace. A seguir, vamos utilizar esta expressão para determinar regras práticas que nos auxiliam no cálculo do determinante de matrizes quadradas de ordem 2 e 3.

Comecemos com a matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}. \tag{5.3}$$

Pelo Teorema de Laplace, fixando a primeira linha de A, temos que

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{j=1}^{2} (-1)^{1+j} a_{1j} \det(A_{1j}) \\ &= (-1)^{1+1} a_{11} \det(A_{11}) + (-1)^{1+2} a_{12} \det(A_{12}), \end{aligned}$$

onde A_{11} é a matriz obtida de A retirando-se a linha 1 e a coluna 1 e A_{12} é a matriz obtida de A retirando-se a linha 1 e a coluna 2. Logo,

$$A_{11} = (a_{22}) \quad \text{e} \quad A_{12} = (a_{21}).$$

Então

$$\begin{aligned} \det(A) &= (-1)^{1+1} a_{11} \det(A_{11}) + (-1)^{1+2} a_{12} \det(A_{12}) \\ &= (-1)^2 a_{11} a_{22} + (-1)^3 a_{12} a_{21} \\ &= a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}. \end{aligned}$$

Portanto, o determinante da matriz A dada em (5.3) é

$$\det(A) = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}.$$

Considere agora a matriz

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}. \tag{5.4}$$

Pelo Teorema de Laplace, fixando a primeira linha de C temos que:

$$\det(C) = (-1)^{1+1}c_{11}|C_{11}| + (-1)^{1+2}c_{12}|C_{12}| + (-1)^{1+3}c_{13}|C_{13}|,$$

onde

$$C_{11} = \begin{bmatrix} c_{22} & c_{23} \\ c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}, \quad C_{12} = \begin{bmatrix} c_{21} & c_{23} \\ c_{31} & c_{33} \end{bmatrix}, \quad C_{13} = \begin{bmatrix} c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \det(C) &= c_{11}(c_{22}c_{33} - c_{23}c_{32}) - c_{12}(c_{21}c_{33} - c_{23}c_{31}) + c_{13}(c_{21}c_{32} - c_{22}c_{31}) \\ &= c_{11}c_{22}c_{33} - c_{11}c_{23}c_{32} - c_{12}c_{21}c_{33} + c_{12}c_{23}c_{31} + c_{13}c_{21}c_{32} - c_{13}c_{22}c_{31} \\ &= c_{11}c_{22}c_{33} + c_{12}c_{23}c_{31} + c_{13}c_{21}c_{32} - c_{11}c_{23}c_{32} - c_{12}c_{21}c_{33} - c_{13}c_{22}c_{31}. \end{aligned}$$

Portanto, o determinante da matriz C dada em (5.4) é dada por

$$\det(C) = c_{11}c_{22}c_{33} + c_{12}c_{23}c_{31} + c_{13}c_{21}c_{32} - (c_{11}c_{23}c_{32} + c_{12}c_{21}c_{33} + c_{13}c_{22}c_{31}).$$

Esta fórmula também pode ser obtida pela Regra de Sarrus, que consiste em repetir as duas primeiras colunas da matriz C à sua direita:

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{matrix}$$

Em seguida, os elementos da diagonal principal são multiplicados. O mesmo deve ser feito com as diagonais à direita da diagonal principal, para que possamos somar o produto dessas três diagonais, resultando em:

$$c_{11}c_{22}c_{33} + c_{12}c_{23}c_{31} + c_{13}c_{21}c_{32}.$$

O mesmo deve ser realizado com a diagonal secundária e as demais diagonais à sua direita, multiplicando o valor encontrado por -1:

$$-(c_{13}c_{22}c_{31} + c_{11}c_{23}c_{32} + c_{12}c_{21}c_{33}).$$

O número resultante da soma da primeira operação com a segunda é o determinante da matriz C, ou seja,

$$\det(C) = c_{11}c_{22}c_{33} + c_{12}c_{23}c_{31} + c_{13}c_{21}c_{32} - (c_{13}c_{22}c_{31} + c_{11}c_{23}c_{32} + c_{12}c_{21}c_{33}).$$

Exemplo 5.11. Seja $B = \begin{bmatrix} 3 & 11 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$. Então,

$$\det(B) = 3 \cdot 4 - (11 \cdot 6) = 12 - 66 = -54.$$

Exemplo 5.12. Considere a matriz $D = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & 9 & 5 \\ 9 & 0 & -6 \end{bmatrix}$.

Pela regra de Sarrus, repetindo as duas primeiras colunas de D, obtemos:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & 9 & 5 \\ 9 & 0 & -6 \end{bmatrix} \begin{matrix} \color{blue}{2} & \color{blue}{-1} \\ \color{blue}{5} & \color{blue}{9} \\ \color{blue}{9} & \color{blue}{0} \end{matrix}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \det(D) &= -108 - 45 + 0 - (30 + 0 + 162) \\ &= -108 - 45 - 30 - 162 \\ &= -345. \end{aligned}$$

Exemplo 5.13. Seja $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & -5 & 7 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & -9 & 1 \end{bmatrix}$.

Pelo Teorema de Laplace, fixando a primeira linha da matriz E, obtemos:

$$\begin{aligned} \det(E) &= \sum_{j=1}^{4} (-1)^{1+j} e_{1j} \det(E_{1j}) \\ &= (-1)^2 e_{11}|E_{11}| + (-1)^3 e_{12}|E_{12}| + (-1)^4 e_{13}|E_{13}| + (-1)^5 e_{14}|E_{14}| \\ &= 1|E_{11}| - 0|E_{12}| + 2|E_{13}| - 4|E_{14}| \\ &= |E_{11}| + 2|E_{13}| - 4|E_{14}|, \end{aligned}$$

onde

$$E_{11} = \begin{bmatrix} -5 & 7 & 0 \\ 0 & 4 & -6 \\ 1 & -9 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_{13} = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 0 \\ 2 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_{14} = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 7 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -9 \end{bmatrix}.$$

Assim, temos:

$$\begin{bmatrix} -5 & 7 & 0 \\ 0 & 4 & -6 \\ 1 & -9 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} -5 & 7 \\ 0 & 4 \\ 1 & -9 \end{matrix}$$

$|E_{11}| = -2 - 42 + 0 - (0 - 270 + 0) = -20 - 42 + 270 = 208.$

$$\begin{bmatrix} 3 & -5 & 0 \\ 2 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 & -5 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}$$

$|E_{13}| = 0 + 0 + 0 - (-10 - 18 + 0) = 28.$

$$\begin{bmatrix} 3 & -5 & 7 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -9 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 & -5 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}$$

$|E_{14}| = 0 + 0 + 14 - (90 + 12 + 0) = 14 - 90 - 12 = -88.$

Portanto,

$$\det(E) = 208 + 2(28) - 4(-88) = 208 + 56 + 352 = 616.$$

5.4 Exercícios Resolvidos

1) Calcule o determinante das seguintes matrizes:

a) $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$; $\det(A) = 4 \cdot 7 - 3 \cdot 2 = 28 - 6 = 22.$

b) $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; $\det(B) = -4+6+4-(12+2-4) = 6-10 = -4.$

2) Sejam as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 9 & 5 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}.$$

Determine as seguintes operações:

a) $A+B=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 5 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 2 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-1 & 3+0\\ 5+2 & 4+3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 3\\ 7 & 7\end{bmatrix}$;

b) $5C=5\begin{bmatrix}9 & 5\\ -4 & 7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\cdot 9 & 5\cdot 5\\ 5\cdot(-4) & 5\cdot 7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}45 & 25\\ -20 & 35\end{bmatrix}$;

c)

$$\begin{aligned}
B-C &= \begin{bmatrix}-1 & 0\\ 2 & 3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}9 & 5\\ -4 & 7\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}-1 & 0\\ 2 & 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-9 & -5\\ 4 & -7\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}-1-9 & 0-5\\ 2+4 & 3-7\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}-10 & -5\\ 6 & -4\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
3(C+A)-B &= 3\left[\begin{bmatrix}9 & 5\\ -4 & 7\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 3\\ 5 & 4\end{bmatrix}\right]-\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 2 & 3\end{bmatrix}\\
&= 3\begin{bmatrix}9+1 & 5+3\\ 4+5 & 7+4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ -2 & -3\end{bmatrix}\\
&= 3\begin{bmatrix}10 & 8\\ 1 & 11\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ -2 & -3\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}30 & 24\\ 3 & 33\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ -2 & -3\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}31 & 24\\ 1 & 30\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

3) Sabendo que

$$A=\begin{bmatrix}\sqrt[3]{a} & 23\\ 3 & 121\\ 11 & 3b+7\end{bmatrix} \text{ e } B=\begin{bmatrix}-2 & 23\\ 3 & 11^2\\ 11 & 4\end{bmatrix},$$

determine os valores de a e b para que $A=B$.

Para que $A=B$ devemos ter $\sqrt[3]{a}=-2$ e $3b+7=4$. Então

$$a=(\sqrt[3]{a})^3=(-2)^3=-8$$

e $3b=-3$, o que implica que $b=-\dfrac{3}{3}=-1$.

4) Considerando as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 11 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ -3 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 0 \\ 9 & 7 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 10 & -1 \\ 1 & 0 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}, \; E = \begin{bmatrix} -4 & 5 & 1 & 2 \\ -8 & 10 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 7 & -13 \end{bmatrix},$$

realize as seguintes operações:

a) $CD = \begin{bmatrix} 73 & -7 \\ 69 & 3 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$;

b) $BD + 3A = \begin{bmatrix} -15 & 14 \\ -14 & 33 \end{bmatrix}$;

c) $CE = \begin{bmatrix} -52 & 65 & 13 & 23 \\ -76 & 127 & 51 & -13 \\ -4 & 29 & 25 & -32 \end{bmatrix}$;

d) $E^t = \begin{bmatrix} -4 & -8 & 4 \\ 5 & 10 & 3 \\ 1 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & -13 \end{bmatrix}$;

e) $B^t = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 0 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$.

5) Determine os valores de x para que o determinante de A seja positivo, sendo

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & x \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & x \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{matrix}$$

Pela Regra de Sarrus,

$$\begin{aligned}\det(A) &= 16 + 12x + 2 - (16 + 2x + 12) \\ &= 16 + 12x + 2 - 16 - 2x - 12 \\ &= 10x - 10.\end{aligned}$$

Fazendo $\det(A) > 0$, concluímos que $10x > 10$, o que resulta em $x > 1$.

Capítulo 6

Escalonamento de Matrizes

Para o escalonamento de matrizes, iremos utilizar as operações elementares realizadas sobre as linhas de uma matriz. Vamos denotar por L_i e L_j as linhas i e j de uma matriz.

As operações elementares são divididas em três classes:

1. Permutar a linha L_i pela linha L_j, com $j \neq i$, cuja notação será
$$L_i \leftrightarrow L_j.$$
2. Multiplicar a linha L_i por um escalar $k \in \mathbb{R}$ não nulo, cuja notação será
$$L_i \rightarrow kL_i.$$
3. Substituir a linha L_i pela linha L_i mais k vezes a linha L_j, com $k \in \mathbb{R}$ não nulo e $j \neq i$, ou seja,
$$L_i \rightarrow L_i + kL_j.$$

Exemplo 6.1. Considere a matriz
$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 8 & 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

Realizando as operações elementares sobre as linhas de A, temos:
$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 8 & 0 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \begin{bmatrix} 8 & 0 & -5 \\ -1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_1 \to \frac{1}{8}L_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{5}{8} \\ -1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \to L_3 + 2L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{5}{8} \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 12 \end{bmatrix} = B.$$

Claramente, temos $A \neq B$. No entanto B foi obtida de A por meio de 3 operações elementares. Neste caso, dizemos que A e B são matrizes equivalentes, de acordo com a seguinte definição:

Definição 6.2. *Dizemos que duas matrizes A e B de mesma ordem são equivalentes por linhas se B for obtida de A por meio de um número finito de operações elementares sobre as linhas de A.*

A notação utilizada para tal equivalência é

$$A \sim B.$$

Toda operação elementar e sobre as linhas de uma matriz é reversível, ou seja, existe uma outra operação elementar e' que desfaz a operação e. Portanto, se $A \sim B$, então $B \sim A$.

Exemplo 6.3. Encontre uma matriz equivalente à matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \to L_2 - 2L_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \to L_3 - 3L_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & -4 & -8 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \to -\frac{1}{2}L_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -8 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \to L_3 + 4L_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Deste modo, a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ é equivalente à matriz A.

Definição 6.4. *Dizemos que uma matriz A está na forma escalonada por linhas se:*

(a) Toda linha nula de A, se houver, está abaixo de todas as linhas não nulas;

(b) Cada primeiro elemento não nulo de uma linha está à direita do primeiro elemento não nulo da linha anterior.

Veja que a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

encontrada no último exemplo está na forma escalonada. Ela é uma das formas escalonadas da matriz A, pois existem infinitas matrizes equivalentes a A e que estão na forma escalonada.

Exemplo 6.5. As matrizes

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 7 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & -3 & \frac{1}{2} & \frac{2}{4} \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

estão na forma escalonada, pois satisfazem as condições (a) e (b) acima.

Exemplo 6.6. A matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

não está na forma escalonada, pois o primeiro elemento não nulo da segunda linha, que é -1, está abaixo do primeiro elemento não nulo da primeira linha, e não à direita.

Definição 6.7. *Dizemos que uma matriz está na forma escada se ela estiver na forma escalonada e, além disso,*

(i) O primeiro elemento não nulo de uma linha não nula é igual a 1. *Tal elemento é chamado pivô;*

(ii) O pivô de cada linha é o único elemento não nulo da coluna em que ele está.

Exemplo 6.8. A matriz

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

está na forma escada, pois satisfaz as condições da definição anterior. A matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

está na forma escalonada, mas não está na forma escada, pois o pivô da terceira linha não é o único elemento não nulo da coluna em que ele está (no caso, terceira coluna).

Teorema 6.9. *Toda matriz não nula é equivalente por linhas a uma única matriz na forma escada.*

Portanto, sempre é possível obter uma matriz na forma escada a partir de uma outra matriz não nula, realizando um número finito de operações elementares.

Exemplo 6.10. Determine a forma escada da matriz

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 13 \\ 1 & -5 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

realizando operações elementares.

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 13 \\ 1 & -5 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 2 & -4 & 13 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \overset{L_2 \to L_2 - 2L_1}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 0 & 6 & 9 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\overset{L_2 \to \frac{1}{6}L_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{9}{6} \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \overset{L_3 \to L_3 - 2L_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{9}{6} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{L_2 \to L_2 - \frac{9}{6}L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\overset{L_1 \to L_1 - 2L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{L_1 \to L_1 + 5L_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto, a forma escada da matriz B é a matriz identidade. Veremos adiante uma consequência deste resultado.

6.1 Matriz Inversa

Definição 6.11. *Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Dizemos que A possui inversa se existir uma matriz B de ordem n tal que*

$$AB = BA = I_n,$$

onde I_n é a matriz identidade de ordem n. Neste caso, também dizemos que A é uma matriz inversível e que B é a matriz inversa de A.

Nem sempre uma matriz admite inversa. No entanto, quando a matriz inversa existir, ela será única. De fato, suponha que A admita duas matrizes inversas B e C, ou seja,

$$AB = BA = I_n \quad \text{e} \quad AC = CA = I_n.$$

Então,

$$C = CI_n = C(AB) = (CA)B = I_nB = B.$$

Portanto, $C = B$ e a inversa de A é única.

Vamos denotar a inversa de A por A^{-1}, ou seja,

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n.$$

Os dois próximos teoremas nos auxiliam a verificar se uma matriz é inversível, de duas maneiras diferentes: uma usando o determinante da matriz e outra usando a equivalência de matrizes.

Teorema 6.12. *Uma matriz quadrada A possui inversa se, e somente se, $\det(A) \neq 0$. Neste caso, $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.*

Teorema 6.13. *Uma matriz quadrada A de ordem n possui inversa se, e somente se, A é equivalente por linhas à matriz identidade I_n.*

O Teorema 6.13 nos garante que uma matriz inversível A pode ser reduzida à matriz I_n realizando-se um número finito de operações elementares. Neste caso, como I_n está na forma escada e a forma escada de A é única, concluímos que I_n é a forma escada de toda matriz inversível A.

Existem dois métodos muito usados para determinar a inversa de uma matriz, quando ela existe. Um deles é o método de Laplace, que não será apresentado aqui. O outro é o seguinte resultado:

Teorema 6.14. *Se A for uma matriz inversível, então A^{-1} será obtida aplicando-se à matriz identidade I_n a mesma sequência de operações elementares necessárias para reduzir a matriz A à sua forma escada (matriz identidade I_n).*

Na prática operamos simultaneamente com A e I_n posicionando-as lado a lado, de modo a formar a matriz:

$$(A|I_n).$$

As operações elementares nesta matriz produzem operações idênticas em A e em I_n. Pelo Teorema 6.13, se A for inversível, então $A \sim I_n$. E pelo Teorema 6.14, $I_n \sim A^{-1}$ pelas mesmas operações que dão a equivalência entre A e I_n. Portanto,

$$(A|I_n) \sim (I_n|A^{-1}).$$

Logo, ao realizar operações elementares na matriz $(A|I_n)$, assim que obtivermos I_n do lado esquerdo desta matriz, obteremos A^{-1} no lado direito da mesma matriz.

Exemplo 6.15. Caso exista, encontre a inversa da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Primeiramente, veja que

$$\det(A) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 0 - 1 = -1.$$

Como $\det(A) \neq 0$, a matriz A possui inversa A^{-1}. Como A tem ordem 2, para utilizarmos o método precisamos operá-la simultaneamente com a matriz identidade de ordem 2. Assim, temos:

$$(A \mid I_2) = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \to L_2 - 2L_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right].$$

Deste modo,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

é a matriz inversa de A.

Exemplo 6.16. Se existir, determine a inversa de

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Primeiramente, vamos verificar se B é inversível. Seu determinante é dado como:

$$\det(B) = 4 + 0 + 2 - (0 + 4 + 6) = 6 - 10 = -4 \neq 0.$$

Logo, a matriz B possui inversa B^{-1}. Pelo método adotado, como B tem ordem 3, precisamos operá-la simultaneamente com a matriz identidade de ordem 3. Logo,

$$(B \mid I_3) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \to L_2 - 2L_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \to L_3 - 3L_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \to -\frac{1}{4}L_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \to L_3 + 4L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_3 \to -L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \to L_2 - \frac{1}{4}L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_1 \to L_1 - L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \to L_1 - 2L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right].$$

Portanto,

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

é a matriz inversa de B.

6.2 Exercícios Resolvidos

1) Encontre, se possível a forma escada das matrizes:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$;

Realizando as operações elementares, obtemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \to L_2 - L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \to L_3 - L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \to L_3 - 3L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \to L_2 - L_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_1 \to L_1 - L_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \to L_1 - L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto, a forma escada de A é a matriz identidade de ordem 3, o que significa que A é uma matriz inversível.

b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$;

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \to L_2 - 2L_1} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \to L_3 - 3L_1} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \\ 0 & -10 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \to -\frac{1}{5}L_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} \\ 0 & -10 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \to L_3 + 10L_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \to -\frac{1}{2}L_3} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \to L_2 + \frac{3}{5}L_3} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_1 \to L_1 + L_3} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \to L_1 - 3L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto, a forma escada de B também é a matriz identidade de ordem 3, o que significa que B é uma matriz inversível.

c) $C = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 35 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix}$;

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 35 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -1 & 4 & 5 \\ 2 & -3 & 35 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \to L_2 + L_1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 9 \\ 2 & -3 & 35 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \to L_3 - 2L_1} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & 3 & 27 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \to L_3 - 3L_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \to L_1 + 3L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 31 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto, a forma escada de C não é a matriz identidade, o que significa que C não é inversível. A forma escada de uma matriz que não admite inversa sempre terá pelo menos uma linha inteira nula.

2) Encontre, se existir, a inversa das seguintes matrizes:

a) $D = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$;

Inicialmente, precisamos calcular o determinante da matriz A. Logo,

$$\det(A) = -18 - 8 - 8 - (12 - 16 - 6) = -34 - (-34) = 0.$$

Como $\det(A) = 0$ a matriz D não possui inversa.

b) $E = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 6 \\ -3 & -2 & 7 \end{bmatrix}$;

Calculando o determinante da matriz E temos:

$$\det(E) = 35 - 54 - 8 - (-30 + 42 - 12) = -27 - 0 = -27.$$

Como $\det(E) \neq 0$, a matriz E possui inversa. Pelo método de inversão de matrizes, temos:

$$(E \mid I_3) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 \to L_3 + 3L_1]{L_2 \to L_2 - 2L_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 13 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_2 \to -L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & 13 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \to L_3 - 7L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 27 & -11 & 7 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_3 \to \frac{1}{27} L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{27} & \frac{7}{27} & \frac{1}{27} \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \to L_2 + 2L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{32}{27} & -\frac{13}{27} & \frac{2}{27} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{27} & \frac{7}{27} & \frac{1}{27} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_1 \to L_1 - 2L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & \frac{49}{27} & -\frac{14}{27} & -\frac{2}{27} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{32}{27} & -\frac{13}{27} & \frac{2}{27} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{27} & \frac{7}{27} & \frac{1}{27} \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \to L_1 - 3L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{47}{27} & \frac{25}{27} & -\frac{8}{27} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{32}{27} & -\frac{13}{27} & \frac{2}{27} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{27} & \frac{7}{27} & \frac{1}{27} \end{array}\right].$$

Portanto,

$$E^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{47}{27} & \frac{25}{27} & -\frac{8}{27} \\ \frac{32}{27} & -\frac{13}{27} & \frac{2}{27} \\ -\frac{11}{27} & \frac{7}{27} & \frac{1}{27} \end{bmatrix}$$

é a inversa de E.

Capítulo 7

Sistemas Lineares e suas Soluções

7.1 Sistema de Equações Lineares

Definição 7.1. *Um sistema de equações lineares com m equações e n variáveis é um conjunto de equações da forma*

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

com $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$. A solução deste sistema é dada por uma n-upla de números reais $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ que satisfaz simultaneamente as m equações do sistema.

Consideremos um sistema de equações lineares com duas equações e duas variáveis:

$$S_1 : \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

onde $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$, $i, j = 1, 2$.

Geometricamente, cada equação (cada linha) deste sistema representa uma reta $r_1 : a_{11}x + a_{12}y = b_1$ e $r_2 : a_{21}x + a_{22}y = b_2$ cujas posições relativas podem se dividir em: paralelas distintas, paralelas coincidentes e concorrentes.

Vamos analisar as posições de r_1 e r_2 no plano e compará-las com a solução do sistema S_1.

a) r_1 e r_2 são concorrentes ($r_1 \pitchfork r_2$);

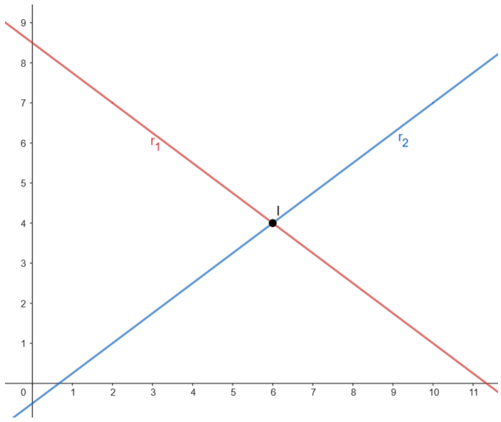


Figura 7.1: Retas concorrentes.

Quando r_1 e r_2 são concorrentes, elas se interceptam em um único ponto $I = (a, b)$. Neste caso, dizemos que o sistema S_1 é possível e determinado (SPD), pois possui uma única solução $S = \{(a, b)\}$ que é dada pelas coordenadas do ponto I.

b) r_1 e r_2 são coincidentes ($r_1 = r_2$);

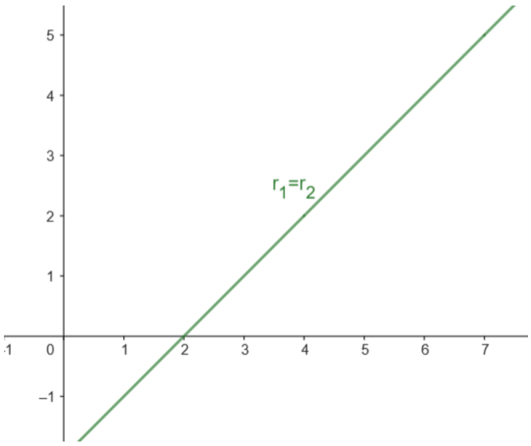


Figura 7.2: Retas paralelas coincidentes.

Neste caso, as retas r_1 e r_2 coincidem, isto é, se interceptam em todos os seus pontos. Deste modo, o sistema S_1 possui infinitas soluções, já que as equações de r_1 e r_2 são múltiplas uma da outra, ou seja, qualquer ponto (x, y) pertencente a r_1 (ou a r_2) é solução do sistema. Portanto, dizemos que o sistema é possível e indeterminado (SPI).

c) r_1 e r_2 são paralelas distintas ($r_1 \parallel r_2$);

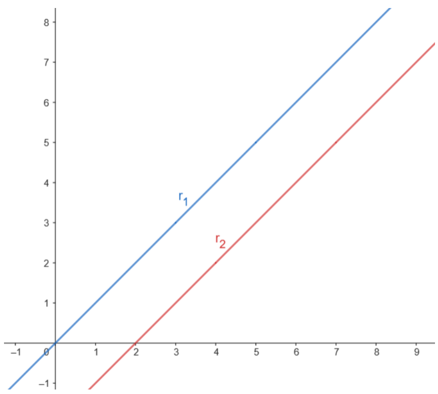


Figura 7.3: Retas paralelas distintas.

Neste caso, as retas r_1 e r_2 não se interceptam. Logo, o sistema S_1 não admite solução, pois não existem x, y que satisfaçam as duas equações de S_1 ao mesmo tempo. Portanto, dizemos que S_1 é um sistema impossível (SI).

De acordo com os itens a), b) e c), concluímos que um sistema de duas equações e duas variáveis pode possuir uma única solução, infinitas soluções ou nenhuma solução.

Exemplo 7.2. Considere o sistema

$$S_1 : \begin{cases} x + y = 20 \\ x - 3y = -12 \end{cases} .$$

Este sistema é equivalente a

$$\begin{cases} 3x + 3y = 60 \\ x - 3y = -12 \end{cases} .$$

Somando ambas as equações, obtemos que $4x = 48$, ou seja, $x = 12$. Substituindo $x = 12$ na equação $x + y = 20$, obtemos que $y = 8$. Portanto, S_1 possui uma única solução $S = \{(12, 8)\}$, sendo possível e determinado.

Geometricamente, temos que as retas $r_1 : x + y = 20$ e $r_2 : x - 3y = -12$ são concorrentes no ponto $P = (12, 8)$.

Agora, considere um sistema de equações lineares com três equações e três variáveis da forma:

$$S_2 : \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

com $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$, $i, j = 1, 2, 3$.

Em $\mathbb{R}^3$, cada equação de S_2 representa um plano, digamos:

$$\pi_1 : a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1;$$
$$\pi_2 : a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2;$$
$$\pi_3 : a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3.$$

As suas posições relativas são dadas nos seguintes casos:

a) π_1, π_2 e π_3 são paralelos distintos ($\pi_1 \parallel \pi_2 \parallel \pi_3$);

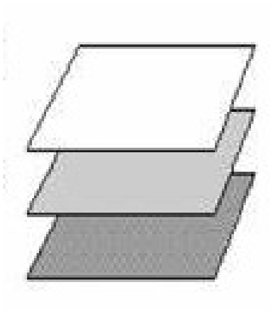


Figura 7.4: Planos paralelos distintos.

Neste caso, não há interseção entre os planos. Logo, o sistema S_2 não admite solução, sendo chamado de sistema impossível (SI).

b) π_1 e π_2 são paralelos distintos e concorrentes a π_3;

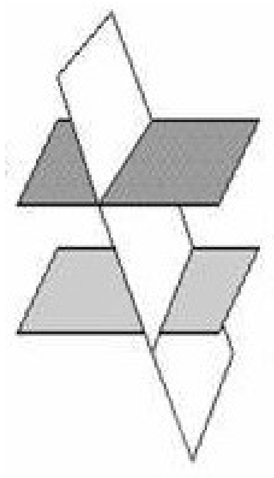


Figura 7.5: Planos paralelos distintos concorrentes a um terceiro plano.

Neste caso, os planos π_1 e π_2 não possuem pontos em comum. Logo, o sistema S_2 não admite solução, pois a solução deve satisfazer as três equações ao mesmo tempo. Aqui também o sistema é impossível (SI).

c) π_1, π_2 e π_3 são concorrentes em uma reta;

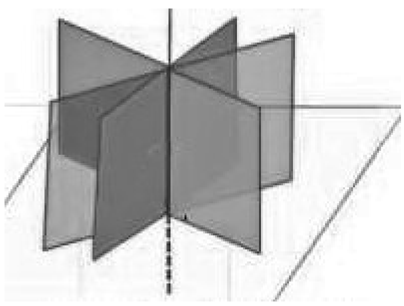


Figura 7.6: Planos concorrentes em uma reta.

Neste caso, a interseção dos planos π_1, π_2 e π_3 é uma reta. Logo, tais planos possuem inúmeros pontos em comum, ou seja, o sistema S_2 possui infinitas soluções, sendo chamado de sistema possível e indeterminado (SPI).

d) π_1, π_2 e π_3 são concorrentes em um ponto;

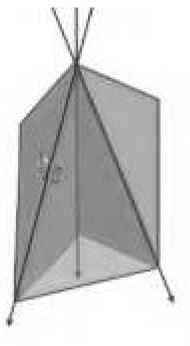


Figura 7.7: Planos concorrentes em um ponto.

Neste caso, a interseção dos três planos é um único ponto P, ou seja, os planos possuem somente um ponto em comum. Deste modo, o sistema S_2 possui uma única solução, sendo possível e determinado (SPD).

e) π_1, π_2 e π_3 são paralelos coincidentes ($\pi_1 = \pi_2 = \pi_3$).

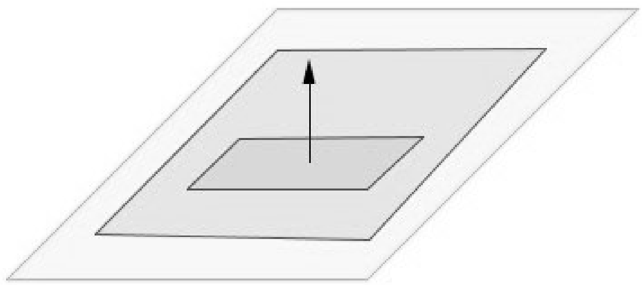


Figura 7.8: Planos coincidentes.

Neste caso, os três planos coincidem, sendo formados pelo mesmo conjunto de pontos. Portanto, o sistema S_2 possui infinitas soluções, também chamado de possível e indeterminado (SPI).

Observação 7.3. Quando dois planos são coincidentes, as equações que o determinam não precisam ser iguais, mas sim uma múltipla da outra.

7.2 Resolução de Sistemas Lineares

Na aula 02, estudamos dois métodos de resolução de sistemas lineares com duas equações e duas variáveis: o método da adição e da substituição. Esses métodos também são válidos para sistemas de ordens maiores, porém não são práticos. Existem, portanto, outros métodos mais vantajosos, como o método do escalonamento.

7.2.1 Método do escalonamento

Dado um sistema de equações lineares da forma

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

podemos associá-lo à seguinte equação matricial:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

sendo $C = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ a matriz dos coeficientes, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ a matriz das variáveis e $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ a matriz dos termos independentes.

Deste modo, o sistema S pode ser escrito matricialmente como $CX = B$. A matriz ampliada A do sistema é dada pela matriz C mais uma coluna determinada pela matriz B, ou seja,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}.$$

Para o método do escalonamento iremos utilizar o seguinte resultado:

Teorema 7.4. *Sistemas lineares que possuem matrizes ampliadas equivalentes por linhas admitem o mesmo conjunto solução.*

O método do escalonamento para sistemas lineares consiste em realizar operações elementares em sua matriz ampliada, a fim de encontrar uma matriz escalonada ou na forma escada equivalente por linhas à matriz ampliada inicial. Pelo teorema anterior, o sistema inicial possui as mesmas soluções do sistema associado à matriz na forma escalonada (ou escada).

Exemplo 7.5. Considere o sistema abaixo e resolva-o por escalonamento:

$$S : \begin{cases} 2x + y - 2z = 10 \\ 3x + 2y + 2z = 1 \\ 5x + 4y + 3z = 4 \end{cases} .$$

A matriz ampliada desse sistema é dada por

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 10 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 4 \end{bmatrix} .$$

Devemos realizar operações elementares sobre as linhas de A a fim de obter uma nova matriz ampliada na forma escada (poderia ser escalonada):

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 10 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \to L_2 - L_1} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 10 \\ 1 & 1 & 4 & -9 \\ 5 & 4 & 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & -9 \\ 2 & 1 & -2 & 10 \\ 5 & 4 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \to L_2 - 2L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & -9 \\ 0 & -1 & -10 & 28 \\ 5 & 4 & 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \to L_3 - 5L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & -9 \\ 0 & -1 & -10 & 28 \\ 0 & -1 & -17 & 49 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \to -L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & -9 \\ 0 & 1 & 10 & -28 \\ 0 & -1 & -17 & 49 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \to L_3 + L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & -9 \\ 0 & 1 & 10 & -28 \\ 0 & 0 & -7 & 21 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \to -\frac{1}{7} L_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & -9 \\ 0 & 1 & 10 & -28 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \to L_2 - 10L_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_1 \to L_1 - 4L_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \to L_1 - L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

é uma matriz equivalente por linhas à matriz A cujo sistema associado é

$$S' : \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = -3 \end{cases}.$$

Assim, temos que $\mathbf{S} = \{(1, 2, -3)\}$ é a única solução de S' e, portanto, do sistema inicial S.

7.2.2 O Teorema do Posto

O Teorema do Posto é um resultado muito útil quando não queremos determinar a solução do sistema, mas queremos classificá-lo como SPD (solução única), SPI (infinitas soluções) ou SI (sem solução). Para enunciá-lo, precisamos de algumas definições.

Definição 7.6. *Seja A uma matriz de ordem $m \times n$.*

(i) O posto de A, denotado por p_A, é o número de linhas não nulas de A quando A estiver reduzida à forma escalonada ou à forma escada.

(ii) A nulidade de A, denotada por n_A, é a diferença $n - p_A$, onde n é o número de colunas da matriz A.

Para o próximo resultado, considere um sistema de m equações lineares e n variáveis na forma matricial

$$CX = B,$$

sendo C a matriz dos coeficientes de ordem $m \times n$ e B a matriz dos termos independentes de ordem $m \times 1$. Denote por

$$A = (C|B)$$

sua matriz ampliada.

Teorema 7.7. *(Teorema do Posto)* O sistema $CX = B$ admite solução se, e somente se, $p_A = p_C$, ou seja, os postos de A e de C coincidem. Além disso,

i) Se $p_A = p_C = n$, então o sistema terá solução única;

ii) Se $p_A = p_C = r < n$, então o sistema terá infinitas soluções. Neste caso, podemos escolher $n_C = n - r$ variáveis livres e as outras r variáveis são dadas em funções destas.

De acordo com o Teorema do Posto, dado um sistema linear, se o posto da matriz ampliada A e da matriz dos coeficientes C forem diferentes, então o sistema será impossível (SI). Caso contrário, temos duas possibilidades: se os postos de A e de C forem iguais ao número de colunas da matriz C, então o sistema será possível e determinado (SPD); se os postos de A e de C forem menor do que o número de colunas da matriz C, então o sistema será possível e indeterminado (SPI).

Exemplo 7.8. Considere o sistema linear

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2y + z = 2 \\ y + 2z = 2 \end{cases}$$

cuja matriz ampliada é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Realizando operações elementares em A até reduzi-la à forma escada, obtemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \to L_3 - 2L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \to -\frac{1}{3}L_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \to L_2 - 2L_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_1 \to L_1 - L_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \frac{7}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \to L_1 - L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

Portanto, $p_A = p_C = 3$ e o sistema é SPD, ou seja, ele possui uma única solução dada por $S = \{(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})\}$.

Observe que as operações $L_2 - 2L_3$, $L_1 - L_3$ e $L_1 - L_2$ não são necessárias para se obter os postos de A e de C, pois eles não se alteram entre a matriz escalonada e a matriz na forma escada. A matriz na forma escada é mais eficaz quando queremos encontrar a solução do sistema.

Exemplo 7.9. Considere o sistema linear

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x - 3y + 5z = 11 \\ x - 5y + 6z = 5 \end{cases}.$$

A matriz ampliada do sistema é

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 5 & 11 \\ 1 & -5 & 6 & 5 \end{bmatrix}.$$

Realizando novamente as operações elementares na matriz ampliada, obtemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 5 & 11 \\ 1 & -5 & 6 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 \to L_3 - L_1]{L_2 \to L_2 - 2L_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & 7 & 7 \\ 0 & -7 & 7 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \to -\frac{1}{7} L_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -7 & 7 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \to L_3 + 7L_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

Logo $p_C = 2$ e $p_A = 3$. Como $p_A \neq p_C$, o sistema não possui solução. De fato, o sistema equivalente à última matriz é

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ y - z = -1 \\ 0x + 0y + 0z = -4 \end{cases}.$$

Observe que a última equação não é satisfeita para nenhum $x, y, z \in \mathbb{R}$. Deste modo, o sistema inicial não possui solução.

Exemplo 7.10. Considere o sistema linear

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + y + z = 0 \\ 4x + 3y + z = 0 \end{cases}$$

cuja matriz ampliada é

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Realizando as operações elementares em A, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underset{L_3 \to L_3 - 4L_1}{\overset{L_2 \to L_2 - 2L_1}{\longrightarrow}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \overset{L_2 \to -L_2}{\longrightarrow}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \overset{L_3 \to L_3 + L_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Então $p_C = p_A = 2 < 3$ (3 é o número de colunas da matriz dos coeficientes). Logo, o sistema possui infinitas soluções e apenas uma variável livre, pois $n_C = 3 - 2 = 1$. Considerando o sistema associado à última matriz, temos:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}.$$

Logo, $x = -y$ e $z = y$. Fixando y como a variável livre, obtemos o conjunto infinito de soluções

$$\mathbf{S} = \{(-y, y, y);\ y \in \mathbb{R}\}.$$

Como o próprio nome diz, a variável livre percorre todo $\mathbb{R}$ (conjunto infinito), enquanto as variáveis x e z são obtidas em função dela.

7.3 Exercícios Resolvidos

1 Utilizando o método do escalonamento, solucione os seguintes sistemas lineares:

a) $\begin{cases} 3x + 2y - 12z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ 2x - 3y + 5z = 0 \end{cases}$;

O sistema possui a seguinte matriz ampliada:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -12 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Realizando as operações elementares em A, temos:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -12 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 5 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -12 & 0 \\ 2 & -3 & 5 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 \to L_3 - 2L_1]{L_2 \to L_2 - 3L_1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -15 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \to \frac{1}{5}L_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \to L_3 + L_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto, $p_A = p_C = 2 < 3$ (3 é o número de colunas da matriz dos coeficientes). Logo, o sistema possui infinitas soluções. Para obtê-las, considere o sistema escalonado

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ y - 3z = 0 \end{cases}$$

que resulta em $y = 3z$ e $x = y - z$, ou seja, $x = 3z - z = 2z$. Tomando z como a variável livre, o sistema é satisfeito sempre que $x = 2z$ e $y = 3z$ para qualquer $z \in \mathbb{R}$.

Portanto, o conjunto solução do sistema é

$$\mathbf{S} = \{(2z, 3z, z);\ z \in \mathbb{R}\}.$$

b) $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x - y + z = 4 \\ x - 2y + 2z = 0 \end{cases}$;

A matriz ampliada deste sistema é

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Realizando as operações elementares:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 \to L_3 - L_1]{L_2 \to L_2 - 2L_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{L_3 \to L_3 + L_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Como $p_A = 3 \neq 2 = p_C$, o sistema dado em b) não possui soluções. Observe que após realizar as operações elementares obtemos na última equação:

$$0x + 0y + 0z = 1$$

o que não é satisfeito para nenhum $x, y, z \in \mathbb{R}$.

c) $\begin{cases} 3x - 2y + z = 6 \\ x + y - z = 4 \\ 2x + y - 2z = 6 \end{cases}$;

A matriz ampliada deste sistema é:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -2 & 6 \end{bmatrix}.$$

Realizando as operações elementares:

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -2 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & -2 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 \to L_3 - 2L_1]{L_2 \to L_2 - 3L_1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -5 & 4 & -6 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & -5 & 4 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \to -L_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & 4 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \to L_3 + 5L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \to \frac{1}{4}L_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \to L_1 + L_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \to L_1 - L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Deste modo, a solução do sistema dado em c) é dada por

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$$

e o conjunto solução é escrito como $\mathbf{S} = \{(3, 2, 1)\}$.

Capítulo 8

Relações Trigonométricas

A trigonometria é a ciência responsável pelo estudo das relações entre os lados e os ângulos dos triângulos. Vamos observar algumas dessas relações métricas no caso particular dos triângulos retângulos. Para isso, introduziremos o seguinte conceito:

Definição 8.1. *Ângulo (ou medida angular) é a medida de abertura atribuída à região ou ao conjunto de pontos situados entre duas semirretas (ou dois segmentos de retas) de mesma origem.*

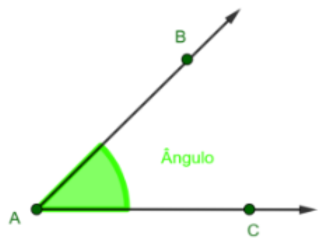


Figura 8.1: Ângulo de vértice A.

Assim, quanto maior a abertura, maior é o número que representa tal medida. A origem das semirretas (ou dos segmentos de retas) é também chamada de vértice do ângulo.

Um dos instrumentos usados para medir ângulos é o transferidor cuja unidade de medida é o grau, denotado por °. No entanto, podemos também medir ângulos em radiano (rad). Mais adiante, veremos a relação entre essas duas unidades de medida.

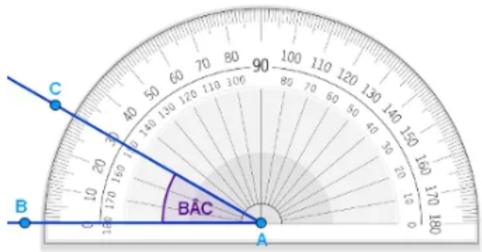


Figura 8.2: Transferidor.

Os ângulos podem ser classificados como segue:

- ângulo agudo é qualquer ângulo com medida entre 0° e 90° (lê-se 0 grau e 90 graus);
- ângulo reto é aquele que mede exatamente 90°;
- ângulo obtuso é qualquer ângulo com medida entre 90° e 180°;
- ângulo raso é aquele que mede exatamente 180°.

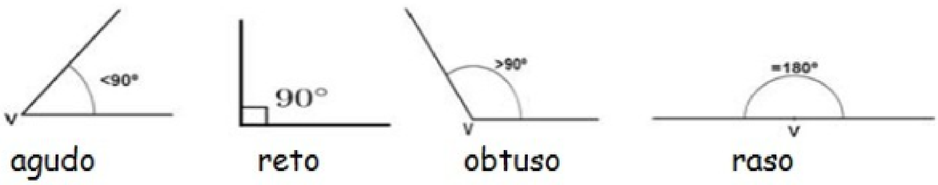


Figura 8.3: Tipos de ângulos.

8.1 Relações Métricas no Triângulo Retângulo

O triângulo retângulo é aquele que apresenta um ângulo interno igual a 90° (ou $\frac{\pi}{2}$ rad) e outros dois ângulos com medidas menores do que 90° (ângulos agudos). O lado oposto ao ângulo de 90° recebe o nome de hipotenusa e sempre será o maior lado do triângulo. Os dois lados menores são chamados de catetos.

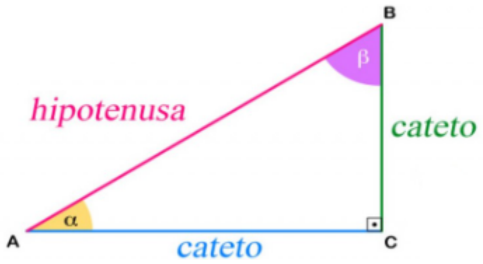


Figura 8.4: Triângulo retângulo.

No que segue, fazer utilizar letras gregas (α, β, θ, ...) para denotar um ângulo e padronizar o radiano como unidade de medida. Vamos considerar que $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ seja um dos ângulos internos de um triângulo retângulo ABC. O lado BC é a hipotenusa, AC é o cateto oposto ao ângulo α e AB é o cateto adjacente a α, conforme a figura abaixo:

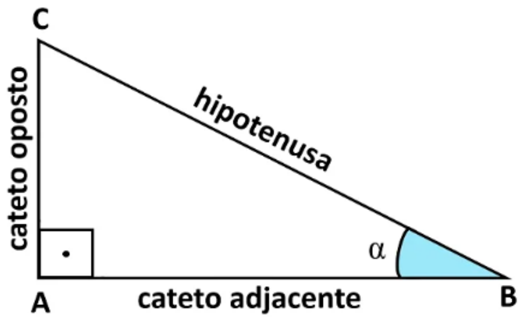


Figura 8.5: Triângulo retângulo com ângulo interno α.

Para simplificar a notação, denotemos simplesmente por AB, BC e AC as medidas dos segmentos que formam o triângulo ABC.

Nosso objetivo nas próximas seções é analisar as relações trigonométricas, também chamadas funções trigonométricas, conhecidas como seno, cosseno e tangente. Tais relações são baseadas nas razões entre as medidas de dois lados de um triângulo retângulo em função de um ângulo.

8.1.1 Seno, cosseno e tangente

O seno de α, denotado por $\text{sen}(\alpha)$, é a razão entre as medidas do cateto oposto a α e da hipotenusa do triângulo ABC:

$$\text{sen}(\alpha) = \frac{\text{cateto oposto a } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \frac{AC}{BC}.$$

O cosseno de α, denotado por $\cos(\alpha)$, é a razão entre as medidas do cateto adjacente a α e da hipotenusa do triângulo ABC:

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{cateto adjacente a } \alpha}{\textit{hipotenusa}} = \frac{AB}{BC}.$$

A tangente de α, denotada por $\text{tg}(\alpha)$, é a razão entre as medidas dos catetos oposto e adjacente a α:

$$\text{tg}(\alpha) = \frac{\text{cateto oposto a } \alpha}{\text{cateto adjacente a } \alpha} = \frac{AC}{AB}.$$

Outras funções trigonométricas podem ser obtidas por meio do seno, do cosseno e da tangente de θ. São elas:

$$\text{cossec}(\alpha) = \frac{1}{\text{sen}(\alpha)} = \frac{BC}{AC},$$

$$\sec(\alpha) = \frac{1}{\cos(\alpha)} = \frac{BC}{AB},$$

$$\text{cotg}(\alpha) = \frac{1}{\text{tg}(\alpha)} = \frac{AB}{AC},$$

denominadas cossecante, secante e cotangente de α, respectivamente.

8.1.2 Ângulos notáveis

Os ângulos de $\frac{\pi}{6}$ (30°), $\frac{\pi}{4}$ (45°) e $\frac{\pi}{3}$ (60°) são os mais frequentes nos cálculos trigonométricos e por isso são chamados ângulos notáveis.

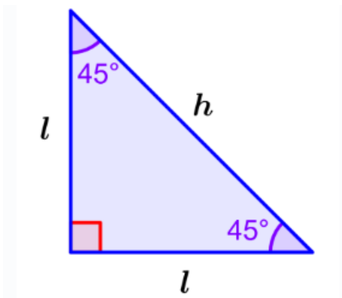
Nesta seção, vamos deduzir o valor do seno, do cosseno e da tangente dos ângulos notáveis por meio de exemplos. Para isso, vamos utilizar o conhecido resultado de trigonometria:

Teorema 8.2. *(Teorema de Pitágoras) Em um triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma do quadrado das medidas dos catetos. Observando a Figura 8.5, temos a seguinte igualdade:*

$$BC^2 = AC^2 + AB^2.$$

1. $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$;

Considere um triângulo retângulo isósceles com ângulo interno medindo $\dfrac{\pi}{4}$ radianos ($45°$) e os dois catetos medindo l, de acordo com a figura abaixo.



Pelo Teorema de Pitágoras, temos que $h^2 = l^2 + l^2 = 2l^2$ e, portanto,

$$h = \pm\sqrt{2l^2} = \pm\sqrt{2}l.$$

Como a medida da hipotenusa é positiva, temos que $h = \sqrt{2}l$. Por definição,

$$\operatorname{sen}(\frac{\pi}{4}) = \frac{\text{cateto oposto a } \frac{\pi}{4}}{\text{hipotenusa}} = \frac{l}{\sqrt{2}l} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

De modo análogo,

$$\cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\text{cateto adjacente a } \frac{\pi}{4}}{\text{hipotenusa}} = \frac{l}{\sqrt{2}l} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

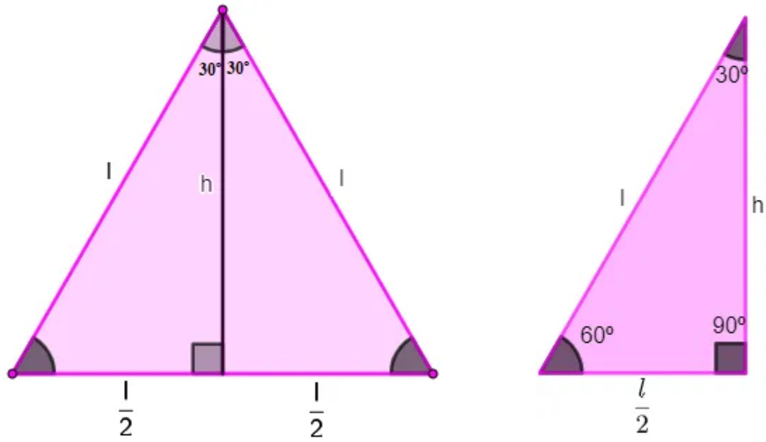
e

$$\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}) = \frac{\text{cateto oposto a } \frac{\pi}{4}}{\text{cateto adjacente a } \frac{\pi}{4}} = \frac{l}{l} = 1.$$

Portanto, $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}) = 1$.

2. $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$ e $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$.

Considere um triângulo equilátero com cada lado medindo l. Sabemos que cada um dos seus ângulos internos mede $\dfrac{\pi}{3}$ radianos ($60°$).



Todo triângulo equilátero pode ser dividido em dois triângulos retângulos cujos ângulos internos medem $\dfrac{\pi}{6}$ e $\dfrac{\pi}{3}$ radianos (30° e 60°), a hipotenusa mede l, um dos catetos é a altura h e o cateto menor mede $\dfrac{l}{2}$.

Pelo Teorema de Pitágoras, $l^2 = (\frac{l}{2})^2 + h^2$, ou seja,

$$h^2 = l^2 - \frac{l^2}{4} = \frac{4l^4 - l^2}{4} = \frac{3l^2}{4}.$$

Portanto,

$$h = \pm\sqrt{\frac{3l^2}{4}} = \pm\frac{\sqrt{3}l}{2}.$$

Como cada lado do triângulo é positivo, concluímos que $h = \dfrac{\sqrt{3}l}{2}$. Por definição,

$$\operatorname{sen}(\frac{\pi}{6}) = \frac{\text{cateto oposto a } \frac{\pi}{6}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{l} = \frac{1}{2}.$$

De modo análogo,

$$\cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\text{cateto adjacente a } \frac{\pi}{6}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\frac{\sqrt{3}l}{2}}{l} = \frac{\sqrt{3}l}{2} \cdot \frac{1}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

e

$$\operatorname{tg}(\frac{\pi}{6}) = \frac{\text{cateto oposto a } \frac{\pi}{6}}{\text{cateto adjacente a } \frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{l}{2}}{\frac{\sqrt{3}l}{2}} = \frac{l}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}l} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Repetindo o processo para o ângulo de $\frac{\pi}{3}$ radianos, obtemos:

$$\text{sen}(\frac{\pi}{3}) = \frac{\frac{\sqrt{3}l}{2}}{l} = \frac{\sqrt{3}l}{2} \cdot \frac{1}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{l} = \frac{1}{2}$$

e

$$\text{tg}(\frac{\pi}{3}) = \frac{\frac{\sqrt{3}l}{2}}{\frac{l}{2}} = \frac{\sqrt{3}l}{2} \cdot \frac{2}{l} = \sqrt{3}.$$

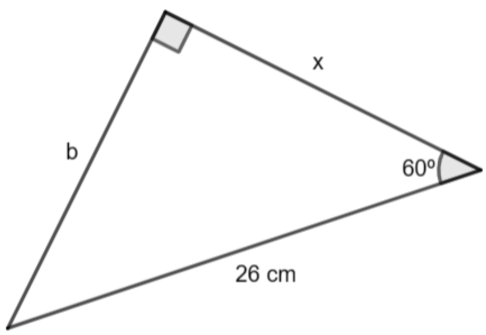
Portanto, $\text{sen}(\frac{\pi}{6}) = \cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$, $\cos(\frac{\pi}{6}) = \text{sen}(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\text{tg}(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ e $\text{tg}(\frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$.

Resumimos todos os valores encontrados na seguinte tabela:

	$\frac{\pi}{6}$ (30°)	$\frac{\pi}{4}$ (45°)	$\frac{\pi}{3}$ (60°)
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

8.2 Exercícios Resolvidos

1. Determine o valor de x em cada triângulo.



a) Sabemos que $\text{sen}(60°) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e pela figura temos que

$$\text{sen}(60°) = \frac{b}{26}.$$

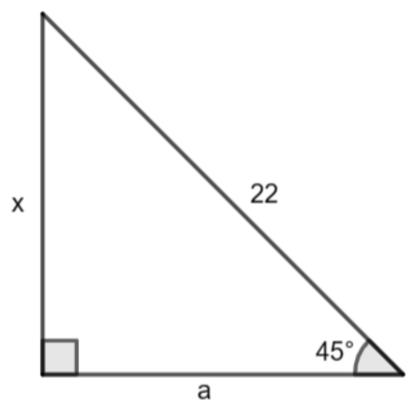
Logo,

$$\begin{aligned} \frac{b}{26} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ b &= \frac{26\sqrt{3}}{2} \\ b &= 13\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Pelo Teorema de Pitágoras,

$$\begin{aligned} (26)^2 &= x^2 + (13\sqrt{3})^2 \\ 676 &= x^2 + 507 \\ x^2 &= 169 \\ x &= \pm\sqrt{169} \\ x &= \pm 13. \end{aligned}$$

Como $x > 0$, obtemos $x = 13$.



b) Sabemos que $\cos(45°) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Pela figura, obtemos:

$$\cos(45°) = \frac{a}{22}.$$

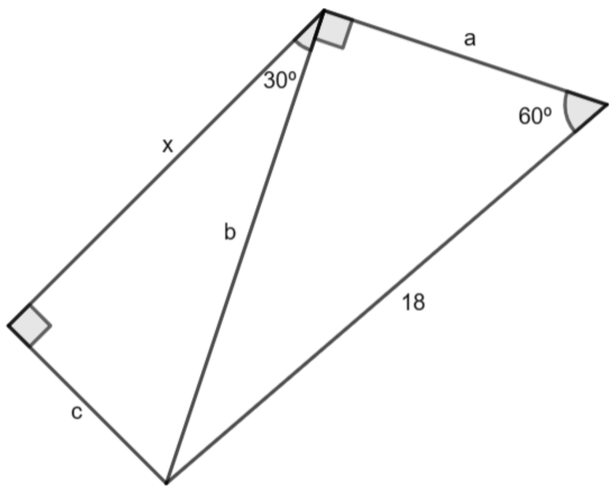
Logo,

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a}{22}$$
$$22\sqrt{2} = 2a$$
$$a = 11\sqrt{2}.$$

Pelo Teorema de Pitágoras,

$$(11\sqrt{2})^2 + x^2 = (22)^2$$
$$242 + x^2 = 484$$
$$x^2 = 242$$
$$x = \pm\sqrt{242}$$
$$x = \pm 11\sqrt{2}.$$

Então, $x = 11\sqrt{2}$, pois $x > 0$.



c) Sabemos que $\text{sen}(60°) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e $\text{sen}(30°) = \dfrac{1}{2}$. Por outro lado, baseados na figura acima temos que:

$$\text{sen}(60°) = \frac{b}{18} \quad \text{e} \quad \text{sen}(30°) = \frac{c}{b}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{b}{18} &= \frac{\sqrt{3}}{2}\\
2b &= 18\sqrt{3}\\
b &= 9\sqrt{3}
\end{aligned}$$

e

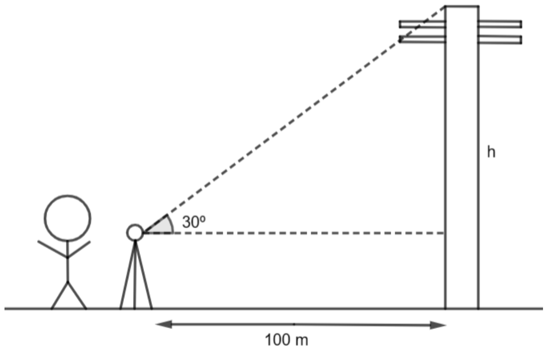
$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(30^\circ) &= \frac{c}{9\sqrt{3}}\\
\frac{1}{2} &= \frac{c}{9\sqrt{3}}\\
c &= \frac{9\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}$$

Pelo Teorema de Pitágoras,

$$\begin{aligned}
x^2 + c^2 &= b^2\\
x^2 + \left(\frac{9\sqrt{3}}{2}\right)^2 &= (9\sqrt{3})^2\\
x^2 + \frac{243}{4} &= 243\\
x^2 &= 243 - \frac{243}{4}\\
x^2 &= \frac{972}{4} - \frac{243}{4}\\
x^2 &= \frac{729}{4}\\
x &= \pm\sqrt{\frac{729}{4}}\\
x &= \pm\frac{27}{2}.
\end{aligned}$$

Então $x = \dfrac{27}{2}$, pois $x > 0$.

2. Para determinar a altura de uma torre, um topógrafo coloca o teodolito a 100m da base e obtém um ângulo de 30°, conforme mostra a figura. Sabendo que a luneta do teodolito está a $1,70$m do solo, qual é aproximadamente a altura da torre?



Sabemos que $\text{tg}(30°) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Pela figura,

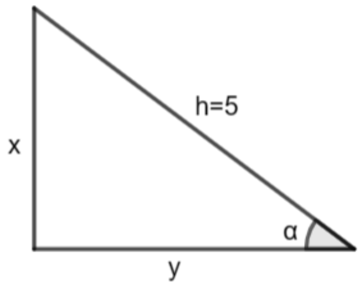
$$\text{tg}(30°) = \frac{h'}{100},$$

onde $h' = h - 1,70$. Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{h - 1,70}{100} &= \frac{\sqrt{3}}{3} \\ h - 1,70 &= \frac{100\sqrt{3}}{3} \\ h &= \frac{100\sqrt{3}}{3} + 1,70\ m. \end{aligned}$$

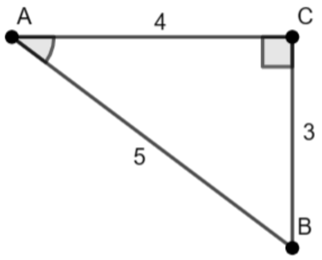
Para saber o valor aproximado da altura da torre em metros, vamos fazer $\sqrt{3} \simeq 1,73205081$. Logo, $h \simeq 59,43$ metros.

3. No triângulo retângulo abaixo, considere $\text{tg}(\alpha) = 2$. Sabendo-se que a hipotenusa desse triângulo é 5, qual é o valor do seno desse mesmo ângulo?

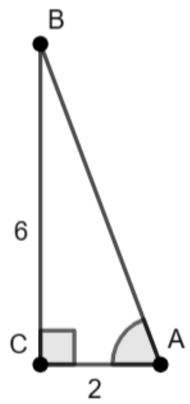


Como
$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{x}{y} = 2,$$
concluímos que $x = 2y$. Pelo Teorema de Pitágoras, $x^2 + y^2 = 25$. Logo,
$$(2y)^2 + y^2 = 25 \ \Rightarrow\ 4y^2 + y^2 = 25 \ \Rightarrow\ 5y^2 = 25 \ \Rightarrow\ y^2 = 5.$$
Portanto, $y = \pm\sqrt{5}$. Como $y > 0$, temos que $y = \sqrt{5}$ e $x = 2\sqrt{5}$. Voltando ao triângulo,
$$\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{x}{h} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

4. Dado o triângulo ABC, determine os valores do seno, do cosseno e da tangente do ângulo dado em A.



a)
$$\operatorname{sen}(A) = \frac{3}{5}, \quad \cos(A) = \frac{4}{5}, \quad \operatorname{tg}(A) = \frac{3}{4}.$$

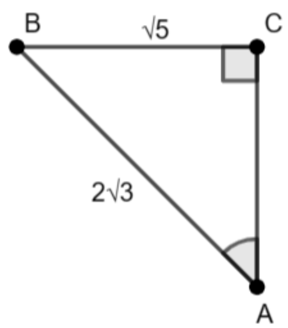


b) Pelo Teorema de Pitágoras, $AB^2 = 6^2 + 2^2 = 40$, ou seja, $AB = 2\sqrt{10}$. Logo,

$$\text{sen}(A) = \frac{6}{2\sqrt{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}.$$

$$\cos(A) = \frac{2}{2\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}.$$

$$\text{tg}(A) = \frac{6}{2} = 3.$$



c) Pelo Teorema de Pitágoras,

$$\begin{aligned}(\sqrt{5})^2 + (AC)^2 &= (2\sqrt{3})^2\\ 5 + (AC)^2 &= 12\\ (AC)^2 &= 7\\ AC &= \sqrt{7},\ \text{pois } AC > 0.\end{aligned}$$

Logo,

$$\text{sen}(A) = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{15}}{6}.$$

$$\cos(A) = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{21}}{6}.$$

$$\text{tg}(A) = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{35}}{7}.$$

Capítulo 9

Funções Trigonométricas

9.1 O Círculo Trigonométrico

O círculo trigonométrico, também chamado de ciclo ou circunferência trigonométrica, é uma representação gráfica que auxilia no cálculo das razões trigonométricas. Ele é uma circunferência de raio 1 centrada na origem do plano cartesiano.

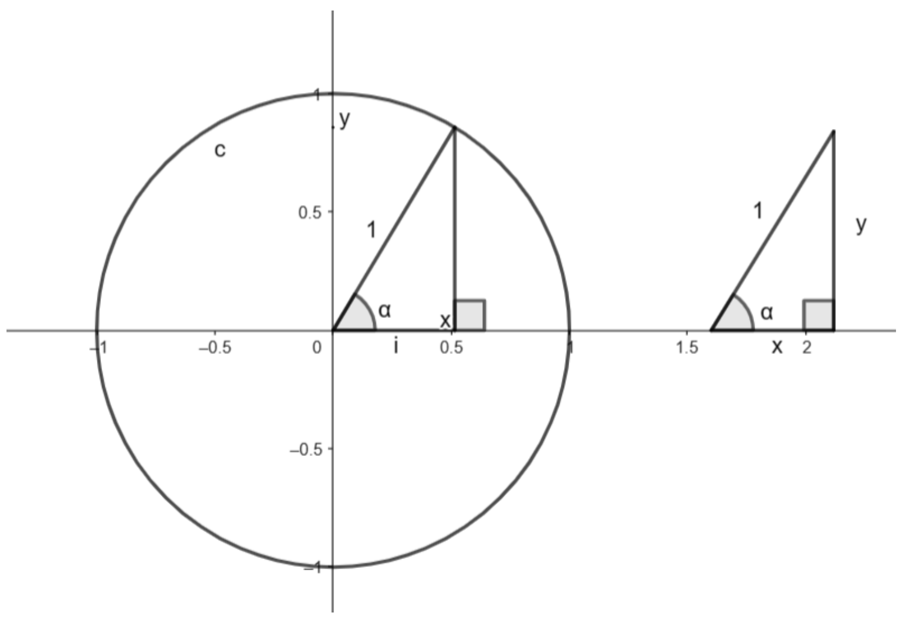


Figura 9.1: Círculo trigonométrico.

De acordo com a simetria do círculo trigonométrico, o eixo vertical (eixo das ordenadas) corresponde ao seno do ângulo central α cujo vértice está no centro da circunferência. De modo análogo, o eixo horizontal (eixo das abscissas) corresponde ao cosseno de α. De fato, se (x, y) é um ponto pertencente ao círculo trigonométrico, então

$$\text{sen}(\alpha) = \frac{y}{1} \quad \text{e} \quad \cos(\alpha) = \frac{x}{1},$$

ou seja, $y = \text{sen}(\alpha)$ e $x = \cos(\alpha)$. Portanto, cada ponto (x, y) do círculo está associado ao ângulo α da seguinte maneira:

$$(x, y) = (\cos(\alpha), \text{sen}(\alpha)).$$

9.1.1 Medindo o círculo trigonométrico

Assim como no triângulo retângulo, no círculo trigonométrico a medida de um ângulo pode ser dada em grau (°) ou em radiano (rad).

A circunferência é dividida em 360 partes iguais ligadas ao centro, sendo que cada uma delas apresenta um ângulo que corresponde a 1°. Logo, uma volta completa de circunferência corresponde a 360°.

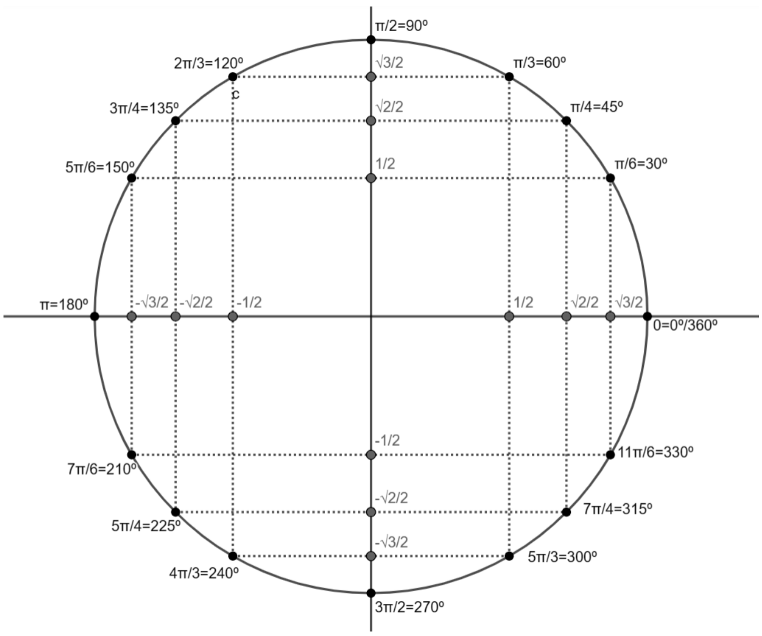


Figura 9.2: Graus e radianos no círculo trigonométrico.

Por sua vez, 1 radiano corresponde ao ângulo subtendido por um arco do círculo trigonométrico cujo comprimento seja igual ao raio deste mesmo círculo, o que equivale a aproximadamente $57,29°$.

Como o raio da circunferência é igual a $r = 1$ e o seu comprimento é igual a $2\pi r$, temos que uma volta completa de circunferência corresponde a 2π radianos. Logo, para converter as unidades de medidas de grau para radiano, e vice-versa, utilizamos uma regra de três usando a seguinte relação:

$$2\pi \text{ rad} = 360°.$$

Na Figura 9.2, apresentamos alguns ângulos em graus e em radianos, e seus respectivos valores de seno e cosseno.

Exemplo 9.1. Qual a medida de um ângulo de 20° em radianos?

$$\begin{aligned} 2\pi \text{ rad} &- 360° \\ x \text{ rad} &- 20° \end{aligned}$$

$$360x = 40\pi \;\Rightarrow\; x = \frac{40\pi}{360} \;\Rightarrow\; x = \frac{\pi}{9} \text{ rad.}$$

Portanto, 20° equivale a $\dfrac{\pi}{9}$ radianos.

9.1.2 Quadrantes do círculo trigonométrico

O quadrante é qualquer uma das quatro partes iguais em que se pode dividir uma circunferência. Logo, no círculo trigonométrico existem 4 quadrantes.

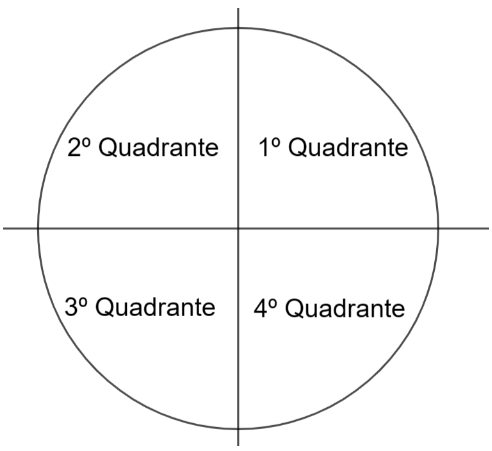


Figura 9.3: Quadrantes do círculo trigonométrico

Podemos analisar o sinal do seno e do cosseno por meio dos quadrantes. Como o seno de um ângulo corresponde ao eixo das ordenadas, ele é positivo no 1º e 2º quadrantes e negativo no 3º e 4º quadrantes. Como o cosseno de um ângulo corresponde ao eixo das abscissas, ele é positivo no 1º e 4º quadrantes e negativo no 2º e 3º quadrantes.

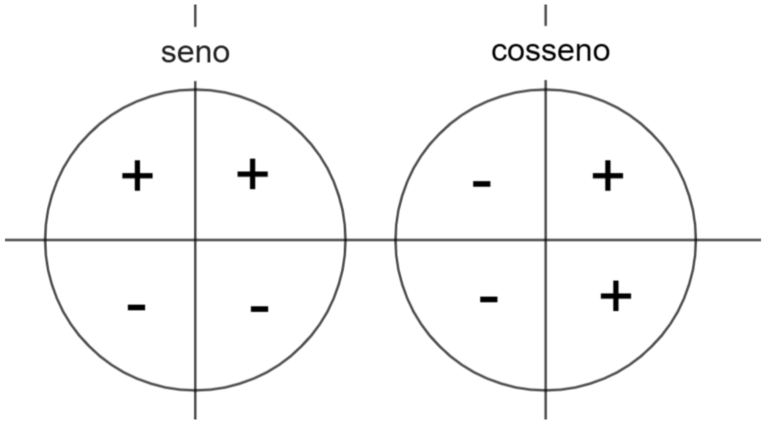


Figura 9.4: Sinal do seno e cosseno.

9.1.3 Fórmulas da adição e subtração

Considere dois ângulos α e β. Existem fórmulas trigonométricas que nos auxiliam no cálculo do seno, do cosseno e da tangente da soma e da diferença desses ângulos. Assim, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, temos:

$$\mathrm{sen}(\alpha+\beta) = \mathrm{sen}(\alpha)\cos(\beta) + \mathrm{sen}(\beta)\cos(\alpha);$$

$$\mathrm{sen}(\alpha-\beta) = \mathrm{sen}(\alpha)\cos(\beta) - \mathrm{sen}(\beta)\cos(\alpha);$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \mathrm{sen}(\alpha)\mathrm{sen}(\beta);$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \mathrm{sen}(\alpha)\mathrm{sen}(\beta);$$

$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\mathrm{tg}(\alpha)+\mathrm{tg}(\beta)}{1-\mathrm{tg}(\alpha)\mathrm{tg}(\beta)};$$

$$\mathrm{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\mathrm{tg}(\alpha)-\mathrm{tg}(\beta)}{1+\mathrm{tg}(\alpha)\mathrm{tg}(\beta)}.$$

9.1.4 Arcos de circunferência

Em matemática, arco é a porção compreendida entre dois pontos de uma curva, chamados pontos extremos do arco. No caso da circunferência, a amplitude de um arco é a medida do ângulo correspondente com vértice no centro da circunferência e definido pelos extremos do arco, conforme a figura abaixo.

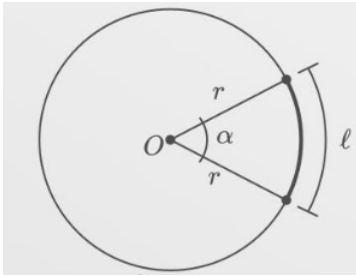


Figura 9.5: Arco de uma circunferência de raio r.

A unidade de medida padrão do arco é o radiano, e menos usualmente o grau. O ângulo α apresentado na figura acima é chamado ângulo central da circunferência. A fórmula que relaciona o comprimento l do arco com o ângulo central correspondente, em radianos, é dada por:

$$l = \alpha r,$$

onde r é o raio da circunferência. É desta igualdade que obtemos $C = 2\pi r$ para o comprimento da circunferência.

No caso do círculo trigonométrico, como $r = 1$, concluímos que

$$l = \alpha.$$

Portanto, no círculo trigonométrico a medida de um arco coincide com a medida do ângulo central correspondente. Por esta razão, vamos confundir os conceitos de ângulo e de arco daqui em diante.

Quando dois arcos têm as mesmas extremidades (a mesma origem e o mesmo ponto final), dizemos que eles são côngruos. Mais especificamente, os arcos correspondentes a α e β são côngruos se, e somente se,

$$\beta = \alpha + 2\pi n$$

para algum inteiro n. Neste caso, n representa a quantidade de voltas completas dadas pelo arco.

Exemplo 9.2. Os arcos $\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{13\pi}{6}$ e $\dfrac{25\pi}{6}$ são côngruos, pois

$$\frac{13\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2\pi \quad \text{e} \quad \frac{25\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2 \cdot 2\pi.$$

9.2 Funções Trigonométricas

Nesta seção, vamos tratar as relações trigonométricas estudadas até aqui como funções de uma variável real. Por esta razão, a partir de agora trocaremos a notação do ângulo/arco de α para x.

Como vimos anteriormente, o seno corresponde à projeção do arco x sobre o eixo vertical, também denominado eixo dos senos. E o cosseno corresponde à projeção do arco x sobre o eixo horizontal, também denominado eixo dos cossenos.

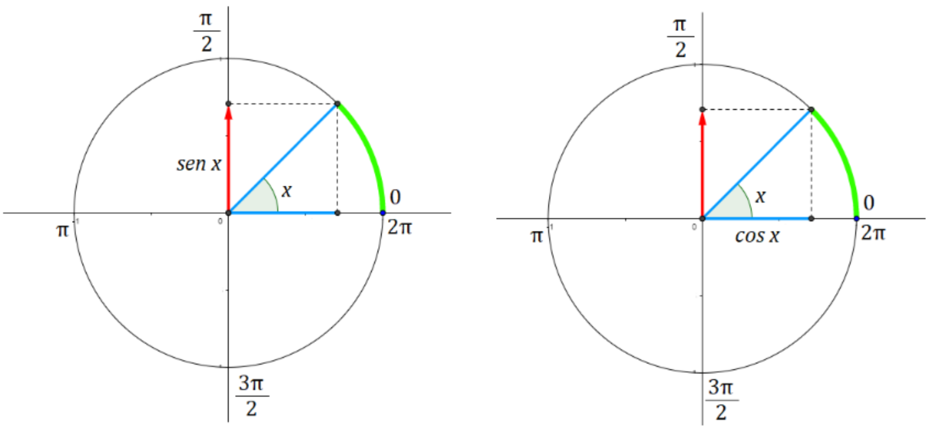


Figura 9.6: Projeção do arco x.

Portanto, a função seno é definida como uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \text{sen}(x).$$

De modo análogo, a função cosseno é definida como uma função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$g(x) = \cos(x).$$

Veja que o domínio dessas funções é todo o conjunto $\mathbb{R}$, pois podemos defini-las para todo número real. Já a imagem dessas funções corresponde ao intervalo real $[-1, 1]$, pois

$$-1 \leq \text{sen}(x) \leq 1 \quad \text{e} \quad -1 \leq \cos(x) \leq 1,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Os gráficos das funções seno e cosseno são curvas chamadas senóide e cossenóide, respectivamente.

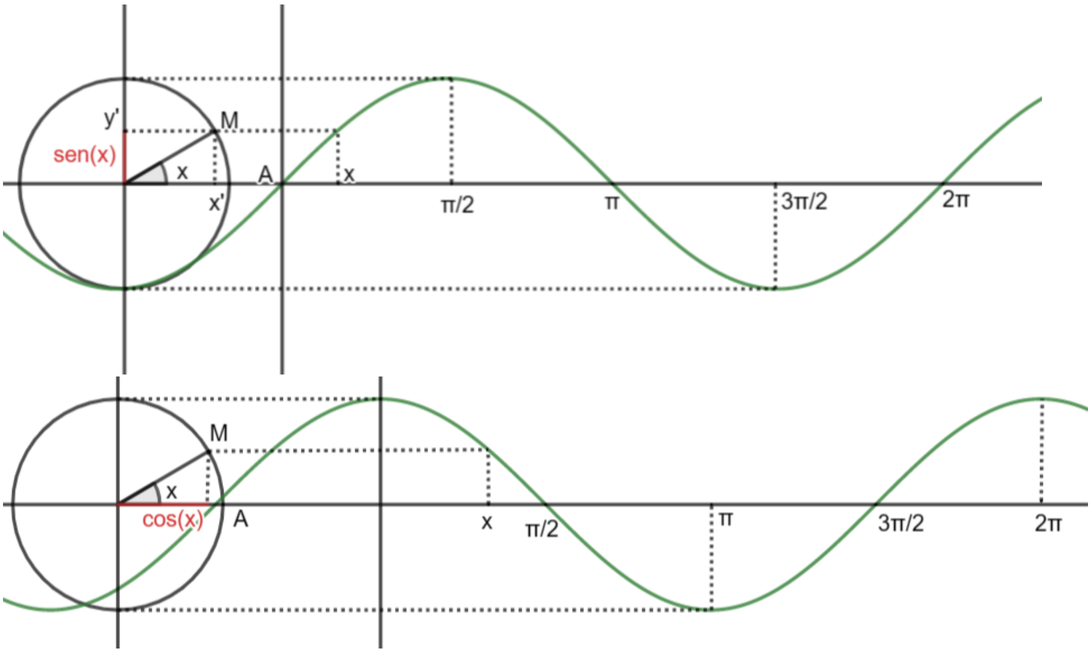


Figura 9.7: Gráficos das função seno e cosseno.

Geometricamente, obter a tangente de um arco é algo um pouco mais complexo. Primeiramente, devemos traçar um terceiro eixo paralelo ao eixo das ordenadas que tangencia o ponto $(1, 0)$, conhecido como eixo das tangentes.

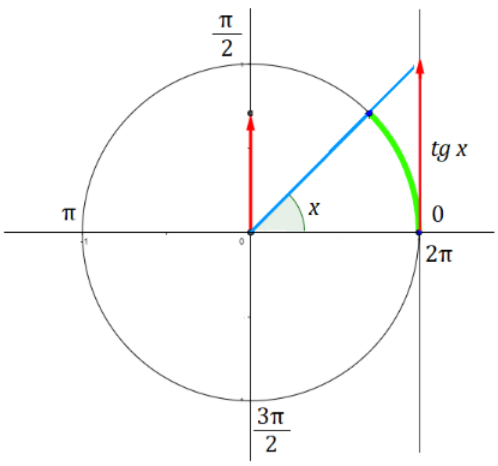


Figura 9.8: Tangente no círculo trigonométrico.

Ao unirmos a extremidade final do arco x ao centro do círculo trigonométrico e prolongarmos o raio do círculo, obtemos um segmento de reta que interceptará o eixo das tangentes no ponto $(1, \text{tg}(x))$. Portanto, a ordenada deste ponto nos fornece o valor da $\text{tg}(x)$.

Analiticamente, a função tangente é definida como uma função $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$h(x) = \text{tg}(x).$$

Como $\text{tg}(x) = \dfrac{\text{sen}(x)}{\cos(x)}$, para que h esteja bem definida, a função $\cos(x)$ deve ser diferente de zero, ou seja,

$$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}.$$

Logo, o domínio da função tangente é o conjunto

$$Dom(h) = \{x \in \mathbb{R};\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Já a imagem da função tangente é todo o conjunto $\mathbb{R}$. O gráfico de h é dado abaixo:

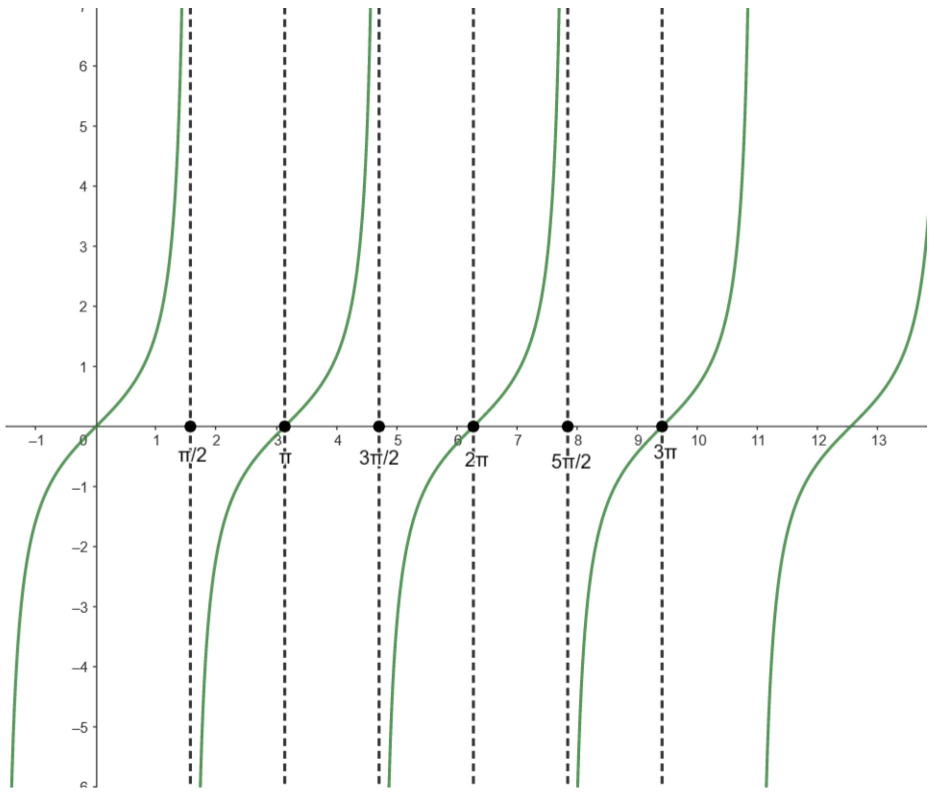


Figura 9.9: Gráfico da função tangente.

9.2.1 Período das funções trigonométricas

Definição 9.3. *Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita periódica se existir um número $p \in \mathbb{R}$ tal que*

$$f(x + p) = f(x),$$

para todo x pertencente ao domínio de f. Chamamos de período da função ao menor número positivo p que verifica esta igualdade.

A função seno é periódica de período 2π, ou seja,

$$\text{sen}(x) = \text{sen}(x + 2\pi) = \text{sen}(x + 4\pi) = \cdots = \text{sen}(x + 2k\pi),$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{Z}$. De fato, pela fórmula do seno da soma de dois ângulos, temos que

$$\text{sen}(x + 2k\pi) = \text{sen}(x)\cos(2k\pi) + \cos(x)\text{sen}(2k\pi).$$

Como $\cos(2k\pi) = 1$ e $\text{sen}(2k\pi) = 0$ para todo $k \in \mathbb{Z}$, concluímos que

$$\text{sen}(x + 2k\pi) = \text{sen}(x) \cdot 1 + \cos(x) \cdot 0 = \text{sen}(x),$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$. Em particular, podemos tomar $k = 1$.

De modo análogo, a função cosseno também é periódica de período 2π, ou seja,

$$\cos(x) = \cos(x + 2\pi) = \cos(x + 4\pi) = \cdots = \cos(x + 2k\pi),$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{Z}$. De fato, pela fórmula do cosseno da soma de dois ângulos, temos que

$$\begin{aligned} \cos(x + 2k\pi) &= \cos(x)\cos(2k\pi) - \text{sen}(x)\text{sen}(2k\pi). \\ &= \cos(x) \cdot 1 - \text{sen}(x) \cdot 0 \\ &= \cos(x). \end{aligned}$$

A função tangente é periódica de período π, ou seja,

$$\text{tg}(x) = \text{tg}(x + \pi) = \text{tg}(x + 2\pi) = \cdots = \text{tg}(x + k\pi),$$

para todo $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$. De fato, como

$$\operatorname{tg}(k\pi) = \frac{\operatorname{sen}(k\pi)}{\cos(k\pi)} = 0,$$

pela fórmula da tangente da soma de dois ângulos, temos que

$$\operatorname{tg}(x + k\pi) = \frac{\operatorname{tg}(x) + \operatorname{tg}(k\pi)}{1 - \operatorname{tg}(x)\operatorname{tg}(k\pi)} = \frac{\operatorname{tg}(x) + 0}{1 - \operatorname{tg}(x) \cdot 0} = \operatorname{tg}(x).$$

Em termos gráficos, as funções periódicas repetem a curva do seu gráfico em intervalos de amplitude igual ao seu período, fato que podemos verificar nos gráficos das funções trigonométricas.

9.3 Exercícios Resolvidos

1. Utilizando os ângulos notáveis, calcule:

   a) $\operatorname{sen}(15°)$;

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(15°) &= \operatorname{sen}(45° - 30°)\\ &= \operatorname{sen}(45°)\cos(30°) - \operatorname{sen}(30°)\cos(45°)\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\\ &= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

   b) $\cos(75°)$;

$$\begin{aligned}\cos(75°) &= \cos(30° + 45°)\\ &= \cos(30°)\cos(45°) - \operatorname{sen}(30°)\cos(45°)\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\\ &= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

   c) $\operatorname{tg}(255°)$;

$$
\begin{aligned}
\operatorname{tg}(255^\circ) &= \operatorname{tg}(75^\circ + 180^\circ)\\
&= \operatorname{tg}(75^\circ)\\
&= \operatorname{tg}(30^\circ + 45^\circ)\\
&= \frac{\operatorname{tg}(30^\circ) + \operatorname{tg}(45^\circ)}{1 - \operatorname{tg}(30^\circ)\operatorname{tg}(45^\circ)}\\
&= \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} + 1}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot 1}\\
&= \frac{\dfrac{\sqrt{3}+3}{3}}{\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}}\\
&= \frac{\sqrt{3}+3}{3-\sqrt{3}} \cdot \frac{(3+\sqrt{3})}{(3+\sqrt{3})}\\
&= \frac{(\sqrt{3}+3)^2}{9-3}\\
&= \frac{3+6\sqrt{3}+9}{6}\\
&= \frac{12+6\sqrt{3}}{6}\\
&= 2+\sqrt{3}.
\end{aligned}
$$

d) $\cos\left(\dfrac{19\pi}{3}\right)$;

$$
\begin{aligned}
\cos\left(\frac{19\pi}{3}\right) &= \cos\left(\frac{18\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right)\\
&= \cos\left(6\pi + \frac{\pi}{3}\right)\\
&= \cos(6\pi)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \operatorname{sen}(6\pi)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\\
&= \cos(3\cdot 2\pi)\frac{1}{2} - \operatorname{sen}(3\cdot 2\pi)\frac{\sqrt{3}}{2}\\
&= 1\cdot\frac{1}{2} - 0\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

2. Verifique se as igualdades abaixo são verdadeiras ou falsas e justifique.

a) $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{4}\right)$;

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{4}\right) &= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right) \\
&= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos(\pi) - \operatorname{sen}(\pi)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (-1) - 0 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\
&= -\frac{\sqrt{2}}{2}.
\end{aligned}$$

Portanto, $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) \neq \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{4}\right)$, visto que $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

b) $\operatorname{sen}(2\pi - x) = \operatorname{sen}(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$;

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(2\pi - x) &= \operatorname{sen}(2\pi)\cos(x) - \operatorname{sen}(x)\cos(2\pi) \\
&= 0 \cdot \cos(x) - \operatorname{sen}(x) \cdot 1 \\
&= -\operatorname{sen}(x).
\end{aligned}$$

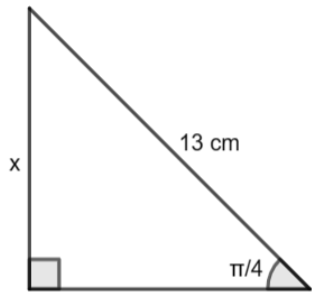
Portanto, $\operatorname{sen}(2\pi - x) \neq \operatorname{sen}(x)$.

c) $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right)$;

$$\begin{aligned}
\cos\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) &= \cos(2\pi)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \operatorname{sen}(2\pi)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) \\
&= 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}$$

Portanto, $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right)$.

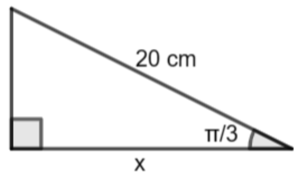
3. Em cada triângulo retângulo, determine a medida x indicada.



a)

Temos que $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{x}{13}$. Como $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, concluímos que

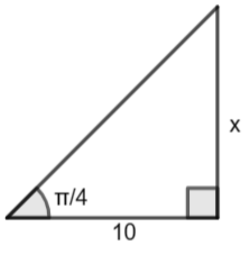
$$\begin{aligned} \frac{x}{13} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x &= \frac{13\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$



b)

Temos que $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{x}{20}$. Como $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{x}{20} &= \frac{1}{2} \\ x &= 10. \end{aligned}$$



c)

Como $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{x}{10}$ e $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$, concluímos que $\frac{x}{10} = 1$. Logo, $x = 10$.

Capítulo 10

Identidades Trigonométricas

As identidades trigonométricas são igualdades que relacionam as funções trigonométricas. Elas são utilizadas quando precisamos simplificar expressões ou definir novas funções.

A primeira identidade trigonométrica, já apresentada neste material, é a tangente dada como a razão entre as funções seno e cosseno:

$$\operatorname{tg}(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}.$$

Esta igualdade é conhecida como a primeira relação fundamental da trigonometria. Neste capítulo, veremos outras relações trigonométricas fundamentais, como a cossecante, a secante e a cotangente.

10.1 Cossecante, Secante e Cotangente

A função cossecante é a razão inversa da função seno, ou seja,

$$\operatorname{cossec}(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}.$$

Para esta função estar bem definida, o seno não pode se anular. Deste modo, o arco x não pode ser da forma $k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$. Portanto,

$$Dom(\operatorname{cossec}) = \{x \in \mathbb{R};\ x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Na Figura 10.1, a cossecante de x é representada pelo comprimento do segmento CD, em vermelho, onde C é o centro do círculo trigonométrico e D é o ponto de interseção do eixo dos senos e da reta tangente a B, sendo B a extremidade final do arco x.

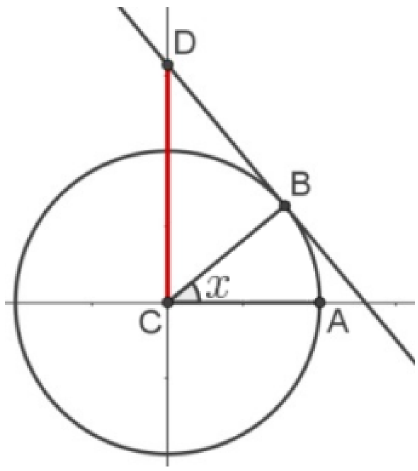


Figura 10.1: Cossecante no círculo trigonométrico.

No círculo trigonométrico, o sinal da cossecante coincide com o sinal do seno, ou seja, positivo no primeiro e segundo quadrantes, e negativo no terceiro e no quarto quadrantes.

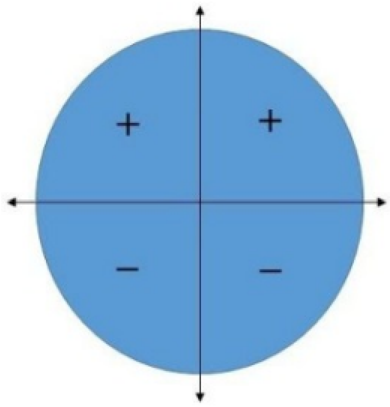


Figura 10.2: Sinal da cossecante.

Assim como a função seno, a função cossecante é periódica de período 2π, pois
$$\operatorname{cossec}(x+2\pi) = \frac{1}{\operatorname{sen}(x+2\pi)} = \frac{1}{\operatorname{sen}(x)} = \operatorname{cossec}(x).$$
Esta propriedade pode ser observada no gráfico da função apresentado a seguir:

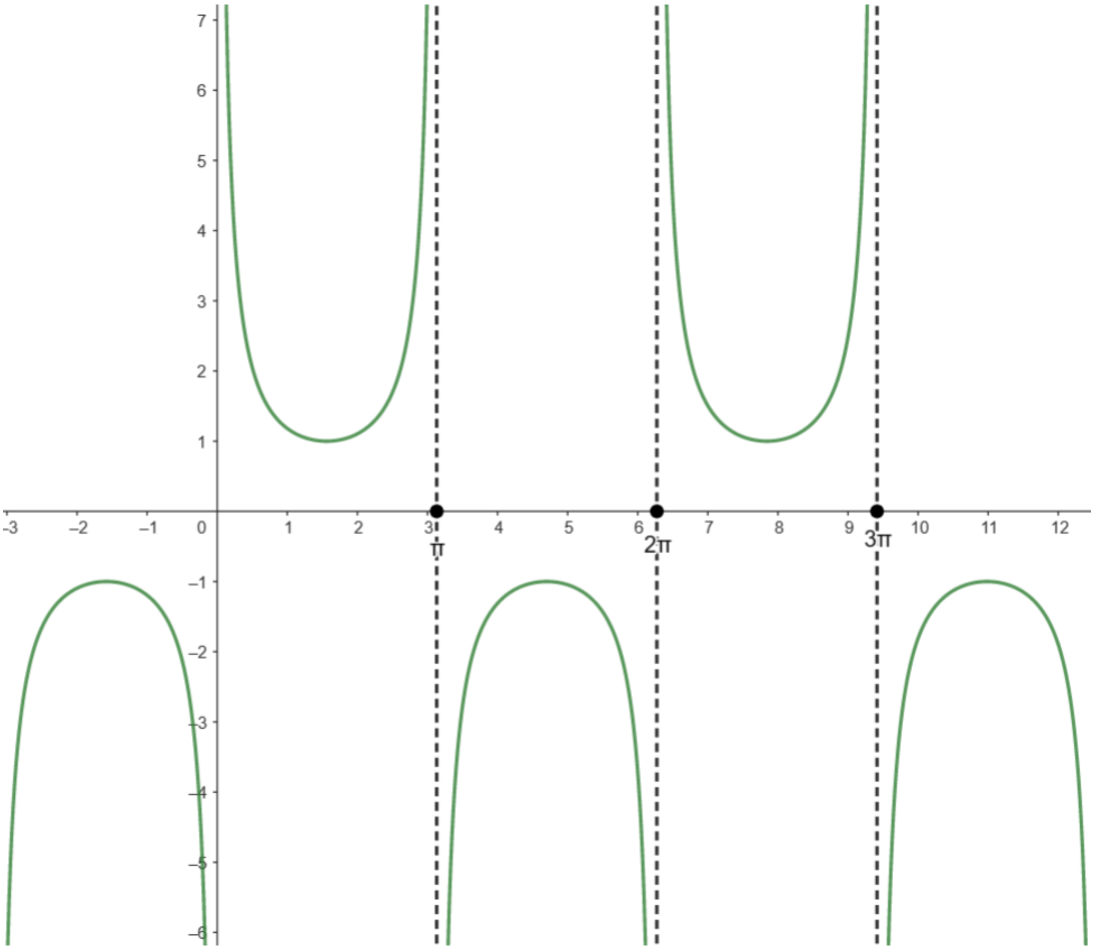


Figura 10.3: Gráfico da função cossecante.

A função secante é a razão inversa da função cosseno, ou seja,

$$\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}.$$

Como o cosseno neste caso não pode se anular, o arco x não pode ser da forma $\frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$. Logo,

$$Dom(\sec) = \{x \in \mathbb{R};\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Geometricamente, conforme a Figura 10.4, a secante de x é representada pelo comprimento do segmento CD, em vermelho, onde C é o centro do círculo e D é o ponto de interseção do eixo dos cossenos e da reta tangente a B, sendo B a extremidade final do arco x.

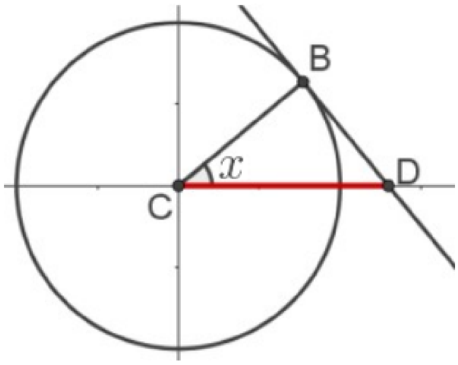


Figura 10.4: Secante no círculo trigonométrico.

No círculo trigonométrico, o sinal da secante coincide com o sinal do cosseno, sendo positivo no primeiro e quarto quadrantes e negativo nos demais.

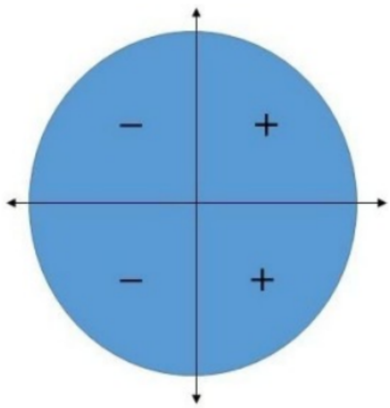


Figura 10.5: Sinal da secante.

Assim como a função cosseno, a função secante é periódica de período 2π, pois

$$\sec(x + 2\pi) = \frac{1}{\cos(x + 2\pi)} = \frac{1}{\cos(x)} = \sec(x).$$

Seu gráfico é esboçado a seguir:

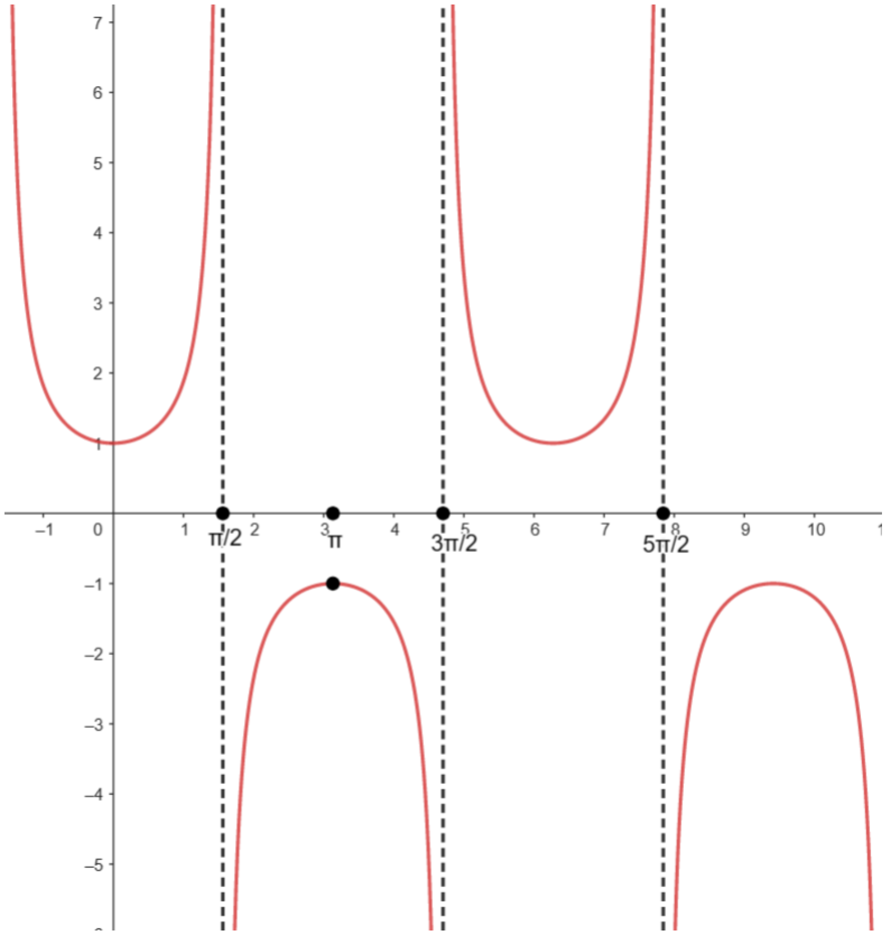


Figura 10.6: Gráfico da função secante.

A cotangente é definida pela razão inversa da função tangente:

$$\operatorname{cotg}(x) = \frac{1}{\operatorname{tg}(x)}.$$

Como $\operatorname{tg}(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$, temos

$$\operatorname{cotg}(x) = \frac{1}{\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}} = \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}$$

e, portanto, a cotangente está definida para todo x que não anula a função seno. Logo,

$$Dom(\operatorname{cotg} = \{x \in \mathbb{R};\ x \neq k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Na Figura 10.7, a reta paralela ao eixo dos cossenos e tangente ao círculo no ponto B é chamada eixo das cotangentes. A cotangente de x é representada pelo comprimento do segmento BA, onde A é o ponto de interseção entre um lado do arco X e o eixo das cotangentes.

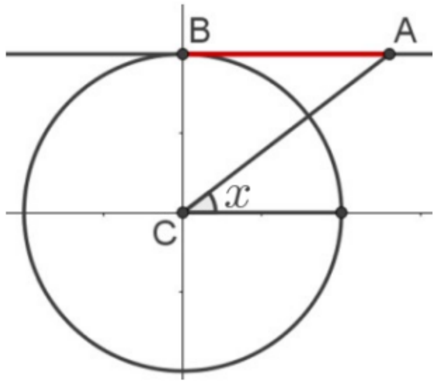


Figura 10.7: Cotangente no círculo trigonométrico.

Por definição, o sinal da cotangente no círculo trigonométrico coincide com o sinal da tangente, ou seja, positivo no primeiro e terceiro quadrantes, e negativo no segundo e quarto quadrantes.

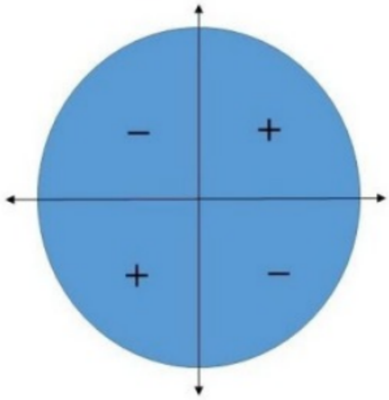


Figura 10.8: Sinal da cotangente.

Assim como a tangente, a função cotangente é periódica de período π, pois

$$\operatorname{cotg}(x + 2\pi) = \frac{1}{\operatorname{tg}(x + 2\pi)} = \frac{1}{\operatorname{tg}(x)} = \operatorname{cotg}(x).$$

Podemos verificar tal periodicidade no gráfico a seguir:

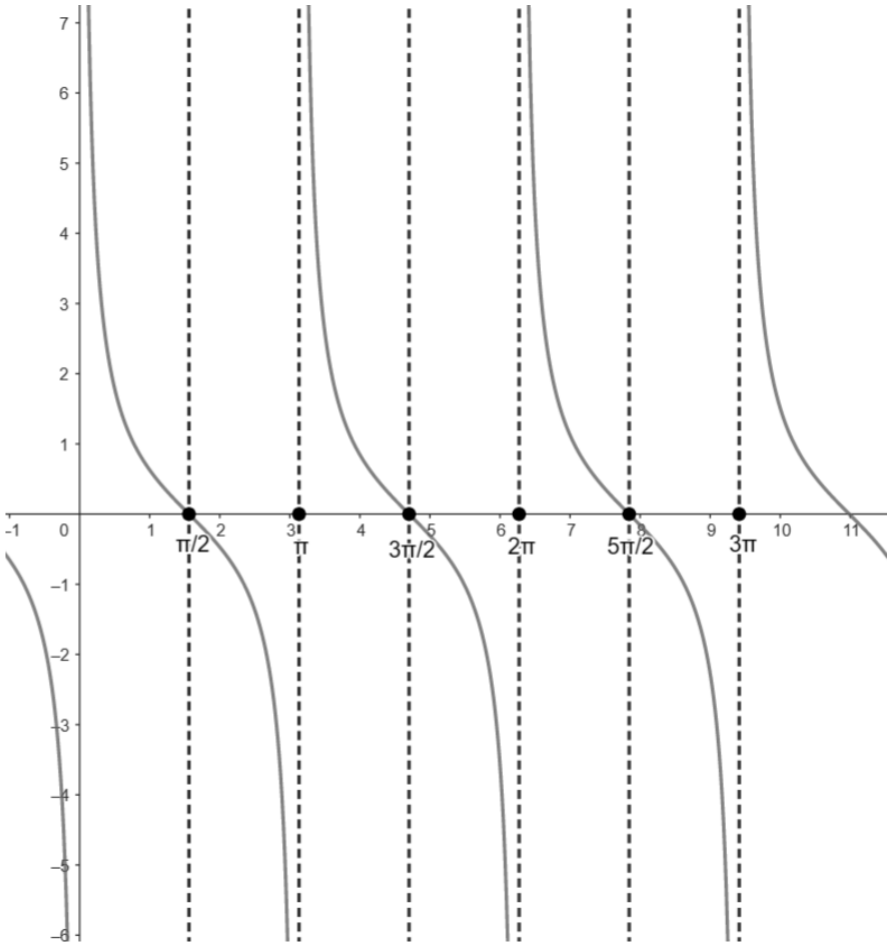


Figura 10.9: Gráfico da função cotangente.

10.2 Outras Identidades Trigonométricas

Existem outros exemplos de identidades trigonométricas, sendo uma delas a mais conhecida: a identidade fundamental da trigonometria (ou identidade de Pitágoras), que estabelece uma relação entre o seno e o cosseno de um ângulo. Nesta seção, apresentaremos também as identidades de arco duplo.

Proposição 10.1. Para todo $x \in \mathbb{R}$, temos válidas as seguintes identidades:

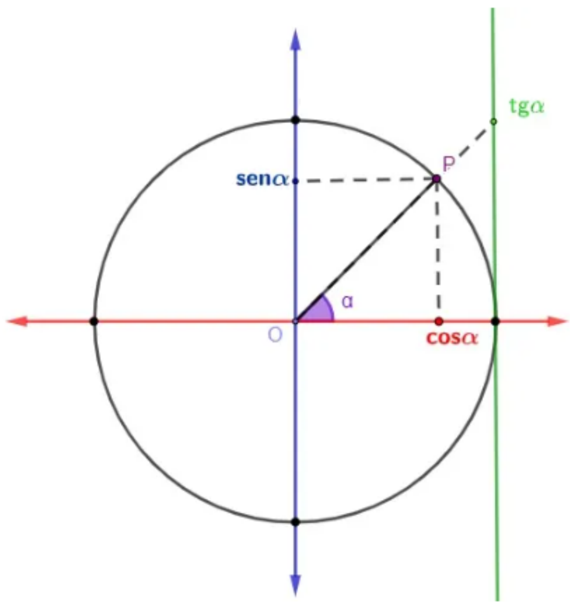
a) $\text{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$;

b) $\text{tg}^2(x) + 1 = \sec^2(x)$;

c) $\text{cotg}^2(x) + 1 = \text{cossec}^2(x)$.

Para verificar a primeira delas, lembremos que cada ponto (x, y) do círculo trigonométrico está associado ao ângulo α pelas igualdades:

$$x = \cos(\alpha) \quad \text{e} \quad y = \text{sen}(\alpha).$$



Pelo Teorema de Pitágoras, temos que $x^2 + y^2 = 1$, ou seja,

$$\cos^2(\alpha) + \text{sen}^2(\alpha) = 1,$$

que é a Identidade Fundamental da Trigonometria.

Para os itens b) e c), facilmente vemos que:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{tg}^2(x) + 1 &= \left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}\right)^2 + 1 \\
&= \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{\cos^2(x)} + 1 \\
&= \frac{\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x)}{\cos^2(x)} \\
&= \frac{1}{\cos^2(x)} \\
&= \left(\frac{1}{\cos(x)}\right)^2 \\
&= \sec^2(x).
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\operatorname{cotg}^2(x) + 1 &= \left(\frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}\right)^2 + 1 \\
&= \frac{\cos^2(x)}{\operatorname{sen}^2(x)} + 1 \\
&= \frac{\cos^2(x) + \operatorname{sen}^2(x)}{\operatorname{sen}^2(x)} \\
&= \frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)} \\
&= \left(\frac{1}{\operatorname{sen}(x)}\right)^2 \\
&= \operatorname{cossec}^2(x).
\end{aligned}
$$

Proposição 10.2. Para todo $x \in \mathbb{R}$, temos as seguintes identidades do arco duplo:

a) $\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen}(x)\cos(x)$;

b) $\cos(2x) = \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x)$;

c) $\operatorname{tg}(2x) = \dfrac{2\operatorname{tg}(x)}{1 - \operatorname{tg}^2(x)}$.

Para verificar essas últimas três igualdades, vamos utilizar as fórmulas do seno, do cosseno e da tangente da soma de dois arcos. Então, temos:

$$\begin{aligned}\mathrm{sen}(2x) &= \mathrm{sen}(x+x)\\ &= \mathrm{sen}(x)\cos(x)+\cos(x)\mathrm{sen}(x)\\ &= 2\mathrm{sen}(x)\cos(x),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(2x) &= \cos(x+x)\\ &= \cos(x)\cos(x)-\mathrm{sen}(x)\mathrm{sen}(x)\\ &= \cos^2(x)-\mathrm{sen}^2(x),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{tg}(2x) &= \mathrm{tg}(x+x)\\ &= \frac{\mathrm{tg}(x)+\mathrm{tg}(x)}{1-\mathrm{tg}(x)\mathrm{tg}(x)}\\ &= \frac{2\mathrm{tg}(x)}{1-\mathrm{tg}^2(x)}.\end{aligned}$$

10.3 Exercícios Resolvidos

1. Mostre que $\sec(\frac{\pi}{3})+\sec(\frac{\pi}{4})-\mathrm{cossec}(\frac{\pi}{6})+\mathrm{cossec}(\frac{7\pi}{4})=0$.

   Sabemos que $\sec(x)=\dfrac{1}{\cos(x)}$ e $\mathrm{cossec}(x)=\dfrac{1}{\mathrm{sen}(x)}$. Então,

$$\begin{aligned}\sec(\tfrac{\pi}{3})+\sec(\tfrac{\pi}{4})-\mathrm{cosec}(\tfrac{\pi}{6})+\mathrm{cosec}(\tfrac{7\pi}{4}) &= \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{3})}+\frac{1}{\cos(\frac{\pi}{4})}-\frac{1}{\mathrm{sen}(\frac{\pi}{6})}+\frac{1}{\mathrm{sen}(\frac{7\pi}{4})}\\ &= \frac{1}{\frac{1}{2}}+\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}}-\frac{1}{\frac{1}{2}}-\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\\ &= 2+\frac{2}{\sqrt{2}}-2-\frac{2}{\sqrt{2}}\\ &= 0.\end{aligned}$$

2. Prove as seguintes identidades trigonométricas:

a) $\dfrac{1-\text{sen}^2(x)}{\text{cotg}(x)\text{sen}(x)} = \cos(x)$, para todo $x \neq \dfrac{k\pi}{2}$, com $k \in \mathbb{Z}$;

Como $\text{sen}^2(x)+\cos^2(x) = 1$, vale que $1-\text{sen}^2(x) = \cos^2(x)$. Então,

$$\begin{aligned}
\frac{1-\text{sen}^2(x)}{\text{cotg}(x)\text{sen}(x)} &= \frac{\cos^2(x)}{\frac{\cos(x)}{\text{sen}(x)}\text{sen}(x)} \\
&= \frac{\cos^2(x)}{\cos(x)} \\
&= \frac{\cos(x)\cos(x)}{\cos(x)} \\
&= \cos(x).
\end{aligned}$$

b) $\text{tg}(x)\cos(x) = \text{sen}(x)$, para todo $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$;

$$\begin{aligned}
\text{tg}(x)\cos(x) &= \frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)}\cos(x) \\
&= \text{sen}(x).
\end{aligned}$$

c) $(\text{tg}^2(x)+1)(1-\text{sen}^2(x)) = 1$, para todo $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$;

Sabemos que $\text{tg}^2(x)+1 = \sec^2(x)$ e que $1-\text{sen}^2(x) = \cos^2(x)$. Logo,

$$\begin{aligned}
(1+\text{tg}^2(x))(1-\text{sen}^2(x)) &= \sec^2(x)\cos^2(x) \\
&= \frac{1}{\cos^2(x)}\cos^2(x) \\
&= \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

d) $\sec(x) - \cos(x) = \operatorname{sen}(x)\operatorname{tg}(x)$, para todo $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$;

Sabemos que $\sec(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$. Além disso, como $\operatorname{sen}^2(x)+\cos^2(x) = 1$, então $\operatorname{sen}^2(x) = 1 - \cos^2(x)$. Logo,

$$\begin{aligned}
\sec(x) - \cos(x) &= \frac{1}{\cos(x)} - \cos(x) \\
&= \frac{1}{\cos(x)} - \frac{\cos^2(x)}{\cos(x)} \\
&= \frac{1 - \cos^2(x)}{\cos(x)} \\
&= \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{\cos(x)} \\
&= \frac{\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} \\
&= \operatorname{sen}(x)\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} \\
&= \operatorname{sen}(x)\operatorname{tg}(x).
\end{aligned}$$

e) $\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\operatorname{cossec}(x)} + \dfrac{\cos(x)}{\sec(x)} = 1$, para todo $x \neq \dfrac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Como $\operatorname{cossec}(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sen}(x)}$ e $\sec(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{\operatorname{sen}(x)}{\operatorname{cossec}(x)} + \frac{\cos(x)}{\sec(x)} &= \frac{\operatorname{sen}(x)}{\frac{1}{\operatorname{sen}(x)}} + \frac{\cos(x)}{\frac{1}{\cos(x)}} \\
&= \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(x) + \cos(x)\cos(x) \\
&= \operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) \\
&= 1.
\end{aligned}$$